И. А. ГИБШ

АЛГЕБРА

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

УЧПЕДГИЗ · 1960

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР
ИНСТИТУТ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

И. А. ГИБШ

АЛГЕБРА

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ IX—XI КЛАССОВ

Alexei

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва 1960

Жене, другу, помощнице в труде
Сарре Давидовне Гибш
с любовью и благодарностью
посвящает эту книгу автор

ОТ АВТОРА

Настоящая книга представляет собой учебное пособие для учителей по курсу алгебры IX—XI классов средней школы.

Автор стремился придать этому пособию три существенные особенности: 1) пособие предназначается для того, чтобы по возможности обстоятельнее и глубже выявить все основные понятия, идеи и методы курса алгебры IX—XI классов; 2) пособие строит изложение теории и ее приложений на методической основе, т. е. так, чтобы эта теория и ее приложения могли быть приняты учителем не только к руководству, но и к действию в процессе сообщения их учащимся; 3) пособие может быть в большей своей части использовано не только учителем при обучении, но и непосредственно самим учащимся при самостоятельном изучении им отдельных разделов алгебры.

Автор исходил из убеждения, что обстоятельное и глубокое изложение теории может быть достигнуто только посредством исчерпывающего раскрытия учителем основных понятий, идей и методов, и в связи с этим стремился сосредоточить на этом свое внимание и силы. Немаловажную роль должны сыграть в достижении этой цели приведенные в тексте примеры с их решениями и упражнения с необходимыми указаниями.

Пособие составлено в соответствии с новой программой по математике и содержит весь обязательный материал. Выходы за пределы этой программы вызваны исключительно стремлением достигнуть той обстоятельности, внутренней завершенности в изложении вопроса, которая является необходимой при систематическом сообщении определенного круга сведений. Учитель не сделает эти дополнительные сведения предметом преподавания, но все время будет находиться в области рассматриваемого вопроса во всеоружии и творчески использует их в целях пробуждения инициативы и интереса учащихся.

В пособии всюду, где это представляется возможным, выявляется и используется идея функциональной зависимости и ее геометрического представления. С этой целью, например, сведения о степенной функции с целым и дробным показателем вводятся и накапливаются постепенно, с тем чтобы в разделе «Функции и графики» они могли быть только приведены в систему. Точно так же понятия о монотонном изменении (возрастании и убывании) функций в данном промежутке, о достижении ими максимумов и минимумов в данной точке, о неограниченном возрастании или убывании функции (при стремлении независимой переменной к данному пределу или на бесконечности) рассматриваются в каждом случае, который представляется при изучении той или иной функции. Такой порядок построения курса и такая система постепенного накопления необходимых сведений о свойствах функций и способах их исследования позволяет сделать изложение специального раздела курса алгебры, посвященного указанным вопросам, наиболее естественным и сводящимся лишь к систематизации и научному оформлению материала, составляющего его содержание.

Этот специальный раздел, носящий заглавие «Функции и их исследование. Производная», содержит элементы математического анализа, введение которых в курс алгебры средней школы с полным основанием следует рассматривать как одно из крупнейших достижений в области преподавания физико-математических дисциплин в современной советской средней школе. Введение элементов математического анализа в курс математики средней школы, органически связанное с ним, в значительной мере определит его основные направления и идейное содержание и окажет влияние на повышение уровня преподавания смежных дисциплин.

При такой оценке значения элементов математического анализа для курса математики средней школы автор стремился подойти к изложению этих элементов с особенным вниманием. То изложение, которое автор предлагает в настоящем пособии, в необходимой мере определилось программой и ее указаниями. Ввиду этого автору пришлось вслед за понятием о переменной, областью изменения которой служит последовательность, ввести понятие о непрерывно изменяющейся переменной и рассматривать каждую функцию именно как непрерывно изменяющуюся переменную; этот подход позволил свести понятие о пределе функции к понятию о пределе каждой непрерывно изменяющейся переменной.

В разделе, посвященном элементам математического анализа, автор не счел возможным ограничиться тем минимумом сведений, который указывается программой, но включил также рассмотрение понятия о стремлении переменной к $+\infty$ или $-\infty$ и относящиеся к этому понятию краткие сведения, без применения которых в дальнейшем сколько-нибудь полное исследование хода изменения функций оказалось бы невыполнимым.

При изложении предложений математического анализа, устанавливающих признаки возрастания и убывания функций и достижения ими максимумов и минимумов, автор сначала строит все выводы на геометрических соображениях, но завершает их аналитическими доказательствами, вполне доступными учащимся и вместе с тем в достаточной мере обосновывающими приводимые рассуждения.

Выбор примеров и упражнений, приводимых в книге, выполнен автором не только с целью предложить материал для приобретения учащимися соответствующих навыков, но и для того, чтобы содействовать более глубокому усвоению содержащихся в теории основных понятий и идей. В ряде прилагаемых решений примеров должна проявиться тенденция автора найти наиболее рациональные методы и способы нахождения ответов на прилагаемые вопросы.

При создании настоящего труда автор стремился дать каждому вопросу то решение, к которому он пришел в результате своей многолетней научно-педагогической деятельности. Он надеется, что эти решения не покажутся читателям неудачными, но будет обязан им, если они найдут возможным сообщить свои замечания по поводу отдельных мест книги или даже всего труда.

Автор считает своим долгом выразить самую глубокую благодарность за весьма ценное содействие в устранении недостатков книги и в некотором усовершенствовании ее следующим лицам: зав. кафедрой математики Кировского педагогического института Ф. Ф. Нагибину, проф. А. Г. Курошу и учителям К. П. Сикорскому, И. Б. Вейцману, А. А. Колосову и Т. Ф. Нечаевой.

ГЛАВА I

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ ЧИСЕЛ. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ ИЗ ЧИСЛА — ТОЧНЫЙ И ПРИБЛИЖЕННЫЙ С ТОЧНОСТЬЮ ДО 1

1. Квадрат целого числа. Если мы будем последовательно возводить в квадрат целые числа

(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,..., составляющие натуральный ряд чисел, то мы получим ряд, или, как говорят в науке, последовательность квадратов этих чисел:

(2) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, ... Этот ряд чисел, как и натуральный ряд чисел, можно, конечно, продолжить — он конца не имеет: за каждым числом ряда (2) следует число, которое служит квадратом некоторого числа натурального ряда.

В то время как в последовательности (1) содержатся все без исключения целые (положительные) числа, в последовательность (2) вошли далеко не все целые (положительные) числа; например, числа 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15,... не содержатся в этой последовательности. Таким образом, многие целые (положительные) числа не служат квадратами целых (положительных) чисел.

Легко заметить, что целые числа, у которых цифра единиц есть 2, 3, 7, 8, не являются квадратами целых чисел; эти цифры попарно дополняют друг друга до 10 ($2+8=3+7$).

2. Квадратный корень из числа.

Определение 1. Число b, квадрат которого равен данному числу a, называется квадратным корнем из числа a.

Если число b есть квадратный корень из числа a, то эту зависимость записывают так:

$$b=\sqrt{a};$$

употребляемый для этой записи знак $\sqrt{\ }$ называется знаком квадратного корня.

Вместо того, чтобы сказать «найти квадратный корень из числа a», говорят «извлечь квадратный корень из числа a».

Данное число a, из которого извлекается корень, называется в связи с обозначением $\sqrt{a}$ подкоренным числом.

Примеры:

$$\sqrt{81} = 9; \qquad \sqrt{12321} = 111;$$

$$\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}; \qquad \sqrt{5{,}29} = 2{,}3.$$

3. Приближенный квадратный корень с точностью до 1. Из числа 49 можно извлечь квадратный корень: он равен 7. Но из числа 56 квадратный корень извлечь нельзя: число 56 находится между двумя смежными квадратами:

$$49 < 56 < 64, \text{ т. е. } \quad 7^2 < 56 < 8^2.$$

Определение 2. Каждое из двух смежных положительных целых чисел b и $b+1$, между квадратами которых заключено данное число a, называется приближенным квадратным корнем из числа a с точностью до 1.

Иначе говоря, положительные целые числа b и $b+1$, отличающиеся на 1, называются приближенными квадратными корнями из числа a с точностью до 1, если

$$b^2 < a < (b+1)^2.$$

Таким образом, число b есть наибольшее целое число, квадрат которого меньше, чем a, а $b+1$ есть наименьшее целое число, квадрат которого больше, чем a.

Например, так как

$$7^2 < 56 < 8^2,$$

то числа 7 и 8 являются приближенными квадратными корнями из числа 56 с точностью до 1; при этом 7 есть наибольшее целое число, квадрат которого меньше, чем 56, а 8 есть наименьшее целое число, квадрат которого больше, чем 56.

Приближенными квадратными корнями из числа 152,36 с точностью до 1 служат числа 12 и 13, так как

$$12^2 < 152{,}36 < 13^2.$$

Наибольшее целое число b, квадрат которого меньше, чем число a, называется приближенным квадратным корнем из числа a с точностью до 1 с недостатком, а наименьшее целое число $b+1$, квадрат которого больше, чем число a, называется приближенным квадратным корнем из числа a с точностью до 1 с избытком.

Например, 11 есть приближенный квадратный корень из числа 125,3 с точностью до 1 с недостатком, а 12 — с избытком:

$$11^2 < 125{,}3 < 12^2.$$

Для противоположения корень из числа, являющегося квадратом какого-либо числа, называется точным квадратным корнем из данного числа, так что утверждение, что b есть точный квадратный корень из числа a, означает, что $b^2 = a$.

4. Извлечение квадратного корня из целых чисел с помощью вычисления. Допустим, что требуется извлечь квадратный корень из данного целого числа a. Так как неизвестно, является ли число a квадратом какого-либо целого числа или нет, то мы поставим перед собой такую задачу: найти точный квадратный корень из числа a или приближенный квадратный корень из этого числа с точностью до 1 с недостатком, т. е. квадратный корень из наибольшего квадрата, содержащегося в числе a; иначе говоря, мы будем искать число b, удовлетворяющее соотношению

$$b^2 \leqslant a < (b+1)^2.$$

Очевидно, что равенство будет иметь место в том случае, если b есть точный квадратный корень из числа a, а неравенство — в том случае, если b есть приближенный квадратный корень из числа a с точностью до 1 с недостатком.

В этом именно смысле мы будем в дальнейшем называть число b квадратным корнем из числа a.

5. Вывод правила (алгорифма) извлечения квадратного корня из целых чисел. Нахождение квадратного корня b из числа a основано на двух следующих теоремах.

Теорема 1. Число десятков квадратного корня из целого числа A равно квадратному корню из числа сотен B этого числа.

Доказательство.

1°. Проведем доказательство сначала на примере.

Требуется найти $\sqrt{4785}$.

В числе 4785 содержится всего 47 сотен:

$$4785 = 47 \cdot 100 + 85, \text{ где } 0 < 85 < 100.$$

Из числа 47 можно извлечь приближенный квадратный корень (с недостатком); он равен 6, так как

$$6^2 < 47 < 7^2.$$

Из этих неравенств следует, что

$$3600 < 4700 < 4900.$$

Число 4900 превосходит число 4700 на 2 сотни; поэтому, прибавляя к числу 4700 число 85, меньшее, чем 1 сотня, мы получим число 4785, меньшее, чем число 4900, т. е.

$$3600 < 4785 < 4900.$$

Представив эти неравенства в виде

$$60^2 < 4785 < 70^2,$$

мы заключаем, что число 4785 либо равно одному из чисел 60^2, 61^2, 62^2, 63^2, 64^2, 65^2, 66^2, 67^2, 68^2, 69^2, 70^2, либо заключено между какими-то двумя смежными из этих чисел. Но это означает, что квадратный корень из числа 4785 (точный или приближенный с недостатком с точностью до 1) равен одному из чисел:

$$60,\ 61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66,\ 67,\ 68,\ 69,$$

т. е. что число десятков этого квадратного корня равно числу 6, а число 6 есть (в указанном выше смысле) квадратный корень из числа сотен подкоренного числа.

2°. Проведем доказательство в общем виде.

Требуется найти $\sqrt{A}$, где A — целое число.

Допустим, что в числе A содержится всего B сотен, т. е. что

$$A = 100B + C, \text{ где } 0 \leqslant C < 100.$$

Из числа B можно извлечь квадратный корень (точный или приближенный с недостатком с точностью до 1); допустим, что этот корень равен числу x, т. е. что

$$x^2 \leqslant B < (x+1)^2.$$

Из этих неравенств следует, что

$$100x^2 \leqslant 100\,B < 100\,(x+1)^2.$$

Так как B и $(x+1)^2$ — целые числа и

$$B < (x+1)^2,$$

то число $100B$ меньше числа $100\,(x+1)^2$ по крайней мере на 100; но $C < 100$; поэтому и

$$100B + C < 100\,(x+1)^2.$$

Таким образом,

$$100x^2 \leqslant 100B + C < 100\,(x+1)^2,$$

или

$$(10x)^2 \leqslant A < [10(x+1)]^2.$$

Отсюда следует, что число A либо равно одному из чисел:

$$(10x)^2,\ (10x+1)^2,\ (10x+2)^2, \ldots,\ (10x+9)^2,\ (10x+10)^2,$$

либо заключено между какими-то двумя смежными из этих чисел. Это означает, что квадратный корень из числа A (точный или приближенный с точностью до 1) равен одному из чисел:

$$10x,\ 10x+1,\ 10x+2, \ldots,\ 10x+8,\ 10x+9,$$

т. е. что число десятков этого квадратного корня равно числу x; но число x есть квадратный корень из числа сотен B подкоренного числа. Это и требовалось доказать.

Теорема 2. Если x есть число десятков квадратного корня из целого числа A, то число единиц этого корня не превышает частного от деления числа десятков разности $A - 100\,x^2$ на удвоенное число десятков x того же корня.

Доказательство.

1°. Вернемся к рассмотренному числовому примеру.

Было найдено, что число десятков x квадратного корня из числа 4785 равно 6.

Если мы обозначим число простых единиц этого корня через y, то будет иметь место неравенство:

$$(60 + y)^2 \leqslant 4785,$$

где y есть наибольшее из целых чисел, удовлетворяющих этому неравенству; отсюда находим, что y есть наибольшее из целых чисел, удовлетворяющих неравенству:

$$120y + y^2 \leqslant 1185.$$

В числе $120y$ содержится $12y$ десятков, а в числе y^2 либо не содержится ни одного десятка (если $0 \leqslant y \leqslant 3$), либо содержатся десятки (если $3 < y \leqslant 9$); в числе же 1185 содержится 118 десятков. Поэтому

$$12y \leqslant 118$$

и

$$y \leqslant \frac{118}{12},$$

а это и требовалось доказать; в самом деле, 118 есть число десятков разности $4785 - 3600$, а 12 есть удвоенное число десятков квадратного корня из числа 4785.

Так как

$$\frac{118}{12} = 9\frac{5}{6},$$

то

$$y \leqslant 9.$$

Для того чтобы установить, какому именно из целых чисел, не превосходящих числа 9, равно число y, принимаем во внимание, что y есть наибольшее из целых чисел, удовлетворяющих неравенству:

$$120y + y^2 \leqslant 1185.$$

Представляя это неравенство в виде

$$(12 \cdot 10 + y) \cdot y \leqslant 1185,$$

замечаем, что $12 \cdot 10 + y$ есть целое число, имеющее 12 десятков и y единиц, причем 12 есть удвоенное число десятков искомого квадратного корня из числа 4785.

Начинаем испытание с наибольшего из возможных значений буквы y, т. е. с числа 9; для этого достаточно к числу 12 приписать справа число 9 и полученное число 129 умножить на 9:

$$129 \cdot 9 = 1161; \qquad 1161 < 1185;$$

число 9 годится.

Следовательно, приближенный квадратный корень из числа 4785 с недостатком с точностью до 1 есть число 69.

Так как $4785 = 3600 + 1185$, а $1185 = 129 \cdot 9 + 24$, то можно написать точное равенство:

$$\begin{aligned} 4785 &= 3600 + (120 + 9) \cdot 9 + 24 = \\ &= 3600 + 120 \cdot 9 + 9^2 + 24 = \\ &= (60 + 9)^2 + 24 = 69^2 + 24. \end{aligned}$$

Таким образом, разность 1185 — 1161 есть как раз то число, которое надо прибавить к квадрату найденного корня 69, чтобы получить данное подкоренное число 4785.

2°. Проведем доказательство в общем виде.

Было найдено, что число десятков x квадратного корня из числа A равно квадратному корню из числа сотен B этого числа. Если мы обозначим число простых единиц этого корня через y, то будет иметь место неравенство:

$$(10x + y)^2 \leqslant A,$$

где y есть наибольшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству; отсюда находим, что y есть наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$20\,xy + y^2 \leqslant A - 100x^2.$$

В числе $20\,xy$ содержится $2\,xy$ десятков, а в числе y^2 содержатся или не содержатся десятки; поэтому, если мы обозначим число десятков, содержащихся в числе $A - 100x^2$, через m, то получим неравенство:

$$2xy \leqslant m;$$

отсюда следует, что

$$y \leqslant \frac{m}{2x},$$

а это и требовалось доказать.

Для того чтобы найти, какому именно из чисел, не превышающих числа $\frac{m}{2x}$, равно число y, надо принять во внимание, что y есть наибольшее из целых чисел, удовлетворяющих неравенству:

$$(20x + y)\,y \leqslant A - 100x^2,$$

т. е. неравенству

$$(2x \cdot 10 + y) \cdot y \leqslant A - 100x^2,$$

где $2x \cdot 10 + y$ есть число, имеющее $2x$ десятков и y единиц.

Если разность между числами $A - 100x^2$ и $(2x \cdot 10 + y) \cdot y$ мы обозначим через R, то можно будет написать равенство:

$$(A - 100x^2) - (2x \cdot 10 + y) \cdot y = R;$$

представляя его в виде

$$A = 100x^2 + 20xy + y^2 + R = (10x + y)^2 + R,$$

заключаем, что разность R есть как раз то число, которое надо прибавить к квадрату найденного квадратного корня $10x + y$ из числа A, чтобы получить число A.

6. Расположение вычислений. Вычисления, которые мы выполнили для нахождения квадратного корня из числа 4785, удобно расположить в таком порядке:

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{47'85} = 69 \\
 & 36 \\ \hline
129 & 11\,8'5 \\
9 & 11\,6\,1 \\ \hline
 & \quad 24
\end{array}$$

1) Для нахождения числа десятков корня надо, согласно теореме 1, извлечь квадратный корень из числа сотен подкоренного числа; чтобы найти это число сотен, отделяем (штрихом) в подкоренном числе справа налево две цифры; узнаем, что искомое число сотен равно 47; извлекаем из него квадратный корень; находим

число 6, которое и представляет собой число десятков x искомого корня, т. е. $x = 6$.

2) Для нахождения разности между подкоренным числом и числом $100\,x^2$, т. е. числом 3600, вычитаем из 47 сотен подкоренного числа 36 сотен и приписываем (сносим) к результату 11 число десятков и единиц подкоренного числа; искомая разность оказывается равной числу 1185.

3) Теперь находим число десятков числа 1185, для чего отделяем (штрихом) в числе 1185 справа налево одну цифру и делим найденное число 118 на удвоенное число десятков искомого корня, т. е. на число 12, которое помещаем слева от делимого 118 за чертой, оставляя справа от делителя 12 место для одной цифры; частное 9 представляет собой, согласно теореме 2, число, которое не должно превышать число единиц искомого корня.

4) Для нахождения того из чисел, не превышающих числа 9, которое служит числом единиц искомого корня, испытываем сперва частное 9; это выполняется так: приписывая к делителю 12 справа (на оставленном свободном месте) число 9 и под этим числом 9 — еще раз число 9 в качестве множителя, находим произведение $129 \cdot 9$; результат 1161 подписываем под ранее найденной разностью 1185, с которой и сравниваем произведение 1161; так как оно оказывается меньше числа 1185, то число 9 годится, т. е. оно как раз и служит числом простых единиц искомого квадратного корня из данного числа 4785.

5) Вычитая из числа 1185 число 1161, получаем то число 24, которое надо прибавить к квадрату найденного корня 69, чтобы получить данное подкоренное число 4785.

7. Другие примеры.

1) Найдем $\sqrt{1395}$.

Выполняя вычисления в указанной последовательности, получим:

$$\begin{array}{r} \sqrt{13'9\,5} = 37 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \hline 67 & 49'5 \\ 7 & 46\,9 \\ \cline{2-2} & 2\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \hline 68 & 4\,9'5 \\ 8 & 5\,4\,4 \end{array}$$

Частное от деления числа 49 на 6 равно 8; поэтому начинаем испытание с числа 8. Оказывается, что произведение $68 \cdot 8$ больше числа 495. Значит, число 8 велико; испытываем число 7. Произведение $67 \cdot 7$ меньше числа 495 на 26. Поэтому

$$1395 = 37^2 + 26.$$

2) Найдем $\sqrt{24396}$.

а) Для нахождения числа десятков этого корня надо, согласно теореме 1, извлечь квадратный корень из числа сотен подкоренного числа, т. е. из числа 243, которое получится путем отделения в подкоренном числе двух цифр справа. Поступаем, как в примерах, разобранных выше:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{2'43}=15} \\ & 1 \\ \hline 25 & 1\,43 \\ 5 & 1\,25 \\ \hline & \;\;18 \end{array}$$

Мы нашли, что число десятков искомого корня равно 15, причем $243 - 15^2 = 18$.

б) Для нахождения числа простых единиц искомого корня надо, согласно теореме 2, найти разность $24\,396 - 100 \cdot 15^2$ и разделить число содержащихся в ней десятков на удвоенное число десятков искомого корня. Но

$$24\,396 - 100 \cdot 15^2 = (243 - 15^2) \cdot 100 + 96 =$$
$$= 18 \cdot 100 + 96 = 1896,$$

так что для нахождения разности $24\,396 - 100 \cdot 15^2$ достаточно к остатку 18, полученному при извлечении квадратного корня из числа сотен данного подкоренного числа, приписать (снести) две последние цифры этого подкоренного числа.

Теперь остается отделить в числе 1896 последнюю цифру и разделить полученное этим путем число 189 на $2 \cdot 15$, т. е. на 30:

$$\begin{array}{r|r} 306 & 189'6 \\ 6 & 183\,6 \\ \hline & 6\,0 \end{array}$$

Частное 6 оказывается годным.

Следовательно,

$$24\,396 = 156^2 + 60.$$

На практике обе записи вычисления (нахождение десятков и нахождение единиц корня) записываются непосредственно одна вслед за другой.

3) Найдем $\sqrt{567894}$.

Все вычисление записываем так:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\sqrt{56'78'94}=753} \\ & 49 \\ \hline 145 & 7\,7'8 \\ 5 & 7\,2\,5 \\ \hline 1503 & 5\,39'4 \\ 3 & 4\,50\,9 \\ \hline & \;\;88\,5 \end{array}$$

Мы нашли, что

$$567\,894 = 753^2 + 885.$$

4) Найдем $\sqrt{93\,169}$.

Выполним вычисление, в точности соблюдая установленный выше порядок:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{9'31'59} = 305}\\
\multicolumn{2}{l}{\;9}\\ \hline
60 & 3'1\\
0 & 0\\ \hline
605 & 3\,15'9\\
5 & 3\,02\,5\\ \hline
 & 13\,4
\end{array}$$

При решении этого примера встретилась та особенность, что целое частное от деления числа десятков (3) первого остатка на удвоенную первую цифру корня (6) оказалось равным 0. Очевидно, что в этом случае можно было не выполнять умножения $60 \cdot 0$ и вычитания $31 - 0$, а достаточно было в качестве второй цифры частного поставить 0 и к первому остатку (31) снести следующую пару цифр (59), а затем число десятков (315) получившегося числа (3159) разделить на удвоенное число (60), составленное найденными цифрами корня. Тогда получилась бы следующая обычно употребляемая запись:

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{9'31'59} = 305}\\
\multicolumn{2}{l}{\;9}\\ \hline
605 & 3'15'9\\
5 & 3\,02\,5\\ \hline
 & 13\,4
\end{array}$$

8. Правило (алгорифм) извлечения квадратного корня из целого числа. Проследив за ходом выполненного вычисления, устанавливаем, что оно складывается из следующих шагов (этапов):

1) Подкоренное число разбивают справа налево на группы, или, как говорят, на грани, включая в каждую из них по две цифры, так что только первая (слева) грань может оказаться состоящей из одной цифры (если число цифр данного подкоренного числа нечетное).

2) Извлекают квадратный корень из первой грани (т. е. из числа, изображаемого цифрами, вошедшими в первую грань); этим путем находят первую цифру корня.

3) Вычитают из первой грани квадрат найденной первой цифры корня, к остатку приписывают (сносят) вторую грань и число десятков получившегося числа делят на удвоенную первую цифру корня; найденное частное подвергают испытанию. Для этого частное приписывают к удвоенной первой цифре корня и полученное этим путем число умножают на испытуемую цифру. Если это произведение можно вычесть из числа, образовавшегося из первого остатка и второй грани, то испытуемая цифра годится, а разность будет вторым остатком. Если же вычитание невозможно, то последовательно испытывают цифры, которые меньше найденного

частного на 1, на 2, ..., до тех пор, пока не найдут пригодную цифру; она составит тогда вторую цифру корня.

4) Далее ко второму остатку сносят следующую грань и для нахождения третьей цифры корня поступают так же, как поступали для нахождения второй цифры корня, причем место первой цифры корня занимает уже число, составленное найденными двумя цифрами корня.

5) Этот процесс продолжают до тех пор, пока не будут исчерпаны все грани.

6) Если последний остаток окажется нулем, то это будет означать, что данное целое число, из которого извлекается квадратный корень, есть квадрат целого числа. Если же этот остаток окажется отличным от нуля, то он будет представлять собой то отличное от нуля число, которое надо прибавить к квадрату найденного квадратного корня, чтобы получить данное число.

9. Число цифр корня. Рассмотренный процесс извлечения квадратного корня из целого числа указывает, что число цифр корня в точности равно числу граней, на которые разбито это число.

10. Нахождение приближенного квадратного корня с недостатком с точностью до 1 из дробных чисел. Если требуется найти квадратный корень из дробного числа с точностью до 1, то, очевидно, достаточно найти точный или приближенный квадратный корень с недостатком с точностью до 1 из целой части данного дробного числа.

Например, приближенный квадратный корень с недостатком с точностью до 1 из числа 218,34 равен приближенному квадратному корню с недостатком с точностью до 1 из числа 218, т. е. числу 14. В самом деле,

$$14^2 < 218 < 218{,}34 < 15^2.$$

Целое число 15^2 больше целого числа 218, т. е. превышает число 218 по крайней мере на 1; следовательно, оно больше и числа 218,34, которое превышает число 218 только на 0,34, т. е. меньше, чем на 1.

Приближенный квадратный корень с недостатком с точностью до 1 из числа 49,568 равен точному квадратному корню из числа 49, т. е. числу 7, так как

$$7^2 < 49{,}568 < 8^2.$$

Приближенный квадратный корень с недостатком с точностью до 1 из числа 0,72 равен 0, так как

$$0^2 < 0{,}72 < 1^2.$$

Точно так же приближенные квадратные корни с недостатком с точностью до 1 из чисел

$$32\frac{4}{9} \quad \text{и} \quad \frac{8}{15}$$

равны соответственно числам 5 и 0, так как

$$5^2 < 32\frac{4}{9} < 6^2; \qquad 0^2 < \frac{8}{15} < 1^2.$$

§ 2. ПРИБЛИЖЕННЫЕ КВАДРАТНЫЕ КОРНИ С ТОЧНОСТЬЮ ДО $\frac{1}{n}$.

1. Повышение степени точности. При решении многих вопросов требуется находить приближенные квадратные корни из чисел с более высокой степенью точности, чем с точностью до 1.

Определение. Если a есть положительное число, то каждая из двух дробей $\frac{b}{n}$ и $\frac{b+1}{n}$, отличающихся на $\frac{1}{n}$, между квадратами которых заключено число a, называется приближенным квадратным корнем из числа a с точностью до $\frac{1}{n}$, первое $\left(\frac{b}{n}\right)$ — с недостатком, а второе $\left(\frac{b+1}{n}\right)$ — с избытком.

Иначе говоря, дроби $\frac{b}{n}$ и $\frac{b+1}{n}$, отличающиеся на $\frac{1}{n}$, называются приближенными корнями из числа a с точностью до $\frac{1}{n}$, если $\left(\frac{b}{n}\right)^2 < a < \left(\frac{b+1}{n}\right)^2$.

Таким образом, дробь $\frac{b}{n}$ есть наибольшая из всех дробей со знаменателем n, квадрат которой меньше, чем a, а $\frac{b+1}{n}$ есть наименьшая из всех дробей со знаменателем n, квадрат которой больше, чем a.

Примеры:

1) Приближенными квадратными корнями из числа 2 с точностью до $\frac{1}{10}$ служат дроби 1,4 и 1,5, так как эти дроби отличаются на 0,1 и притом $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$.

2) Приближенными квадратными корнями из числа 3 с точностью до $\frac{1}{1000}$ служат дроби 1,732 и 1,733, так как эти дроби отличаются на 0,001 и притом

$$1{,}732^2 < 3 < 1{,}733^2.$$

3) Приближенными квадратными корнями из числа 52 с точностью до $\frac{1}{5}$ служат дроби $\frac{36}{5}$ и $\frac{37}{5}$, так как эти дроби отличаются на $\frac{1}{5}$ и притом

$$\left(\frac{36}{5}\right)^2 < 52 < \left(\frac{37}{5}\right)^2.$$

2. Общий способ нахождения приближенных квадратных корней с точностью до $\frac{1}{n}$.

1°. Выясним, в чем состоит этот способ, сначала на примерах.

1) Требуется найти приближенные квадратные корни из числа 2 с точностью до $\frac{1}{10}$. Искомые корни имеют вид дробей $\frac{x}{10}$ и $\frac{x+1}{10}$, удовлетворяющих неравенству:

$$\left(\frac{x}{10}\right)^2 < 2 < \left(\frac{x+1}{10}\right)^2,$$

т. е. неравенству

$$x^2 < 2\cdot 100 < (x+1)^2.$$

Это неравенство указывает, что искомые числители дробей $\frac{x}{10}$ и $\frac{x+1}{10}$ представляют собою не что иное, как приближенные квадратные корни (с недостатком и с избытком) с точностью до 1 из числа $2\cdot 100$, т. е. из числа $2\cdot 10^2$. Выполнив вычисление, найдем, что $x=14$ и что, следовательно,

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2,$$

так что искомыми приближенными квадратными корнями служат числа 1,4 и 1,5.

2) Требуется найти приближенные квадратные корни из числа 3 с точностью до $\frac{1}{1000}$. Повторяя рассуждения, приведенные при решении примера 1, придем к выводу, что для нахождения этих корней достаточно найти приближенные квадратные корни с точностью до 1 из числа $3\cdot 1000^2$ и каждый из этих корней разделить на 1000.

Так как $\sqrt{3\cdot 1000^2} = \sqrt{3000000} \approx 1732$, то приближенными квадратными корнями из числа 3 с точностью до $\frac{1}{1000}$ служат числа 1,732 и 1,733.

2°. Теперь проведем это рассуждение в общем виде.

Требуется найти приближенные квадратные корни из положительного числа a с точностью до $\frac{1}{n}$. Искомые корни имеют вид дробей $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, удовлетворяющих неравенству

$$\left(\frac{x}{n}\right)^2 < a < \left(\frac{x+1}{n}\right)^2,$$

т. е. неравенству

$$x^2 < a\cdot n^2 < (x+1)^2.$$

Это неравенство указывает, что искомые числители дробей $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$ представляют собой не что иное, как приближенные квадратные корни (с недостатком и с избытком) с точностью до 1 из числа $a \cdot n^2$. Если этими корнями служат числа b и $b+1$, то $x = b$, так что искомыми приближенными квадратными корнями из числа a с точностью до $\frac{1}{n}$ будут дроби $\frac{b}{n}$ и $\frac{b+1}{n}$.

Правило. Для того чтобы найти приближенные квадратные корни с точностью до $\frac{1}{n}$ из положительного числа a, достаточно найти приближенные квадратные корни с точностью до 1 из числа $a \cdot n^2$ и каждый из них разделить на n.

Примеры:

1) $\sqrt{28,72}$ (с точностью до 0,1 с недостатком) = 5,3, так как $\sqrt{2872}$ (с точностью до 1) = 53.

2) $\sqrt{28,72}$ (с точностью до 0,001 с недостатком) = 5,359, так как $\sqrt{28720000}$ (с точностью до 1) = 5359.

3) $\sqrt{0,58}$ (с точностью до 0,1 с недостатком) = 0,7, так как $\sqrt{58}$ (с точностью до 1) = 7.

4) $\sqrt{0,58}$ (с точностью до 0,01 с недостатком) = 0,76, так как $\sqrt{5800}$ (с точностью до 1) = 76.

5) $\sqrt{38}$ $\left(\text{с точностью до } \frac{1}{5} \text{ с недостатком}\right) = 6$, так как $\sqrt{38 \cdot 25}$ (с точностью до 1) = 30.

6) $\sqrt{4238}$ (с точностью до $\frac{1}{20}$ с избытком) = 65,1, так как $\sqrt{4238 \cdot 400}$ (с точностью до 1 с избытком) = 1302.

3. Нахождение приближенных квадратных корней из десятичных дробей с точностью до данного десятичного знака.

1°. Из правила умножения десятичных дробей следует, что квадрат десятичной дроби содержит вдвое больше десятичных знаков (т. е. цифр после запятой), чем эта дробь. Поэтому квадратом десятичной дроби может быть только та десятичная дробь, которая имеет четное число десятичных знаков. При этом приписанные нули не должны, конечно, приниматься во внимание; например, дробь 1,4560 заведомо не служит квадратом.

2°. Если требуется извлечь квадратный корень из десятичной дроби с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001, ..., то на результат могут повлиять соответственно только 2,4,6,... десятичных знака данной десятичной дроби; лишние знаки должны быть отброшены.

Например, при нахождении квадратного корня из числа 42,357 с точностью до 0,1 цифра 7 должна быть сразу отброшена с округлением предшествующей цифры 5 до 6:

$$\sqrt{42,357} = \sqrt{42,36} = 6,5.$$

Точно так же

$$\sqrt{814,53962} = \sqrt{814,5396} = 28,54 \text{ с точностью до } 0,01.$$

3°. Приписывая к десятичной дроби, из которой требуется извлечь квадратный корень, достаточное число нулей, всегда можно сделать число ее десятичных знаков вдвое большим, чем число искомых десятичных знаков корня. После этого можно извлекать квадратный корень из данной десятичной дроби как из целого числа (т. е. не обращая внимания на запятую), но в результате поставить запятую после тех цифр, которые получены путем извлечения корня из целой части данной десятичной дроби.

Примеры:

1) Найти $\sqrt{2{,}593}$ с точностью до 0,01.

$$\sqrt{2{,}593} = \sqrt{2{,}'59'30} = 1{,}61.$$

2) Найти $\sqrt{45{,}7}$ с точностью до 0,001.

$$\sqrt{45{,}7} = \sqrt{45{,}70\ 00\ 00} = 6{,}760.$$

4°. Если требуется извлечь квадратный корень из данной десятичной дроби, но степень точности не указана, то корень находят с числом цифр, вдвое меньшим, чем число десятичных знаков данной дроби.

Примеры:

1) $\sqrt{814{,}5316} = 28{,}54$;

2) $\sqrt{3{,}142} = \sqrt{3{,}1420} = 1{,}77$.

4. Влияние на корень перенесения запятой в подкоренном числе. Приближенный квадратный корень из числа 812,96 с недостатком есть 28,5, а с избытком — 28,6. Следовательно,

$$(1)\qquad 28{,}5^2 < 812{,}96 < 28{,}6^2.$$

Отсюда находим, что

$$(28{,}5\cdot 10)^2 < 81\ 296 < (28{,}6\cdot 10)^2$$

т. е. что

$$(2)\qquad 285^2 < 81\ 296 < 286^2.$$

Из этого двойного неравенства заключаем, что $\sqrt{81\ 296}$ с недостатком есть 285, а с избытком — 286.

Точно так же из неравенств (1) находим, что

$$(28{,}5\cdot 0{,}1)^2 < 8{,}1296 < (28{,}6\cdot 0{,}1)^2,$$

т. е. что

$$2{,}85^2 < 8{,}1296 < 2{,}86^2.$$

Отсюда заключаем, что $\sqrt{8{,}1296}$ с недостатком есть 2,85, а с избытком — 2,86.

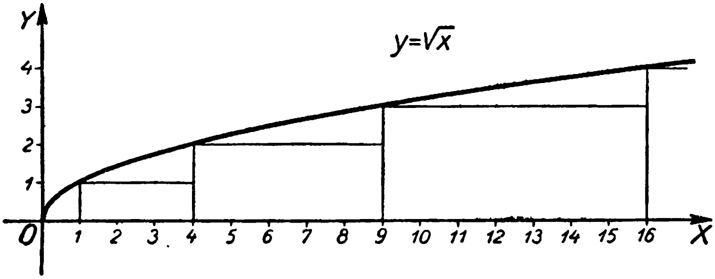
Таким образом, при перенесении запятой в подкоренном числе на 2 знака запятая в квадратном корне из этого числа переносится в ту же сторону на 1 знак. При этом, конечно, степень точности приближенного корня соответственно изменяется.

Очевидно, что вообще при перенесении запятой в подкоренном числе на 2,4,6,... знаков запятая в квадратном корне из этого числа переносится в ту же сторону на 1,2,3,... знаков.

5. График зависимости $y=\sqrt{x}$. Так как выражение $\sqrt{x}$ имеет определенное (точное или приближенное) числовое значение только при условии, если $x \geqslant 0$, то для построения графика составляем таблицу:

x	0	1	4	9	16	...
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4	...

В соответствии с этой таблицей строим график (черт. 1)*:



Черт. 1

Если график тщательно вычерчен на миллиметровой бумаге, то при надлежащем выборе масштаба можно по этому графику находить приближенные квадратные корни из чисел, нанесенных на ось OX. Так, если единица масштаба равна 2 *см*, то график дает возможностью находить приближенные квадратные корни с точностью до 0,1. Для получения большей степени точности надо увеличить единицу масштаба и вместе с тем размеры графика.

График зависимости $y=\sqrt{x}$ дает наглядное представление об изменении квадратного корня из числа x в связи с изменением числа x:

1) При возрастании подкоренного числа x квадратный корень из этого числа также возрастает.

2) Это возрастание происходит все медленнее и медленнее. Для

---

* Для чего надо построить и некоторое число промежуточных точек.

того чтобы убедиться в этом, рассмотрим, например, следующую таблицу:

x	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	...
$\sqrt{x}$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	...

Из этой таблицы видно, что если x переходит от значения 1 к значению 1,21 и, следовательно, увеличивается на 0,21, или, как говорят, получает приращение 0,21, то $\sqrt{x}$ получает приращение 0,1; если x переходит от значения 1,21 к значению 1,44, т. е. получает приращение 0,23, то $\sqrt{x}$ опять получает приращение 0,1; точно так же приращениям 0,25 (1,69—1,44), 0,27 (1,96—1,69), 0,29 (2,25—1,96) и т. д. числа x соответствует одно и то же приращение 0,1 квадратного корня из числа x. Таким образом, для того чтобы $\sqrt{x}$ получил приращение 0,1, число x должно пробежать какой-либо из промежутков:

[1... 1,21], [1,21... 1,44], [1,44... 1,69], [1,69...1,96], [1,96...2,25],...,

длина которых постепенно возрастает:

0,21—0,23—0,25—0,27—0,29—...,

но каждый из которых всего на 0,02 отличается от смежного.

Если мы составим таблицу:

x	1	1,0201	1,0404	1,0609	...
$\sqrt{x}$	1	1,01	1,02	1,03	...,

то увидим, что, для того чтобы $\sqrt{x}$ получил приращение 0,01, число x должно пробежать какой-либо из промежутков

[1...1,0201], [1,0201...1,0404], [1,0404...1,0609],...,

длина которых постепенно возрастает:

0,0201—0,0203—0,0205—...,

но каждый из которых всего на 0,0002 отличается от смежного.

Ввиду того что эти промежутки весьма мало отличаются один от другого по длине, мы можем принять, что при незначительных изменениях числа x равные приращения квадратного корня из числа x вызываются равными приращениями числа x. Отсюда следует, что при указанном условии с увеличением приращения числа x в целое или дробное число раз соответствующее приращение квадратного корня из числа x увеличивается во столько же раз, т. е. что приращения квадратного корня из числа x пропорциональны приращениям числа x.

3) К тому же выводу мы можем прийти иным путем. Нетрудно заметить, что график зависимости $y=\sqrt{x}$ (черт. 2) на протяжении небольших дуг, определяемых двумя близкими точками его, мало отличается от прямой линии. Воспользуемся этим и будем рассматривать дугу ABC графика (черт. 2) зависимости $y=\sqrt{x}$, соответствующую промежутку $[x_1; x_3]$, как отрезок прямой.

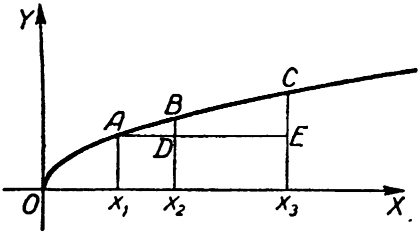
При этом предположении треугольники ABD и ACE будут подобными прямоугольными треугольниками и будет иметь место пропорция:

$$\frac{BD}{CE}=\frac{AD}{AE}.$$

Но AE и AD — приращения числа x_1, которые оно получает при переходе к значениям x_3 и x_2, а CE и BD — соответствующие приращения $\sqrt{x_1}$, т. е.

$$\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_3}-\sqrt{x_1}}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}.$$

Поэтому мы можем сказать, что при незначительных изменениях числа x приращения квадратного корня из числа x пропорциональны приращениям числа x, т. е. что отношение двух приращений квадратного корня из числа x равно отношению вызвавших их приращений числа x.



Черт. 2

Пользуясь этим, можно, зная квадратные корни из двух близких чисел x_1 и x_2, находить квадратные корни из чисел, принадлежащих промежутку $[x_1 \ldots x_2]$.

Пример 1. Зная, что $\sqrt{1{,}44}=1{,}2$ и $\sqrt{1{,}69}=1{,}3$, найти $\sqrt{1{,}52}$.

Решение. Найдя приращения:

$$1{,}69-1{,}44=0{,}25;\quad 1{,}52-1{,}44=0{,}08;\quad 1{,}3-1{,}2=0{,}1,$$

рассуждаем следующим образом: так как при увеличении числа 1,44 на 25 сотых квадратный корень из этого числа увеличивается на 10 сотых, то при увеличении числа 1,44 на 8 сотых квадратный корень из этого числа увеличивается на $\frac{8}{25}$ от 10 сотых, т. е. на 3,2 сотых; следовательно,

$$\sqrt{1{,}52}=\sqrt{1{,}44}+0{,}032=1{,}2+0{,}032=1{,}232.$$

Пример 2. Зная, что $\sqrt{1{,}0201}=1{,}01$ и $\sqrt{1{,}0404}=1{,}02$, найти $\sqrt{1{,}0356}$.

Решение. Находим приращения:

$$1{,}0404-1{,}0201=0{,}0203;\quad 1{,}0356-1{,}0201=0{,}0155;$$
$$1{,}02-1{,}01=0{,}01.$$

Приращению 0,0203 числа 1,0201 соответствует приращение 0,01 корня 1,01; пусть приращению 0,0155 числа 1,0201 соответствует приращение x того же корня; составляем пропорцию:

$$\frac{x}{0{,}01}=\frac{0{,}0155}{0{,}0203}=\frac{155}{203};$$

отсюда

$$x=\frac{155}{203}\cdot 0{,}01=0{,}0076.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1{,}0356}=\sqrt{1{,}0201}+0{,}0076=1{,}01+0{,}0076=1{,}0176.$$

Описанный способ нахождения квадратных корней по данным квадратным корням из двух близких чисел x_1 и x_2, принадлежащих промежутку $[x_1 \ldots x_2]$, называется способом линейной интерполяции. Это слово обозначает «вставление между (*inter*) двумя данными значениями (полюсами) какой-либо величины промежуточных значений этой величины».

6. Извлечение квадратного корня из чисел с помощью таблиц. На практике квадратные корни из чисел (целых и десятичных дробей) легче всего находятся с помощью таблиц. В книге «Четырехзначные математические таблицы для средней школы» В. М. Брадиса для извлечения квадратного корня из любого четырехзначного числа служит таблица XII.

Эта таблица содержит квадратные корни из всех трехзначных чисел, заключенных между 1 и 100, вычисленные с четырьмя значащими цифрами; на 4-ю цифру подкоренного числа, если она есть, берется поправка.

Поправку можно не брать из таблиц, а вычислить, пользуясь описанным в пункте 5 способом интерполяции.

Пример 1. Найти по таблицам (В. М. Брадиса) $\sqrt{1{,}036}$.

Решение. 1) Находим по таблицам квадратный корень из числа 1,03, наибольшего из имеющихся в таблице чисел, меньших, чем число 1,036 (или, как кратко говорят, из «ближайшего меньшего числа»):

$$\sqrt{1{,}03}=1{,}015;$$

2) находим в той же строке поправку на четвертую цифру 6: она равна 3; следовательно,

$$\sqrt{1{,}036}=1{,}018;$$

3) ту же поправку мы могли найти без таблиц с помощью интерполяции; для этого находим по таблицам квадратный корень из ближайшего большего числа 1,04:

$$\sqrt{1{,}04}=1{,}020$$

и, обозначая искомую поправку буквой x, составляем пропорцию:

$$x : 0{,}005 = 0{,}006 : 0{,}01;$$

отсюда

$$x = 0{,}005 \cdot \frac{6}{10} = 0{,}003;$$

следовательно,

$$\sqrt{1{,}036} = 1{,}015 + 0{,}003 = 1{,}018.$$

Замечание. Выполняя интерполяцию, удобно рассуждать так: если с увеличением числа 1,03 на 10 тысячных квадратный корень из этого числа увеличивается на 5 тысячных, то при увеличении числа 1,03 на 6 тысячных квадратный корень из этого числа увеличится на $\frac{6}{10}$ от 5 тысячных, т. е. на 3 тысячных; значит, поправка равна 0,003.

Все вычисление может быть расположено в виде простой таблицы, для краткой записи которой обычно пользуются знаком Δ, заменяющим слово «приращение»*. Эта таблица для рассмотренного примера имеет вид:

$$\left.\begin{array}{r|c} x & \Delta\sqrt{x} \\ \hline 0{,}01 & 0{,}005 \\ 0{,}006 & x \end{array}\right\} \quad x : 0{,}005 = 6 : 10; \qquad x = \frac{0{,}005 \cdot 6}{10} = 0{,}003.$$

Если бы надо было найти по таблицам $\sqrt{1{,}0356}$, то достаточно было бы составить такую таблицу:

$$\left.\begin{array}{r|c} x & \Delta\sqrt{x} \\ \hline 0{,}01 & 0{,}005 \\ 0{,}0056 & x \end{array}\right\} \quad x : 0{,}005 = 56 : 100; \quad x = 0{,}005 \cdot \frac{56}{100} = 0{,}0028;$$

$$\sqrt{1{,}0356} = 1{,}015 + 0{,}0028 = 1{,}0178.$$

Пример 2. Найти $\sqrt{812{,}96}$.

Решение. На основании правила перенесения запятой, выведенного в п. 4, находим сначала $\sqrt{8{,}1296}$.

$$\sqrt{8{,}1296} = 2{,}851.$$

Следовательно,

$$\sqrt{812{,}96} = 28{,}51.$$

Пример 3. Найти $\sqrt{0{,}081296}$.

Решение. Пользуясь результатом, найденным в примере 2, на основании правила о перенесении запятой получаем, что

$$\sqrt{0{,}081296} = 0{,}2851.$$

---

*Δ — греческая большая буква, носящая название «дельта»; она соответствует латинской букве *d*, которой начинается слово differentia, означающее «разность, приращение».

Пример 4. Найти $\sqrt{\frac{355}{113}}$ с точностью до 0,001.

Решение. Обращаем дробь $\frac{355}{113}$ в десятичную:

$$\frac{355}{113} = 3,1416.$$

Квадратный корень из этой дроби есть 1,772.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти квадратные корни из числа 5653 с точностью до 1, до 0,1, до 0,01, до 0,001.

Ответ. 75,186.

2. Зная, что $\sqrt{6275} = 79,215$ и $\sqrt{6276} = 79,221$, найти $\sqrt{6275,43}$ с точностью до 0,001.

Ответ. 79,218.

3. Найти квадратный корень из числа 1 018 081.

Ответ. 1009.

4. Найти квадратный корень из числа 814,5316.

Ответ. 25,54.

5. Найти квадратные корни из чисел: 0,013689; 0,00056644.

Ответы. 0,117; 0,0238.

6. Найти квадратные корни из чисел:

$$38\left(\text{до } \frac{1}{5}\right); \qquad 46\left(\text{до } \frac{1}{4}\right) \qquad 112\left(\text{до } \frac{1}{8}\right).$$

Ответы. 6 и $6\frac{1}{5}$; $6\frac{3}{4}$ и 7; $10\frac{1}{2}$ и $10\frac{5}{8}$.

7. Найти квадратные корни из чисел:

$$3\frac{5}{6};\ 0,9;\ 0,209$$

с тремя десятичными знаками.

Ответы. 1, 961; 0,949; 0,457.

8. Диаметр круга d связан с его площадью Q формулой:

$$d = 1,12838\sqrt{Q}\ .$$

Найти d, если $Q = 11,95$; 0,301; 3850.

Ответы. 3,9; 0,619; 70.

9. Площадь S треугольника связана с его полупериметром p и сторонами a, b, c формулой:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

Найти S, если $a = 136$ *м*, $b = 147$ *м*, $c = 209$ *м*.

Ответ. 9960 *м*^{2}.

10. Скорость v истечения жидкости из бокового отверстия в сосуде вычисляется по формуле Торричелли:

$$v = \sqrt{gh},$$

где g — ускорение силы тяжести $\left(981\dfrac{см}{сек^2}\right)$, а h — высота уровня жидкости над отверстием.

Найти v, если $h = 20$ *см*; 15 *см*; 10 *см*; 5 *см*.

Ответы. $198\dfrac{см}{сек}$; $172\dfrac{см}{сек}$; $140\dfrac{см}{сек}$; $99\dfrac{см}{сек}$.

11. Полный период T качания маятника связан с его длиной l формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}},$$

где g есть ускорение силы тяжести $\left(981\dfrac{см}{сек^2}\right)$, а l — длина маятника.

Найти T, если $l = 109$ *см*; $l = 150$ *см*.
Ответы. 18,84 *сек.*; 16,06 *сек.*

ВОПРОСЫ

1. Построить по точкам график зависимости $y = \sqrt{x-2}$.

Для каких значений переменной x выражение $\sqrt{x-2}$ имеет определенные значения?

Отличается ли множество всех значений выражения $\sqrt{x-2}$ от множества всех значений выражения $\sqrt{x}$?

Для каких значений переменной x значения выражений $\sqrt{x-2}$ и $\sqrt{x}$ совпадают?

С помощью какого движения можно заставить график зависимости $y = \sqrt{x-2}$ совпасть с графиком зависимости $y = \sqrt{x}$?

2. Построить по точкам график зависимости $y = \sqrt{x+3}$. Сравнить его с графиками зависимостей $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x-2}$. Какая существует связь между этими графиками?

3. Построить по точкам графики зависимостей $y = 2\sqrt{x}$ и $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$. Сравнить их с графиком зависимости $y = \sqrt{x}$. Какая существует связь между ординатами тех точек этих графиков, которые имеют одну и ту же абсциссу? Какому преобразованию надо подвергнуть ординаты точек графика $y = \sqrt{x}$, чтобы получить соответствующие тем же абсциссам ординаты точек графиков $y = 2\sqrt{x}$ и $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}$.

4. Построить графики зависимостей:

$$y = 3\sqrt{x-1} \qquad \text{и} \qquad y = \frac{1}{2}\sqrt{x+4}.$$

§ 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Двойные последовательности чисел. 1°. Последовательно находя приближенные квадратные корни из числа 2 с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001,... с недостатком и с избытком, мы можем составить две последовательности чисел:

(1) 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213;...;
(2) 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; 1,414214;... .

Эти последовательности обладают следующими тремя свойствами: 1) в последовательности (1) каждое число *больше* предыдущего числа, а в последовательности (2) каждое число *меньше* предыдущего числа, т. е.

$$1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < 1{,}4142 < 1{,}41421 < 1{,}414213 < \ldots;$$
$$1{,}5 > 1{,}42 > 1{,}415 > 1{,}4143 > 1{,}41422 > 1{,}414214 > \ldots;$$

2) каждое число последовательности (1) *меньше* соответствующего ему — по номеру занимаемого места — числа последовательности (2), т. е.

$$1{,}4 < 1{,}5;\ 1{,}41 < 1{,}42;\ 1{,}414 < 1{,}415;\ 1{,}4142 < 1{,}4143; \ldots;$$

3) разность между двумя соответствующими — по номеру занимаемого места — числами последовательностей (2) и (1) при возрастании этого номера становится и остается сколь угодно малой; в самом деле,

$$1{,}5 - 1{,}4 > 1{,}42 - 1{,}41 > 1{,}415 - 1{,}414 > 1{,}4142 - 1{,}4143 > \ldots,$$

так как $0{,}1 > 0{,}01 > 0{,}001 > 0{,}0001 > \ldots$, а числа последовательности 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ..., начиная с некоторого из них, становятся и остаются меньше всякого сколь угодно малого положительного числа.

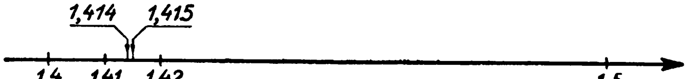
В силу свойств 1—2 числа последовательностей (1) и (2) обладают еще следующим свойством: 4) *каждое* число последовательности (1) меньше *каждого* числа последовательности (2); например:

$$1{,}414 < 1{,}415 < 1{,}42 < 1{,}5;$$
$$1{,}414 < 1{,}4142 < 1{,}4143;\ 1{,}414 < 1{,}41421 < 1{,}41422; \ldots.$$

Числа последовательностей (1) и (2) могут быть расположены в следующем порядке:

$$1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < 1{,}4142 < \ldots < 1{,}4143 < 1{,}415 < 1{,}42 < 1{,}5.$$

Поэтому точки, изображающие эти числа на числовой оси, имеют следующее расположение (черт. 3):



Черт. 3

Каждая точка, изображающая число последовательности (1), расположена слева от *каждой* точки, изображающей число последовательности (2), причем соответствующие — по номеру занимаемого места — точки неограниченно сближаются между собой, т. е. отрезок оси, определяемый этими точками, при возрастании номера занимаемого ими места становится и остается сколь угодно малым.

Последовательно находя приближенные квадратные корни из числа 3 с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001,... с недостатком и с избытком, мы можем составить две последовательности чисел:

$$1{,}7;\ 1{,}73;\ 1{,}732;\ 1{,}7320;\ 1{,}73205;\ 1{,}732050;\ 1{,}7320508;\ \dots,$$
$$1{,}8;\ 1{,}74;\ 1{,}733;\ 1{,}7321;\ 1{,}73206;\ 1{,}732051;\ 1{,}7320509;\dots,$$

обладающие теми же свойствами 1—4, что и последовательности (1) — (2), но с той разницей, что здесь в первой последовательности имеются числа, не большие предыдущего числа, а равные ему:

$$1{,}7320 = 1{,}732; \qquad 1{,}732050 = 1{,}73205.$$

Точно так же две последовательности приближенных квадратных корней из числа 6:

$$2{,}4;\ 2{,}44;\ 2{,}449;\ 2{,}4494;\ 2{,}44948;\ 2{,}449489;\ 2{,}4494897;\dots,$$
$$2{,}5;\ 2{,}45;\ 2{,}450;\ 2{,}4495;\ 2{,}44949;\ 2{,}449490;\ 2{,}4494898;\dots$$

обладают свойствами 1—4, с той разницей, что во второй последовательности имеются числа, не меньшие предыдущего числа, а равные ему:

$$2{,}450 = 2{,}45; \qquad 2{,}449490 = 2{,}44949.$$

2°. Допустим, что, последовательно выполняя измерение данного отрезка A с помощью некоторого отрезка E с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001,... с недостатком и с избытком, мы нашли, что

$$3{,}7\ E < 3{,}73E < 3{,}738\ E < \dots < A < \dots < 3{,}739\ E < 3{,}74\ E < 3{,}8\ E.$$

Тогда две последовательности чисел:

(3) $3{,}7;\ 3{,}73;\ 3{,}738;\dots,$

(4) $3{,}8;\ 3{,}74;\ 3{,}739;\dots,$

являющиеся приближенными длинами отрезка A, найденными с помощью десятичного измерения отрезка A отрезком E, будут представлять собой последовательности чисел, обладающие теми же свойствами 1—4, которыми обладают последовательности (1) и (2). А это дает право расположить числа последовательностей (3) и (4) в следующем порядке:

$$3{,}7 < 3{,}73 < 3{,}738 < \dots < 3{,}739 < 3{,}74 < 3{,}8.$$

Но могло, конечно, быть и так, что какая-либо из определяемых приближенных длин некоторого отрезка не больше или не меньше предыдущей, а равна ей; это имело бы место, например, в случае, если бы были найдены следующие последовательности приближенных длин:

$$3{,}7;\ 3{,}70;\ 3{,}704;\ 3{,}7049;\dots,$$
$$3{,}8;\ 3{,}71;\ 3{,}705;\ 3{,}7050;\dots;$$

здесь $3{,}70 = 3{,}7$; $3{,}7050 = 3{,}705$.

3°. С последовательностями такого рода, как последовательности (1)—(2) и (3)—(4), мы встречаемся уже в арифметике. Именно, обращая обыкновенную несократимую дробь, например $\frac{5}{6}$, в десятичную дробь, мы находим, что

$$\frac{5}{6} = 0{,}8(3),$$

а это значит, что

$$0{,}8 < 0{,}83 < 0{,}833 < \ldots < \frac{5}{6} < \ldots < 0{,}834 < 0{,}84 < 0{,}9.$$

Последовательности

(5) $0{,}8;\ 0{,}83;\ 0{,}833;\ 0{,}8333;\ldots,$

(6) $0{,}9;\ 0{,}84;\ 0{,}834;\ 0{,}8334;\ldots$

приближенных значений дроби $\frac{5}{6}$ с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001, до 0,0001... с недостатком и с избытком обладают свойствами 1—4.

Но последовательности (5) — (6) имеют весьма важную особенность: существует число — именно $\frac{5}{6}$, — которое находится на рубеже между числами последовательности (5) и числами последовательности (6), т. е. которое больше всех чисел последовательности (5) и меньше всех чисел последовательности (6).

4°. До сих пор мы рассматривали пары последовательностей (1) — (2), (3) — (4), (5) — (6), составленных из приближенных квадратных корней из чисел, приближенных длин отрезков и приближенных значений обыкновенных дробей с точностью до 0,1, до 0,01, до 0,001,... с недостатком и с избытком, и показали, что каждая из этих пар обладает свойствами 1 — 4.

Приведем еще некоторые примеры пар последовательностей, обладающих свойствами 1 — 4.

1) Если мы из последовательностей (1) и (2) соответственно образуем две новые последовательности:

(7) $1{,}4^2;\ 1{,}41^2;\ 1{,}414^2;\ 1{,}4142^2;\ 1{,}41421^2;\ 1{,}414213^2;\ldots,$

(8) $1{,}5^2;\ 1{,}42^2;\ 1{,}415^2;\ 1{,}4143^2;\ 1{,}41422^2;\ 1{,}414214^2;\ldots,$

то, принимая во внимание, что числа последовательностей (1) и (2) — приближенные квадратные корни из числа 2, придем к выводу, что $1{,}4^2 < 1{,}41^2 < 1{,}414^2 < 1{,}4142^2 < \ldots < 2 < \ldots 1{,}4143^2 < 1{,}415^2 < 1{,}42^2 < 1{,}5^2$, т. е. что последовательности (7) и (8) обладают свойствами 1 и 2 (стр. 28) и что существует число — именно 2, — которое находится на рубеже между числами этих последовательностей. Вместе с тем последовательности (7) и (8) обладают свойством 3 (и, следовательно, свойством 4), так как

$$1{,}5^2 - 1{,}4^2 = 2{,}9 \cdot 0{,}1 < 0{,}3;$$
$$1{,}42^2 - 1{,}41^2 = 2{,}83 \cdot 0{,}01 < 0{,}03;$$
$$1{,}415^2 - 1{,}414^2 = 2{,}2829 \cdot 0{,}001 < 0{,}003;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

т. е. разность между двумя соответствующими — по номеру занимаемого места — числами последовательностей (7) и (8) при возрастании этого номера становится и остается сколь угодно малой.

2) Выполняя сложение или умножение над соответствующими числами двух пар последовательностей, обладающих свойствами 1 — 4, мы получим новую пару последовательностей, обладающих этими свойствами.

Например, складывая соответствующие числа последовательностей (1) и (5), а затем (2) и (6), составим пару последовательностей (9) — (10):

$$(9) \qquad 2{,}2 < 2{,}24 < 2{,}247 < 2{,}2475 < \dots,$$
$$(10) \qquad \dots < 2{,}2477 < 2{,}249 < 2{,}26 < 2{,}4,$$

явно обладающих свойствами 1 — 4.

3) Точно так же, перемножая те же числа, составим пару последовательностей (11) — (12):

$$(11) \qquad 1{,}12 < 1{,}1703 < 1{,}177862 < 1{,}17845286 < \dots,$$
$$(12) \qquad \dots < 1{,}17867762 < 1{,}180110 < 1{,}1928 < 1{,}35.$$

явно обладающих свойствами 1, 2 и 4 и, как будет доказано дальше (стр. 44) в общем виде, также свойством 3; пока же выведем это заключение из наблюдения того факта, что разности соответствующих чисел этих последовательностей имеют значения:

$$0{,}23;\ 0{,}0225;\ 0{,}002248;\ 0{,}00022476, \dots,$$

соответственно меньшие, чем числа последовательности

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001; \dots$$

4) В алгебре имеется раздел, в котором изучаются выражения вида

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\dots}}}}, \qquad (\alpha)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, $a_5, \dots$ — целые положительные числа, обычно задаваемые каким-либо правилом (законом).

Эти выражения называются **непрерывными** или **цепными** дробями.

Например, непрерывными дробями являются выражения:

$$1)\ 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}; \quad 2)\ 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\dots}}}; \quad 3)\ 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{8+\dots}}},$$

закон составления каждой из них ясен.

Из непрерывной дроби (α) могут быть последовательно выделены дроби

$$\frac{a_1}{1};\quad a_1+\frac{1}{a_2};\quad a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}};\quad a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}};\ \dots,$$

которые после выполнения указанных действий принимают вид обыкновенных дробей; эти обыкновенные дроби называются подходящими дробями непрерывной дроби (α).

Например, непрерывная дробь 1) имеет подходящие дроби:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{5}{3},\ \ldots;$$

непрерывная дробь 2) имеет подходящие дроби:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{10}{7},\quad \frac{43}{30},\ \ldots;$$

непрерывная дробь 3) имеет подходящие дроби:

$$\frac{2}{1},\quad \frac{9}{4},\quad \frac{56}{25},\quad \frac{457}{204},\ \ldots.$$

Эти результаты мы получили с помощью непосредственного вычисления. Однако в теории непрерывных дробей доказывается, что для вычисления всех подходящих дробей непрерывной дроби (α) достаточно непосредственно найти первую и вторую подходящие дроби, а следующие подходящие дроби вычислять по правилу: числитель n-й подходящей дроби равен числителю предыдущей подходящей дроби, умноженной на a_n, плюс числитель предпредыдущей подходящей дроби, а знаменатель n-й подходящей дроби равен знаменателю предыдущей подходящей дроби, умноженному на a_n, плюс знаменатель предпредыдущей подходящей дроби.

Например, числители и знаменатели 3-й, 4-й,... подходящих дробей непрерывной дроби 2) составляются так:

$$3\cdot 3+1=10,\ 10\cdot 4+3=43,\ 43\cdot 5+10=225,\ 225\cdot 6+43=1393,\ldots;$$

$$2\cdot 3+1=7,\ 7\cdot 4+2=30,\ 30\cdot 5+7=157,\ 157\cdot 6+30=972,\ldots.$$

Пользуясь этим правилом, составим несколько первых подходящих дробей непрерывной дроби (1):

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \ldots.$$

Если теперь мы выпишем по порядку сначала дроби, стоящие на нечетных местах (или, как говорят, дроби нечетного порядка), а затем дроби, стоящие на четных местах (или дроби четного порядка) то получим две последовательности:

$$(13)\qquad \frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{8}{5},\ \frac{21}{13},\ \frac{55}{34},\ \ldots,$$

$$(14)\qquad \frac{2}{1},\ \frac{5}{3},\ \frac{13}{8},\ \frac{34}{21},\ \frac{89}{55},\ \ldots,$$

обладающие свойствами 1 — 2 (стр. 28).

В самом деле, легко подсчитать, что

$$\frac{1}{1} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{21}{13} < \frac{55}{34} < \ldots,$$

$$\frac{2}{1} > \frac{5}{3} > \frac{13}{8} > \frac{34}{21} > \frac{89}{55} > \ldots$$

и что

$$\frac{1}{1} < \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2} < \frac{5}{3}, \quad \frac{8}{5} < \frac{13}{8}, \quad \frac{21}{13} < \frac{34}{21}, \quad \frac{55}{34} < \frac{89}{55}, \ldots;$$

ввиду этого последовательности (13) и (14) обладают также свойством 4 (стр. 28), так что

$$\frac{1}{1} < \frac{3}{2} < \frac{8}{5} < \frac{21}{13} < \frac{55}{34} < \ldots < \frac{89}{55} < \frac{34}{21} < \frac{13}{8} < \frac{5}{3} < \frac{2}{1}.$$

Наконец, находя разности между соответствующими числами последовательностей (13) и (14)

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{1 \cdot 1}; \quad \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3 \cdot 2}; \quad \frac{13}{8} - \frac{8}{5} = \frac{1}{8 \cdot 5}; \quad \frac{34}{21} - \frac{21}{13} = \frac{1}{21 \cdot 13}; \ldots,$$

замечаем, что они быстро убывают; в теории непрерывных дробей доказывают, что они неограниченно убывают, стремясь к нулю. Таким образом, последовательности (13) и (14) обладают также свойством 3 (стр. 28).

К тем же выводам мы придем, если исследуем последовательности подходящих дробей нечетного и четного порядка, составленные для любых непрерывных дробей.

5°. Мы рассмотрели пары последовательностей (1) — (2), (3) — (4), (5) — (6), (7) — (8), (9) — (10), (11) — (12), (13 — 14); каждая из этих пар последовательностей обладает следующими свойствами:

1) в первой из двух последовательностей каждое число больше предыдущего числа (или равно ему), а во второй из двух последовательностей каждое число меньше предыдущего (или равно ему);

2) каждое число первой последовательности меньше соответствующего ему — по номеру занимаемого места — числа второй последовательности;

3) разность между двумя соответствующими — по номеру занимаемого места — числами первой и второй последовательностей при возрастании этого номера становится и остается сколь угодно малой;

4) каждое число первой последовательности меньше каждого числа второй последовательности.

Определение 1. Система двух последовательностей, обладающих свойствами 1—4, называется двойной последовательностью. Последовательности, из которых составлена двойная последовательность, называются соответственно нижней и верхней последовательностью.

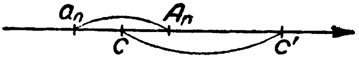
Для двойной последовательности, составленной из последовательностей $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ и $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ мы введем обозначение (a_n, A_n), а сами числа мы будем называть **членами** двойной последовательности.

Очевидно, что если (a_n, A_n) есть двойная последовательность, то последовательности промежутков

$$(a_1, A_1), (a_2, A_2), (a_3, A_3), \ldots$$

соответствует на числовой оси последовательность вложенных один в другой отрезков этой оси, неограниченно убывающих по длине.

6°. Двойные последовательности (5) — (6) и (7) — (8) имеют ту особенность, что на рубеже между числами нижней и числами верхней последовательности находится некоторое число.



Черт. 4

Докажем, что если на рубеже между нижней и верхней последовательностями какой-либо двойной последовательности находится некоторое число c, то никакое другое число c' уже не может находиться на рубеже между теми же последовательностями.

В самом деле, если бы такое второе число c' существовало и было расположено на числовой оси, например справа от числа c (черт. 4), то можно было бы найти такие два соответствующих по номеру числа a_n и A_n данной двойной последовательности, которые находились бы одно от другого и, следовательно, от числа c на расстоянии меньшем, чем $c' - c$; но тогда оказалось бы, что существует такое число A_n верхней последовательности, которое расположено левее, чем число c', что противоречит понятию о числе, находящемся на рубеже между двумя последовательностями, составляющими данную двойную последовательность.

Определение 2. Если (a_n, A_n) есть двойная последовательность и если существует число a, удовлетворяющее соотношению

$$a_n < a < A_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то говорят, что двойная последовательность (a_n, A_n) определяет число a.

Таким образом, двойная последовательность (5) — (6) определяет число $\frac{5}{6}$, а двойная последовательность (7) — (8) — число 2.

Очевидно, что если двойная последовательность (a_n, A_n) определяет число a, то число a находится внутри последовательности вложенных один в другой промежутков

$$(a_1, A_1), (a_2, A_2), (a_3, A_3), \ldots,$$

неограниченно убывающих по длине, или, как говорят, стягивающихся к числу a.

Если этому числу a соответствует на числовой оси точка A, то она является единственной общей точкой всех вложенных один в другой отрезков, соответствующих указанным промежуткам; это следует из того, что наличие еще одной общей точки A' указанной последовательности отрезков повлекло бы за собой наличие еще одного числа a', определяемого двойной последовательностью (a_n, A_n), что, как доказано выше, невозможно.

7°. Возникает вопрос, не определяет ли и двойная последовательность (1) — (2) какого-либо числа. Докажем, что это не имеет места.

В самом деле, допустим, что существует число, которое находится на рубеже между числами последовательности (1) и числами последовательности (2); это число должно быть заключено между числами 1,4 и 1,5 и, следовательно, может быть только дробным; пусть это будет некоторая несократимая дробь $\frac{m}{n}$.

Из сделанного предположения следует, что

$$1,4<1,41<1,414<1,4142<\ldots<\frac{m}{n}<\ldots<1,4143<1,415<1,42<1,5.$$

Отсюда следует, что и

$$1,4^2<1,41^2<1,414^2<1,4142^2<\ldots<\left(\frac{m}{n}\right)^2<\ldots<1,4143^2<1,415^2<$$

$<1,42^2<1,5^2$, т. е. что на рубеже между числами последовательности (7) и числами последовательности (8) находится не только число 2, но и число $\left(\frac{m}{n}\right)^2$.

Но число $\left(\frac{m}{n}\right)^2$ отлично от числа 2, так как несократимая дробь $\frac{m^2}{n^2}$ не может быть равна целому числу 2. Ввиду этого оказывается, что двойная последовательность (7) — (8) определяет два неравных числа, что невозможно. Противоречие, к которому мы пришли, заставляет отвергнуть сделанное допущение, т. е. числа, которое находилось бы на рубеже между числами последовательности (1) и числами последовательности (2), не существует.

8°. Последовательности (3) и (4) мы получили в результате измерения данного отрезка A с помощью отрезка E. При этом относительно соизмеримости или несоизмеримости отрезков A и E мы не делали никаких предположений.

Теперь рассмотрим тот случай, когда отрезки A и E несоизмеримы. Докажем, что при этом условии не существует числа, которое находилось бы на рубеже между числами последовательности (3) и числами последовательности (4).

В самом деле, пусть дробное число $\frac{m}{n}$ находится на рубеже между числами последовательности (3) и числами последовательности (4), т. е. пусть имеют место неравенства:

$$3{,}7<3{,}73<3{,}738<\ldots<\frac{m}{n}<\ldots<3{,}739<3{,}74<3{,}8.$$

Но тогда будут иметь место также неравенства между отрезками:

$$3{,}7\,E<3{,}73\,E<3{,}738\,E<\ldots<\frac{m}{n}\,E<\ldots<3{,}739\,E<3{,}74\,E<3{,}8\,E.$$

С другой стороны, как мы видели (п. 2°), имеют место неравенства:

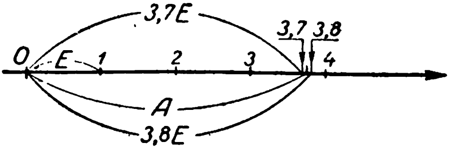
$$3{,}7\,E<3{,}73\,E<3{,}738\,E<\ldots<A<\ldots<3{,}739\,E<3{,}74\,E<3{,}8\,E.$$

Таким образом, при сделанном предположении оказывается (черт. 5), что на рубеже между последовательностью отрезков

(3′) $3{,}7\,E;\ 3{,}73\,E;\ 3{,}738\,E;\ldots$

и последовательностью отрезков

(4′) $3{,}8\,E;\ 3{,}74\,E;\ 3{,}739\,E;\ldots$



Черт. 5

одновременно находятся отрезки $\frac{m}{n}\,E$ и A; но последовательности (3′) и (4′) составляют двойную последовательность отрезков; следовательно (п. 6°), на рубеже между ними может находиться только один отрезок, т. е.

$$A=\frac{m}{n}\,E,$$

а это обозначает, что отрезок A соизмерим с отрезком E. Мы пришли к противоречию. Следовательно, допущение, что при несоизмеримости отрезков A и E на рубеже между последовательностями (3) и (4) находится некоторое число, необходимо отвергнуть.

Иначе говоря, при несоизмеримости отрезков A и E двойная последовательность, составленная из приближенных длин с недостатком и с избытком, найденных путем десятичного измерения отрезка A отрезком E, не определяет никакого числа (определение 2).

9°. Согласно доказанному в пункте 6° каждая двойная последовательность может определять только одно рациональное число.

Обратное утверждение не имеет места. Для каждого рационального числа a можно построить сколько угодно определяющих его двойных последовательностей. Так, если число a определяется двойной последовательностью (a_n, A_n), то и каждая из двойных последовательностей:

$$\left(a_n-\frac{1}{n},\ A_n+\frac{1}{n}\right),\ \left(a_n-\frac{1}{2^n},\ A_n+\frac{1}{2^n}\right),\ \left(a_n-\frac{1}{10^n},\ A_n+\frac{1}{10^n}\right),$$

где $n=1, 2, 3,\ldots$, определяет то же число a.

Например, число $\frac{5}{6}$ определяется не только двойной последовательностью (5) — (6), но и двойной последовательностью

$$0{,}7<0{,}82<0{,}832<0{,}8332<\ldots<0{,}8335<0{,}835<0{,}85<1,$$

представляющей собой по отношению к двойной последовательности (5) — (6) двойную последовательность вида:

$$\left(a_n-\frac{1}{10^n},\quad A_n+\frac{1}{10^n}\right).$$

10°. Очевидно, что если мы в каждой из последовательностей a_1, a_2, $a_3, \ldots, a_n, \ldots$ и A_1, A_2, A_3, ..., $A_n, \ldots$, составляющих двойную последовательность (a_n, A_n), опустим одно и то же конечное число k первых членов, то полученные последовательности

$$a_{k+1},\ a_{k+2},\ a_{k+3}, \ldots, a_n, \ldots \text{ и } A_{k+1},\ A_{k+2},\ A_{k+3}, \ldots, A_n, \ldots$$

также составят двойную последовательность.

При этом, если двойная последовательность (a_n, A_n) определяет число a, то новая двойная последовательность определяет то же число a.

Это следует из того, что

$$a_{k+1}<a_{k+2}<a_{k+3}<\ldots<a_n<\ldots<a<\ldots<A_n<\ldots<A_{k+3}<A_{k+2}<A_{k+1},$$

причем разность $A_n - a_n$ при возрастании номера n становится и остается сколь угодно малой.

Рассматриваемый факт приобретет полную наглядность, если принять во внимание, что число a находится внутри бесконечного множества вложенных один в другой промежутков

$$(a_1, A_1),\ (a_2, A_2),\ (a_3, A_3), \ldots, (a_n, A_n), \ldots,$$

неограниченно убывающих по длине, или, как говорят, стягивающихся к числу a, и что для определения положения точки a на числовой оси любое конечное число k первых промежутков можно не принимать во внимание.

Поэтому, если, например, первые k членов нижней последовательности, принадлежащей двойной последовательности (a_n, A_n) — отрицательные числа, а член a_{k+1} — положительное число, т. е.

$$a_1<a_2<a_3<\ldots<a_k<0<a_{k+1}<a_{k+2}<\ldots,$$

то, опуская эти отрицательные и соответствующие им положительные члены A_1, A_2, $A_3, \ldots, A_k$, можно двойную последовательность (a_n, A_n) заменить двойной последовательностью, имеющей только положительные члены и определяющей то же число, что и заменяемая двойная последовательность (a_n, A_n).

Точно так же, если первые k членов верхней последовательности, принадлежащей двойной последовательности (a_n, A_n), — положительные числа, а член A_{k+1} — отрицательное число, т. е.

$$A_1>A_2>A_3>\ldots>A_k>0>A_{k+1}>A_{k+2}>\ldots,$$

то, опуская эти положительные члены и соответствующие им отрицательные члены a_1, a_2, a_3,...,a_k, можно двойную последовательность (a_n, A_n) заменить двойной последовательностью, имеющей только отрицательные члены и определяющей то же число, что и заменяемая двойная последовательность (a_n, A_n).

2. Понятие об иррациональном числе.

Определение 3. Если двойная последовательность (a_n, A_n) не определяет никакого рационального числа, то, исходя из того лагорифма (правила, закона, процесса), с помощью которого найдены члены a_n и A_n составляющих ее последовательностей, образуют некоторую бесконечную непериодическую десятичную дробь и рассматривают ее как число, определяемое данной двойной последовательностью, т. е. как число, занимающее место на рубеже между членами составляющих ее последовательностей*.

1) Так, двойная последовательность (1) — (2)

$$1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < 1{,}4142 < \ldots < 1{,}4143 < 1{,}415 < 1{,}42 < 1{,}5,$$

получаемая в результате нахождения приближенных квадратных корней из числа 2, определяет бесконечную непериодическую десятичную дробь 1,4142..., каждый десятичный знак которой может быть найден путем достаточного продолжения процесса нахождения чисел нижней последовательности.

2) Двойная последовательность (3) — (4)

$$3{,}7 < 3{,}73 < 3{,}738 < \ldots < 3{,}739 < 3{,}74 < 3{,}8,$$

получаемая в результате десятичного измерения отрезка A с помощью отрезка E, в том случае, если отрезки A и E несоизмеримы, определяет бесконечную непериодическую десятичную дробь 3,738..., каждый десятичный знак которой может быть найден путем достаточного продолжения процесса десятичного измерения отрезка A с помощью отрезка E.

3) Двойная последовательность (9) — (10) (стр. 31) определяет бесконечную непериодическую десятичную дробь 2,247. ., а двойная последовательность (11) — (12) (стр. 31) определяет бесконечную непериодическую десятичную дробь 1,178 ...

4) Для того чтобы найти бесконечную непериодическую десятичную дробь, определяемую двойной последовательностью (13) — (14), заменим все члены последовательности (13) их десятичными приближениями с недостатком с точностью до 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$,..., а все члены последовательности (14) — их десятичными приближениями с избытком с теми же степенями точности. Этим путем мы получим две последовательности:

$$(13') \qquad 1 < 1{,}5 < 1{,}60 < 1{,}615 < 1{,}6176 < \ldots,$$

$$(14') \qquad 2 > 1{,}7 > 1{,}63 > 1{,}620 > 1{,}6182 > \ldots,$$

---

* Из того, что $a_n < \alpha < A_n$, следует, что α есть единственное число, определяемое двойной последовательностью (a_n, A_n) (ср. п. 6° на стр. 34).

которые образуют двойную последовательность, определяющую бесконечную непериодическую десятичную дробь 1,61... .

Эта дробь, находясь на рубеже между членами последовательности (13′) и членами последовательности (14′), находится на рубеже между членами последовательности (13) и членами последовательности (14), так как промежутки

$$(1;\ 2),\quad \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{3}\right),\quad \left(\frac{8}{5};\ \frac{13}{8}\right),\quad \left(\frac{21}{13};\ \frac{34}{21}\right),\quad \left(\frac{55}{34};\ \frac{89}{55}\right), \ldots$$

находятся соответственно внутри промежутков

$$(1;\ 2),\ (1{,}5;\ 1{,}7),\ (1{,}60;\ 1{,}63),\ (1{,}615;\ 1{,}620),\ (1{,}6176;\ 1{,}6182) \ldots,$$

а эта последовательность промежутков стягивается к числу 1,61... . Следовательно, мы можем сказать, что и двойная последовательность (13) — (14) определяет бесконечную непериодическую дробь 1,61... . Тот факт, что двойная последовательность (13) — (14), составленная из подходящих дробей бесконечной непрерывной дроби, не определяет никакого рационального числа, доказывается в теории непрерывных дробей.

Точно так же можно поступить во всех случаях, когда членами двойной последовательности служат рациональные числа.

5) В курсе геометрии доказывается, что периметры

(15) $$p_6,\ p_{12}, p_{24},\ \ldots,\ p_{3\cdot 2^n}, \ldots$$

правильных вписанных в данную окружность многоугольников, имеющих 6, 12, 24, ..., $3\cdot 2^n$, ... сторон, и периметры

(16) $$P_6\ P_{12},\ P_{24},\ \ldots,\ P_{3\cdot 2^n},\ \ldots$$

правильных описанных около этой окружности многоугольников с тем же числом сторон представляют собой две последовательности, обладающие свойствами 1 — 3 (и, следовательно, свойством 4), т. е. что

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < \cdots < p_{3\cdot 2^n} \ldots < P_{3\cdot 2^n} < \cdots < P_{24} < P_{12} < P_6,$$

причем разность $P_{3\cdot 2^n} - p_{3\cdot 2^n}$ между двумя соответствующими — — по номеру n занимаемого места — числами последовательностей (15) и (16) при возрастании этого номера становится и остается сколь угодно малой.

Для того чтобы найти бесконечную непериодическую десятичную дробь, определяемую двойной последовательностью (15) — (16), заменим все члены последовательности (15) их десятичными приближениями с недостатком с точностью до 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ..., а все члены последовательности (16) — их десятичными приближениями с избытком с теми же степенями точности. Этим путем мы получим две последовательности (15′) и (16′), которые образуют двойную последовательность (15′) — (16′), определяющую некоторую бесконечную непериодическую десятичную дробь α. Эта дробь, находясь на рубеже между членами последовательности (15′) и членами последовательности (16′), находится на рубеже между членами последовательности (15) и членами последовательности (16).

Следовательно, двойная последовательность (15) — (16) определяет ту же бесконечную непериодическую дробь α.

Тот факт, что двойная последовательность (15) — (16) не определяет никакого рационального числа, следует из факта несоизмеримости окружности с ее диаметром.

Каждая бесконечная периодическая десятичная дробь, как известно, представляет собой некоторое рациональное число.

Определение 4. Каждая бесконечная непериодическая десятичная дробь, определяемая некоторой двойной последовательностью, называется иррациональным числом.

Каждое число нижней последовательности и каждое число верхней последовательности некоторой двойной последовательности, определяющей иррациональное число, называется приближенным значением этого иррационального числа (соответственно с недостатком и с избытком).

Если все числа каждой из двух последовательностей, которые составляют двойную последовательность, определяющую иррациональное число α, положительные, то число α называется положительным иррациональным числом; если же все эти числа отрицательные, то число α называется отрицательным иррациональным числом.

Если α есть число, определяемое двойной последовательностью a_n, A_n), то число, определяемое двойной последовательностью ($-A_n$, $-a_n$), называется числом, противоположным) числу α и обозначается через $-\alpha$.

Если (b_n, B_n) есть двойная последовательность, составленная из последовательности отрицательных чисел ($b_n < 0$) и последовательности положительных чисел ($B_n > 0$), то эта двойная последовательность определяет число 0, так как

$$b_n < 0 < B_n.$$

Обратно, число 0 может определяться либо двойной последовательностью (0,0), все члены которой — нули, либо двойной последовательностью (b_n, B_n), члены которой удовлетворяют неравенствам $b_n < 0 < B_n$.

Абсолютным значением числа α, определяемого двойной последовательностью (a_n, A_n,), называется:

1) число α, если α — положительное число;
2) число $-\alpha$, если α — отрицательное число;
3) число 0, если α — нуль.

Множество всех рациональных и иррациональных чисел называется множеством вещественных (или действительных) чисел. Таким образом, термин «вещественное число» есть общее название для всех рациональных и иррациональных чисел.

Известно, что каждое дробное число, не сводящееся к целому числу, может быть представлено в виде десятичной дроби — конечной или бесконечной периодической. Но если мы каждое целое число и каждую конечную десятичную дробь будем представлять в виде бесконечной десятичной дроби, приписывая к ним справа бесконечную последовательность нулей:

$$24 = 24{,}000\ldots; \qquad 1{,}63 = 1{,}63000\ \ldots,$$

то окажется, что каждое вещественное число может быть представлено в виде бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби*.

3. Геометрическое изображение вещественного числа. С введением иррациональных чисел результат измерения каждого отрезка A с помощью отрезка E, — независимо от того, соизмеримы или несоизмеримы отрезки A и E, — может быть выражен некоторым положительным вещественным числом. Это вещественное число называется длиной отрезка A, измеренного с помощью отрезка E, или отношением отрезка A к отрезку E.

Ввиду этого каждой точке P оси $X'OX$, на которой точка O принята за начало и отрезок OE — за единицу измерения, соответствует некоторое положительное или отрицательное вещественное число a, абсолютное значение которого указывает длину отрезка OP и знак которого указывает положение точки относительно начала O.

Определение 5. Вещественное число a, абсолютное значение которого при выбранном масштабе равно расстоянию точки P оси от ее начала O (т. е. длине отрезка OP) и знак которого есть $+$ (плюс) или $-$ (минус) в зависимости от того, расположена ли точка P в положительном или отрицательном направлении от начала O, называется абсциссой точки P.

Обратно, если a есть положительное или отрицательное вещественное число, определяемое двойной последовательностью (a_n, A_n), то на оси $X'OX$, имеющей начало O и единичный отрезок OE, ему соответствует одна и только одна точка P, именно та точка, которая находится на рубеже между последовательностью точек, соответствующих числам нижней последовательности, и последовательностью точек, соответствующих числам верхней последовательности**.

Например, если a есть вещественное число, определяемое двойной последовательностью

$$3{,}1 < 3{,}14 < 3{,}141 < 3{,}1415 < \ldots < 3{,}1416 < 3{,}142 < 3{,}15 < 3{,}2,$$

то числу a соответствует точка P, находящаяся на рубеже между концами отрезков

$$3{,}1E;\ 3{,}14E;\ 3{,}141E;\ 3{,}1415E;\ldots$$

---

[*] Конечно, числа 24 и 1,63 можно также представить в виде 23,999... и 1,62999..., но от этого второго способа представления мы раз навсегда откажемся.

[**] Если a есть рациональное число $\frac{m}{n}$, то отрезок OP составляет $\frac{m}{n}$ отрезка OE. Если же a есть иррациональное число, то существование точки P принимается без доказательства (аксиома о стягивающейся последовательности отрезков).

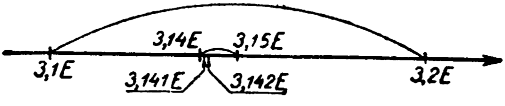
и концами отрезков

$$3{,}2E;\ 3{,}15E;\ 3{,}142E;\ 3{,}1416E,\ \ldots,$$

обладающих тем свойством, что разности между соответствующими отрезками

$$3{,}2E-3{,}1E;\ 3{,}15E-3{,}14E;\ 3{,}142E-3{,}141E;\ 3{,}1416E-3{,}1415E,\ldots$$

делаются и остаются сколь угодно малыми (черт. 6):



Черт. 6

4. Сравнение вещественных чисел. Равенство и неравенство двух положительных бесконечных десятичных дробей a и b устанавливается с помощью следующих определений:

1) Числа a и b называются равными, если у них совпадают как целые части, так и все десятичные знаки, находящиеся вправо от запятой.

2) Если целые части чисел a и b различны, то бóльшим из них называется то, у которого целая часть больше, а меньшим то, у которого целая часть меньше.

3) Если целые части чисел a и b одинаковы, то для того, чтобы определить, которое из них больше, надо найти первые после запятой десятичные знаки, которые у этих чисел различны. То из чисел a и b, у которого первый несовпадающий знак обозначает большее число, называется большим, а то, у которого этот знак обозначает меньшее число, называется меньшим (независимо от того, каковы их дальнейшие десятичные знаки).

Если сравниваемые числа a и b мы представим в виде

$$a = A,\ a_1\ a_2\ a_3\ldots, \qquad b = B,\ b_1\ b_2\ b_3\ldots,$$

где A и B — их целые части, а a_1, a_2, a_3,.. , b_1, b_2, b_3,... — их десятичные знаки, то определения 2 и 3 можно будет записать так:

$a > b$,

если $A > B$, или

если $A = B$, но $a_1 > b_1$, или

если $A = B$, $a_1 = b_1$, но $a_2 > b_2$ и т. д.

Из этого определения следует, что каждая бесконечная десятичная дробь больше каждого из своих приближенных значений с недостатком и меньше каждого из своих приближенных значений с избытком. В самом деле,

$$1{,}414 < 1{,}414\ldots < 1{,}415,$$

ибо

$$1{,}414 = 1{,}414000\ldots; \qquad 1{,}415 = 1{,}415000\ldots.$$

Таким образом, с установленными определениями неравенства вещественных чисел в полном соответствии находится принятое нами (в п. 2) соглашение рассматривать каждую бесконечную непериодическую десятичную дробь как число, определяемое некоторой двойной последовательностью, т. е. находящееся на рубеже между ее нижней и верхней последовательностями.

Установленные определения 1—3 равенства и неравенства вещественных чисел представляют собой распространение на область всех вещественных чисел геометрического признака равенства и неравенства рациональных чисел, а именно: из двух чисел a и b бо́льшим считается то, которому на числовой оси соответствует точка, расположенная вправо от точки, соответствующей другому числу.

5. Действия над вещественными числами.

1°. *Сложение.* Пусть $a = 3{,}1415\ldots$, $b = 2{,}7182\ldots$

Тогда имеют место неравенства:

$$(1)\quad 3{,}1 < 3{,}14 < 3{,}141 < 3{,}1415 < \ldots < 3{,}1416 < 3{,}142 < 3{,}15 < 3{,}2;$$

$$(2)\quad 2{,}7 < 2{,}71 < 2{,}718 < 2{,}7182 < \ldots < 2{,}7183 < 2{,}719 < 2{,}72 < 2{,}8.$$

Почленно складывая их, найдем, что

$$5{,}8 < 5{,}85 < 5{,}859 < 5{,}8597 < \ldots < 5{,}8599 < 5{,}861 < 5{,}87 < 6{,}0.$$

Кроме того, разности соответствующих членов этих двух последовательностей имеют значения:

$$0{,}2;\ 0{,}02;\ 0{,}002;\ 0{,}0002, \ldots,$$

которые становятся и остаются сколь угодно малыми.

Вообще, если мы обозначим через a_n и A_n n-е члены последовательности (1), а через b_n и B_n — n-е члены последовательности (2), то найдем, что

$$(A_n + B_n) - (a_n + b_n) = (A_n - a_n) + (B_n - b_n);$$

но при возрастании номера n разности $(A_n - a_n)$ и $(B_n - b_n)$ и, следовательно, их суммы становятся и остаются сколь угодно малыми.

Путем сложения соответственных десятичных приближений чисел a и b мы получили две новые последовательности, образующие двойную последовательность (п. 1,5°) и, следовательно, определяющие некоторое вещественное число s (п. 2). Это число и называется **суммой** чисел a и b:

$$s = a + b.$$

Число s может быть обозначено бесконечной десятичной дробью $5{,}859\ldots$; в ней после запятой выписаны те десятичные знаки, которые выявились как общие в последних найденных десятичных приближениях суммы s.

Определение 1. Если числа a и b определяются соответственно двойными последовательностями (a_n, A_n) и (b_n, B_n), то число s, определяемое двойной последовательностью $(a_n + b_n, A_n + B_n)$, называется **суммой** чисел a и b.

Под суммой

$$a + b + c$$

трех чисел понимают, как и при сложении трех рациональных чисел, сумму $(a+b)+c$.

Точно так же

$$a+b+c+d = [(a+b)+c]+d$$

и т. д.

Из способа нахождения суммы двух вещественных чисел явно следует, что сложение вещественных чисел обладает свойствами переместительности и сочетательности.

2°. *Умножение.* Пусть

$$a = 3{,}1415\ldots,\quad b = 2{,}7182\ldots\ .$$

Тогда имеют место неравенства:

(3) $3{,}1 < 3{,}14 < 3{,}141 < 3{,}1415 < \ldots < 3{,}1416 < 3{,}142 < 3{,}15 < 3{,}2;$

4) $2{,}7 < 2{,}71 < 2{,}718 < 2{,}7182 < \ldots < 2{,}7183 < 2{,}719 < 2{,}72 < 2{,}8.$

Почленно перемножая их, найдем, что

$$8{,}37 < 8{,}5094 < 8{,}537238 < 8{,}53922530 < \ldots$$
$$\ldots < 8{,}53981128 < 8{,}543098 < 8{,}5680 < 8{,}96.$$

Кроме того, разности соответствующих членов этих двух последовательностей имеют значения:

$$0{,}59;\ 0{,}0586;\ 0{,}005860;\ 0{,}00058598,\ldots$$

соответственно меньшие, чем члены последовательности 1; 0,1; 0,01; 0,001... .

Вообще, если мы обозначим через a_n и A_n n-е члены последовательности (3), а через b_n и B_n — n-е члены последовательности (4), то найдем, что

$$A_nB_n - a_nb_n = (A_n - a_n)B_n + (B_n - b_n)a_n < (A_n - a_n)B_1 + (B_n - b_n)A_1;$$

но при возрастании номера n разности $(A_n - a_n)$ и $(B_n - b_n)$ и, следовательно, как произведения

$$(A_n - a_n)B_1 \text{ и } (B_n - b_n)A_1,$$

так и их сумма становятся и остаются сколь угодно малыми.

Путем умножения соответственных десятичных приближений чисел a и b мы получили две новые последовательности, образующие двойную последовательность (п. $1{,}5^c$) и, следовательно, определяющие некоторое вещественное число p (п. 2). Это число и называют **произведением** чисел a и b:

$$p = a \cdot b.$$

Число p может быть обозначено бесконечной десятичной дробью 8,539...; в ней после запятой выписаны те десятичные знаки, которые выявились как общие в последних найденных десятичных приближениях произведения p.

Определение 2. Если a и b — положительные числа, определяемые соответственно двойными последовательностями (a_n, A_n) (и (b_n, B_n), то число p, определяемое двойной последовательностью $(a_n\, b_n,\ A_n\, B_n)$, называется **произведением** чисел a и b.

Если a и b — отрицательные числа, то произведением чисел a и b называется произведение абсолютных значений этих чисел, т. е. число $|a| \cdot |b|$.

Если a и b — числа разных знаков, то произведением чисел a и b называется число, противоположное произведению абсолютных значений этих чисел, т. е. число $-|a| \cdot |b|$.

Если одно, по крайней мере, из чисел a и b есть 0, то за произведение этих чисел принимают число 0.

Из этих определений следует, что если произведение двух чисел есть 0, то один, по крайней мере, из сомножителей есть 0, так как в противном случае произведение не могло бы быть нулем.

Под произведением

$$abc$$

трех чисел понимают, как и при умножении трех рациональных чисел, произведение

$$(ab) \cdot c.$$

Точно так же

$$abcd = [(ab)c]d$$

и т. д.

Из способа нахождения произведения двух вещественных чисел явно следует, что умножение вещественных чисел обладает свойствами переместительности, сочетательности и распределительности относительно сложения.

3°. *Возведение в степень.*

Возведение вещественного числа a в степень с целым положительным показателем m определяется так же, как и возведение в эту степень рационального числа.

Определение 3. Если a — вещественное число, а m есть целое положительное число, то число, представляющее собою произведение m сомножителей, каждый из которых есть число a, называется m-й **степенью** числа a, т. е. $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{m}$.

Для m-й степени числа a установлено обозначение a^m.

Следствие 1. Если основание степени есть положительное число a, определяемое двойной последовательностью $(a_n,\ A_n)$, а m есть целое положительное число, то степень a^m определяется двойной последовательностью $(a_n^m,\ A_n^m)$.

Следствие 2. Так как определение понятия о целой положительной степени вещественного числа совпадает с определением понятия о целой положительной степени рационального числа, то теоремы

$$1)\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad 2)\ a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m > n),$$

$$3)\ (ab)^m = a^m \cdot b^m, \quad 4)\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad 5)\ (a^m)^n = a^{mn},$$

основанные на этом определении, имеют место и для того случая, когда a и b — любые вещественные числа.

В частности,

$$a^2 = a \cdot a.$$

Если число a есть бесконечная непериодическая десятичная дробь 1,414..., определяемая двумя последовательностями приближенных квадратных корней из числа 2 (с недостатком и с избытком), т. е. если

$$1{,}4 < 1{,}41 < 1{,}414 < 1{,}4142 < \ldots < 1{,}414\ldots < \ldots$$
$$\ldots < 1{,}4143 < 1{,}415 < 1{,}42 < 1{,}5,$$

то, согласно следствию 1, имеют место неравенства:

$$1{,}4^2 < 1{,}41^2 < 1{,}414^2 < 1{,}4142^2 < \ldots < (1{,}414\ \ldots)^2 < \ldots$$
$$\ldots < 1{,}4143^2 < 1{,}415^2 < 1{,}42^2 < 1{,}5^2.$$

Но, с другой стороны, две последовательности квадратов приближенных квадратных корней из числа 2 (с недостатком и с избытком) составляют двойную последовательность, определяющую число 2. Следовательно (п. 1,6°),

$$(1{,}414\ldots)^2 = 2.$$

Таким образом, бесконечная десятичная дробь 1,414... есть как раз то число, квадрат которого равен числу 2.

4°. *Основное свойство числа* 0. Пусть число α определяется двойной последовательностью (a_n, A_n), а число 0 — двойной последовательностью (b_n, B_n). Тогда будут иметь место неравенства:

$$a_n < \alpha < A_n, \qquad b_n < 0 < B_n.$$

Так как

$$b_n < 0, \quad B_n > 0,$$

то

$$a_n + b_n < a_n < \alpha < A_n < A_n + B_n.$$

Следовательно, двойная последовательность $(a_n + b_n,\ A_n + B_n)$, определяющая число $\alpha + 0$, определяет вместе с тем число α.

Поэтому

$$\alpha + 0 = \alpha.$$

5°. *Основное свойство числа* 1. Пусть положительное число α определяется двойной последовательностью (a_n, A_n), а число 1 — двойной последовательностью (b_n, B_n). Тогда будут иметь место неравенства:

$$a_n < \alpha < A_n, \quad b_n < 1 < B_n.$$

Так как

$$b_n < 1, \quad B_n > 1,$$

то

$$a_n b_n < a_n < \alpha < A_n < A_n B_n.$$

Следовательно, двойная последовательность $(a_n b_n,\ A_n B_n)$, определяющая число $\alpha_n \cdot 1$, определяет вместе с тем число α.

Поэтому

$$\alpha \cdot 1 = \alpha.$$

6°. *Вычитание.*

Разность двух вещественных чисел определяется так же, как разность двух рациональных чисел; именно разностью двух вещественных чисел a и b называется такое число d, которое в сумме с числом b составляет число a, т. е. удовлетворяет равенству

$$b + d = a,$$

Если числа a и b определяются соответственно двойными последовательностями (a_n, A_n) и (b_n, B_n), то разность чисел a и b есть число d, определяемое двойной последовательностью $(a_n - B_n, A_n - b_n)$.

В самом деле,

$$\begin{aligned} b + d &= (b_n, B_n) + (a_n - B_n, A_n - b_n) = \\ &= (b_n + a_n - B_n, B_n + A_n - b_n) = \\ &= (a_n, A_n) + (b_n - B_n, B_n - b_n). \end{aligned}$$

Но $b_n - B_n < 0$, $B_n - b_n > 0$; поэтому двойная последовательность $(b_n - B_n, B_n - b_n)$ определяет число 0, так что

$$b + d = a + 0 = a.$$

Например, если

$$a = 3{,}1415\ldots,\ b = 2{,}7182\ldots,$$

то

$$3{,}1 - 2{,}8 < 3{,}14 - 2{,}72 < 3{,}141 - 2{,}719 < 3{,}1415 - 2{,}7183 < \ldots$$
$$\ldots < 3{,}1416 - 2{,}7182 < 3{,}142 - 2{,}718 < 3{,}15 - 2{,}71 < 3{,}2 - 2{,}7,$$

т.е. $0{,}3 < 0{,}42 < 0{,}422 < 0{,}4232 < \ldots < 0{,}4234 < 0{,}424 < 0{,}44 < 0{,}5.$

Эта двойная последовательность определяет число $0{,}423\ldots$, так что

$$3{,}1415\ldots - 2{,}7182\ldots = 0{,}423\ldots .$$

7°. ***Теорема.*** Для того чтобы два числа α и β были равны, необходимо и достаточно, чтобы их разность $\alpha - \beta$ была равна нулю.

Доказательство. Если $\alpha = \beta$, то $\alpha = \beta + 0$; поэтому $\alpha - \beta = 0$. Обратно, если $\alpha - \beta = 0$, то $\alpha = \beta + 0 = \beta$.

8°. *Единственность разности двух чисел.* Допустим, что, кроме числа d, удовлетворяющего равенству $b + d = a$, существует также число d', удовлетворяющее равенству $b + d' = a$, так что имеет место равенство $b + d' = b + d$. Но тогда окажется, что

$$(b + d') - (b + d) = d' - d = 0,$$

т. е. что $d' = d$.

9°. ***Теорема.*** Сумма $\alpha + \beta$ и произведение $\alpha\beta$ двух положительных чисел α и β не зависит от того, какими двойными последовательностями определяются числа α и β.

Доказательство. Если, например, число α определяется двойными последовательностями (a_n, A_n) и (a'_n, A'_n), а число β — двойной последовательностью (b_n, B_n), то, обозначая числа, определяемые двойными последовательностями

$$(a_n + b_n, A_n + B_n) \text{ и } (a_n' + b_n, A_n' + B_n)$$

соответственно через γ и γ', мы найдем, что разность $\gamma - \gamma'$ этих чисел определяется двойной последовательностью

$$(a_n + b_n - A_n' - B_n, A_n + B_n - a_n' - b_n);$$

но так как

$$a_n - A_n' < 0,\ b_n - B_n < 0,\ A_n - a_n' > 0,\ B_n - b_n > 0,$$

то $\gamma - \gamma' = 0$ и, следовательно, $\gamma = \gamma'$. Поэтому $\gamma = \alpha + \beta$ и $\gamma' = \alpha + \beta$.

Точно так же доказывается и вторая часть теоремы, относящаяся к произведению.

10°. *Деление.*

Частное двух положительных вещественных чисел определяется так же, как частное двух положительных рациональных чисел; именно частным двух положительных вещественных чисел a и b называется такое число q, которое в произведении с числом b составляет число a, т. е. удовлетворяет равенству $bq = a$.

Если положительные числа a и b определяются соответственно двойными последовательностями (a_n, A_n) и (b_n, B_n), то частное чисел a и b есть число q, определяемое двойной последовательностью

$$\left(\frac{a_n}{B_n};\ \frac{A_n}{b_n}\right).$$

В самом деле,

$$bq=(b_n,B_n)\cdot\left(\frac{a_n}{B_n},\ \frac{A_n}{b_n}\right)=\left(\frac{b_na_n}{B_n},\ \frac{B_nA_n}{b_n}\right)=(a_n,\ A_n)\cdot\left(\frac{b_n}{B_n},\ \frac{B_n}{b_n}\right).$$

Но $\frac{b_n}{B_n}<1$, $\frac{B_n}{b_n}>1$; поэтому двойная последовательность $\left(\frac{b_n}{B_n},\ \frac{B_n}{b_n}\right)$ определяет число 1, так что

$$bq=a\cdot 1=a.$$

Например, если

$$a=3{,}1415\ldots,\qquad b=2{,}7182\ldots,$$

то

$$\frac{3{,}1}{2{,}8}<\frac{3{,}14}{2{,}72}<\frac{3{,}141}{2{,}719}<\frac{3{,}1415}{2{,}7183}<\ldots<\frac{3{,}1416}{2{,}7182}<\frac{3{,}142}{2{,}718}<\frac{3{,}15}{2{,}71}<\frac{3{,}2}{2{,}7}.$$

Эта двойная последовательность определяет число 1,155..., так что

$$\frac{3{,}1415\ldots}{2{,}7182\ldots}=1{,}155\ldots.$$

11°. *Единственность частного двух чисел.* Допустим, что, кроме числа q, удовлетворяющего равенству $bq=a$, существует число q', удовлетворяющее равенству $|bq'=a|$, так что имеет место равенство $bq'=bq$.

Но тогда окажется, что

$$bq'-bq=b(q'-q)=0,$$

откуда при $b\neq 0$ будет следовать, что

$$q'-q=0,$$

т. е. что $q'=q$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, вычисляя приближенные значения корней и перемножая их, что

1) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{1{,}5}=3$; 2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=9$;

3) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$; 4) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

2. Сравнить по величине действительные числа:

1) 0,242342... и 0,242142 ...;

2) $\frac{1}{3}$ и 0,33314; 3) $\frac{2}{3}$ и 0,666 ...;

4) 3,1415926 ... и $\frac{355}{113}$;

5) $\sqrt{3}$ и 1,7369; 6) $\sqrt{15}$ и 3,873; 7) $\sqrt{5}$ и $\frac{161}{72}$.

3. Доказать, что при любом из расположений на числовой оси точек A и B по отношению к ее началу O длина отрезка AB равна разности между абсциссой конца B этого отрезка и абсциссой его начала (черт. 7).

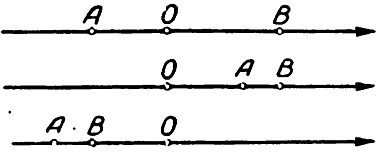
Указание. Представить отрезок AB в виде суммы или разности двух отрезков.

4. Доказать, что, если концы A и B отрезка AB, расположенного на числовой оси, имеют абсциссы α и β, то середина C этого отрезка имеет абсциссу $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Указание. Исходить из равенства $AC = CB$.

5. Доказать, что если отрезок OE, служивший единицей измерения на числовой оси, заменить в качестве единицы измерения отрезком OI, несоизмеримым с отрезком OE, то все точки, имевшие рациональные абсциссы, будут иметь иррациональные абсциссы.

Указание. Доказательство провести способом от противного, опираясь на несоизмеримость отрезков OE и OI.



Черт. 7

ВОПРОСЫ

1. Почему сумма рационального и иррационального числа есть число иррациональное? Привести примеры.

2. Привести примеры, показывающие, что сумма и произведение двух иррациональных чисел могут быть рациональными числами.

3. Каким числом выразится результат десятичного измерения отрезка A отрезком B, если

1) $A = \frac{15}{8}B$; 2) $A = \frac{17}{15}B$; 3) $A = \frac{5}{3}B$?

4. Доказать, что на каждом отрезке AB числовой оси существует бесконечное множество точек, имеющих рациональные абсциссы.

Указание. В случае, если концы A и B отрезка имеют рациональные абсциссы a и b, принять во внимание, что середина C этого отрезка имеет рациональную абсциссу $\frac{a+b}{2}$. Случай же, когда один или оба конца отрезка AB имеют иррациональные абсциссы, сводится к первому путем введения приближенных значений этих абсцисс с избытком (для точки A) и с недостатком (для точки B).

5. Доказать, что на каждом отрезке AB числовой оси существует бесконечное множество точек, имеющих иррациональные абсциссы.

Указание. Принять во внимание упражнение 5 и вопрос 4.

ГЛАВА II

СТЕПЕНИ И КОРНИ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ СТЕПЕНИ

§ 1. СТЕПЕНИ С ЦЕЛЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

1. Определение степени. Если m есть целое положительное число, то произведение m сомножителей, каждый из которых есть данное число a, называется m-й степенью числа a.

Нахождение m-й степени числа a называется возведением числа a в m-ю степень; число a, возводимое в m-ю степень, называется основанием степени; число m, указывающее, в которую степень возводится данное число a, называется показателем степени.

Для m-й степени числа a введено обозначение a^m, так что

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}}.$$

2. Знак степени. Из определения степени и правила умножения чисел следует, что если m есть целое положительное число, то:

1) m-я степень положительного числа есть положительное число;

2) m-я степень отрицательного числа есть положительное число в том случае, когда m — четное число, и отрицательное число в том случае, когда m — нечетное число.

Например:

$(-3)^4 = +81$ (четное число отрицательных сомножителей);

$(-3)^5 = -243$ (нечетное число отрицательных сомножителей).

3. Основные свойства степени.

1°. *Степень произведения.*

$(abc)^m = \underbrace{(abc)(abc)\ldots(abc)}_{m \text{ раз}}$ (по определению степени)

$= abc\ abc \ldots\ abc$ (ввиду сочетательности умножения)

$= aa\ldots abb\ldots bcc\ldots c$ (ввиду переместительности умножения)

$= (aa\ldots a)\ (bb\ldots b)(cc\ldots c)$ (ввиду сочетательности умножения)

$= a^m\ b^m\ c^m$ (по определению степени).

Для того чтобы возвести в какую-либо степень произведение нескольких сомножителей, достаточно возвести в эту степень каждый сомножитель и найденные результаты перемножить.

2°. *Степень дроби.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\ldots\frac{a}{b} \quad \text{(по определению степени)}$$

$$= \frac{a\,a\ldots a}{b\,b\ldots b} \quad \text{(по определению произведения дробей)}$$

$$= \frac{a^m}{b^m} \quad \text{(по определению степени).}$$

Для того чтобы возвести в какую-либо степень дробь, достаточно возвести в эту степень ее числитель и ее знаменатель и первый результат разделить на второй.

3°. *Степень степени.*

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \ldots a^m}_{n \text{ раз}} \quad \text{(по определению степени)}$$

$$= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n \text{ раз}}} \quad \text{(по правилу перемножения степеней одного и того же основания)}$$

$$= a^{mn} \quad \text{(по определению произведения).}$$

Для того чтобы возвести степень числа в какую-либо новую степень, достаточно возвести это число в степень, показатель которой равен произведению данных показателей степеней.

4°. *Степень одночлена.*

Из правил 1°, 2° и 3° следует, что для того, чтобы возвести в степень m одночлен, надо возвести в степень m его коэффициент и умножить на показатель m показатели всех буквенных множителей.

Например:
$$(-2a^3bc^5)^4 = 16a^{12}b^4c^{20}.$$

4. Квадрат многочлена. В курсе VII класса была выведена формула:

$$(1) \qquad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

по этой формуле находится квадрат двучлена $a + b$, членами которого a и b могут служить любые числа или выражения.

Если требуется возвести в квадрат трехчлен $a + b + c$, то мы имеем право применить ту же формулу (1):

$$(2) \quad (a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

т. е. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$

Точно так же, пользуясь формулами (1) и (2), находим:

$$(3) \quad (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac +$$
$$+ 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Если мы внимательно всмотримся в формулы (1), (2) и (3), то увидим, что при возведении в квадрат двучлена, трехчлена или четырехчлена получается многочлен, содержащий две группы членов:

1) сумму квадратов всех членов многочлена, возводимого в квадрат, например: $a^2+b^2+c^2+d^2$, и

2) сумму удвоенных произведений каждого члена многочлена на каждый из следующих за ним членов, например:

$$(2ab+2ac+2ad)+(2bc+2bd)+2cd.$$

Этот результат можно было предвидеть. В самом деле, для нахождения произведения

$$\begin{gathered}(a+b+c+d)\times\\ \times(a+b+c+d)\end{gathered}$$

можно сначала найти произведение членов, расположенных в одном и том же столбце:

$$a\cdot a+b\cdot b+c\cdot c+d\cdot d,$$

а затем — произведение членов, расположенных накрест:

1) $a\cdot b+a\cdot b=2ab,\quad a\cdot c+a\cdot c=2ac,\quad a\cdot d+a\cdot d=2ad;$
2) $b\cdot c+b\cdot c=2bc,\ b\cdot d+b\cdot d=2bd;$
3) $c\cdot d+c\cdot d=2cd.$

При этом мы умножали члены, расположенные в каждом столбце, на члены, расположенные в каждом из следующих столбцов.

Таким образом, сначала мы составили первую группу членов результата, т. е. сумму квадратов всех членов основания, а затем вторую группу членов результата, т. е. сумму произведений каждого члена основания на каждый из следующих его членов.

Теперь допустим, что требуется возвести в квадрат многочлен

$$a+b+c+\ldots+i+k+l,$$

имеющий любое число членов. Очевидно, что произведение

$$\begin{gathered}(a+b+c+\ldots+i+k+l)\times\\ \times(a+b+c+\ldots+i+k+l)\end{gathered}$$

можно найти тем же способом, которым мы только что нашли квадрат четырехчлена. Именно, находя произведение членов, расположенных в одном и том же столбце, получим первую группу членов результата $a^2+b^2+c^2+\ldots+l^2$; находя же произведение членов, расположенных в каком-либо столбце, на члены, расположенные в каждом из следующих столбцов, получим вторую группу членов результата:

$$\begin{aligned}2ab+2ac+2ad+\ldots+2al&+\\ +2bc+2bd+\ldots+2bl&+\\ +2cd+\ldots+2cl&+\\ \ldots\ldots\ldots&\\ +2ik+2il&+\\ +2kl&.\end{aligned}$$

Следовательно, квадрат многочлена равен сумме, составленной из суммы квадратов всех членов многочлена и суммы удвоенных произведений каждого члена многочлена на каждый из следующих членов его.

В частности,

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$$

Отсюда

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc).$$

Эта формула выражает сумму квадратов трех (вообще нескольких) чисел через сумму первых степеней этих чисел и сумму произведений всех возможных пар тех же чисел; для составления этих пар достаточно каждое из слагаемых суммы первых степеней умножить на каждое из следующих чисел.

Выражения

$$a+b+c,\qquad ab+ac+bc,\qquad a^2+b^2+c^2$$

представляют собой многочлены, однородные по отношению к буквам a, b, c, (соответственно 1-го, 2-го и 3-го измерений)*.

Вместе с тем эти многочлены не меняют своего числового значения при круговой замене букв a, b, c, т. е. при замене буквы a буквой b, буквы b—буквой c, буквы c—буквой a:

$$ab+ac+bc=bc+ba+ca;$$

эта замена называется круговой потому, что буквы a, b, c заменяются в том порядке, в котором они следуют одна за другой, если их расположить по кругу.

Пример 1.

$$(2x-3y-12)^2=[2x+(-3y)+(-12)]^2=(2x)^2+$$
$$+(-3y)^2+(-12)^2+2(2x)(-3y)+2(2x)(-12)+$$
$$+2(-3y)(-12)=4x^2+9y^2+144-12xy-48x+72y.$$

Этот результат может быть записан и сразу.

Пример 2.

$$(3a^2b^3c-2bc^5+4a^4b^2-a^3c^3)^2=9a^4b^6c^2+4b^2c^{10}+16a^8b^4+$$
$$+a^6c^6-12a^2b^4c^6+24a^6b^5c-6a^5b^3c^4-16a^4b^3c^5+4a^3bc^8-8a^7b^2c^3.$$

Пример 3.

Доказать тождество:

$$(bc+ca+ab)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)^2.$$

1-й способ. Выполняя действия в левой и правой части тождества, получим одинаковые результаты.

2-й способ. Принимая какую-либо букву, например, букву a, за главную, расположим (устно) левую и правую части тождества по степеням этой буквы и докажем, что коэффициенты при одинаковых степенях буквы a равны; для удобства предварительно перепишем тождество, выделяя букву a, в виде:

---

* В курсе VII класса было указано, что многочлен называется однородным по отношению к входящим в него буквам, если все его члены имеют одно и то же измерение по отношению к этим буквам.

$$[bc + (b + c)a]^2 + (a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 = \\ = [a^2 + (b^2 + c^2)]^2.$$

Теперь находим:

$$\begin{array}{l||l} a^4 & 1 = 1 \\ a^3 & 0 = 0 \\ a^2 & (b + c)^2 - 2bc + c^2 + b^2 = 2(b^2 + c^2) \\ a^1 & 2bc(b + c) - 2b^2c - 2bc^2 = 0 \\ a^0 & b^2c^2 + b^2c^2 + b^4 + c^4 = (b^2 + c^2)^2. \end{array}$$

3-й способ. Замечая, что в обеих частях тождества имеются суммы

$$a^4 + b^4 + c^4 \text{ и } 2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2),$$

опускаем их и приводим тождество к виду:

$$2abc\,(a + b + c) - 2abc\,(a + b + c) = 0,$$

в котором оно, очевидно, имеет место.

Пример 4.

Доказать тождество:

$$(1 + ab + a + b)^2 - (1 - ab + a - b)^2 = 4b\,(1 + a)^2.$$

Доказательство. Преобразуя левую часть по формуле разности квадратов, находим:

$$(1 + ab + a + b + 1 - ab + a - b)\,(1 + ab + a + b - 1 + ab - a + b) = \\ = (2 + 2a)\,(2ab + 2b) = 2\,(1 + a)\cdot 2b\,(1 + a) = 4b\,(1 + a)^2.$$

Пример 5.

Доказать тождество:

$$(2a^2 + 3ab - b^2)^2 - 4\,(a + b)^2\,(a^2 + ab - 2b^2) = b^2\,(a + 3b)^2.$$

Доказательство. Перенося члены, придаем тождеству вид:

$$(2a^2 + 3ab - b^2)^2 - b^2\,(a + 3b)^2 = 4\,(a + b)^2\,(a^2 + ab - 2b^2).$$

Преобразуя левую часть по формуле для разности квадратов, находим:

$$(2a^2 + 3ab - b^2 + ab + 3b^2)\,(2a^2 + 3ab - b^2 - ab - 3b^2) = \\ = (2a^2 + 4ab + 2b^2)\,(2a^2 + 2ab - 4b^2) = 4\,(a + b)^2\,(a^2 + ab - 2b^2).$$

Пример 6.

Преобразовать выражение:

$$(a - b + c + d)^2 + (a + b - c + d)^2.$$

1-й способ. Так как

$$a - b + c + d = (a + d) - (b - c), \quad a + b - c + d = (a + d) + (b - c),$$

то $(a - b + c + d)^2 = (a + d)^2 - 2(a + d)\,(b - c) + (b - c)^2$,

$$(a + b - c + d)^2 = (a + d)^2 + 2\,(a + d)\,(b - c) + (b - c)^2.$$

Почленно складывая эти равенства, находим что данное выражение тождественно равно выражению:

$$2[(a + d)^2 + (b - c)^2].$$

2-й способ. Применяя формулу:

$$U^2 + V^2 = (U + V)^2 - 2UV,$$

находим:

$$(a - b + c + d)^2 + (a + b - c + d)^2 = (2a + 2d)^2 - 2\,(a - b + c + d)\,\times \\ \times(a + b - c + d) = 4(a + d)^2 - 2\,[(a + d) - (b - c)]\,[(a + d) + (b - c)] = \\ = 4\,(a + d)^2 - 2[(a + d)^2 - (b - c)^2] = 2\,[(a + d)^2 + (b - c)^2].$$

Пример 7.

Доказать тождество:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + bc + ca + ab)^2 - (a + b + c)^2 (a^2 + b^2 + c^2) = \\ = (bc + ca + ab)^2.$$

Доказательство. Полагая, для краткости,

$$a + b + c = A,\ bc + ca + ab = B,\ a^2 + b^2 + c^2 = C,$$

переписываем тождество в виде:

$$(C + B)^2 - A^2C = B^2;$$

оно может быть заменено тождеством:

$$C(C + 2B - A^2) = 0,$$

Но $A^2 = C + 2B$.

Следовательно,

$$C + 2B - A^2 = C + 2B - C - 2B = 0.$$

5. Изменение степени. Если показатель m степени a^m — целое положительное число, то об изменении этой степени с изменением основания a можно судить с помощью следующих теорем.

Теорема 1. Если $a = b$, то $a^n = b^n$, т. е. при одном и том же показателе степени равным основаниям соответствуют и равные степени.

Доказательство.

1) Умножая обе части равенства $a = b$ сначала на a, а затем на b, получаем два равенства:

$$a^2 = ba, \quad ab = b^2;$$

из них следует, что $a^2 = b^2$.

2) Умножая обе части равенства $a = b$ на a^2, а обе части равенства $a^2 = b^2$ на b, получаем два равенства:

$$a^3 = ba^2, \quad a^2b = b^3;$$

из них следует, что $a^3 = b^3$.

3) Умножая обе части равенства $a = b$ на a^3, а обе части равенства $a^3 = b^3$ на b, получаем два равенства:

$$a^4 = ba^3, \quad a^3b = b^4;$$

из них следует, что

$$a^4 = b^4.$$

Вообще, умножая обе части равенства $a = b$ на a^{m-1}, а обе части равенства $a^{m-1} = b^{m-1}$ на b, получаем два равенства:

$$a^m = ba^{m-1}, \quad a^{m-1}b = b^m;$$

из них следует, что

$$a^m = b^m.$$

Теорема 2. Если a и b — положительные числа и $a > b$, то $a^m > b^m$, т. е. если основания степеней — положительные числа, то при одном и том же показателе степени большему основанию соответствует и большая степень (и, следовательно, меньшему основанию — меньшая степень).

Доказательство. Так как a и b — положительные числа, то любые степени этих чисел также будут положительными числами.

1) Умножая обе части неравенства $a>b$ сначала на a, а затем на b, получаем два неравенства:

$$a^2>ab, \qquad ab>b^2;$$

из них следует, что $a^2>b^2$.

2) Умножая обе части неравенства $a>b$ на a^2, а обе части неравенства $a^2>b^2$ на b, получаем два неравенства:

$$a^3>ba^2, \qquad a^2b>b^3;$$

из них следует, что $a^3>b^3$.

3) Умножая обе части неравенства $a>b$ на a^3, а обе части неравенства $a^3>b^3$ на b, получаем два неравенства:

$$a^4>ba^3, \qquad a^3b>b^4;$$

из них следует, что $a^4>b^4$.

Вообще, умножая обе части неравенства $a>b$ на a^{m-1}, а обе части неравенства $a^{m-1}>b^{m-1}$ на b, получаем два неравенства:

$$a^m>ba^{m-1}, \qquad a^{m-1}b>b^n;$$

из них следует, что $a^m>b^m$.

Теорема 3. Если a и b — положительные числа и $a^m=b^m$, то $a=b$, т. е. если основания степеней — положительные числа, то при одном и том же показателе равным степеням соответствуют и равные основания.

Доказательство (способом от противного). Если бы при данных условиях $a>0$, $b>0$, $a^m=b^m$ имело место не равенство $a=b$, а неравенство $a>b$ или неравенство $a<b$, то, в силу теоремы 2, имели бы место соответственно неравенства $a^m>b^m$ или $a^m<b^m$, каждое из которых противоречит данному условию $a^m=b^m$. Следовательно, ни допущение $a>b$, ни допущение $a<b$ неверно. Остается принять, что $a=b$.

Теорема 4. Если a и b — положительные числа и $a^m>b^m$, то $a>b$, т. е. если основания степеней — положительные числа, то при одном и том же показателе степени большей степени соответствует и большее основание.

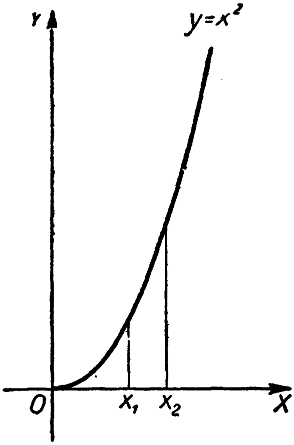
Доказательство (способом от противного) предоставляем читателям. Оно выполняется по аналогии с доказательством теоремы 3 на основании теорем 1 и 2.

6. Графики зависимостей $y=x^2$ и $y=x^3$ для положительных значений основания x. Свойства степеней, содержащиеся в теоремах 2—4, представятся в весьма наглядном виде, если мы построим графики зависимостей, выражаемых равенствами:

$$1)\ y=x^2 \quad \text{и} \quad 2)\ y=x^3.$$

1) Построим график зависимости $y = x^2$ по точкам, для чего составим таблицу:

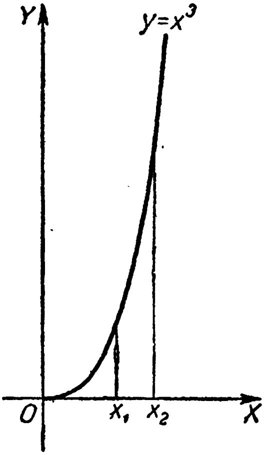
x	y
0	0
1	1
2	4
3	9



Черт. 8

2) Для построения графика зависимости $y = x^3$ составим таблицу:

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27



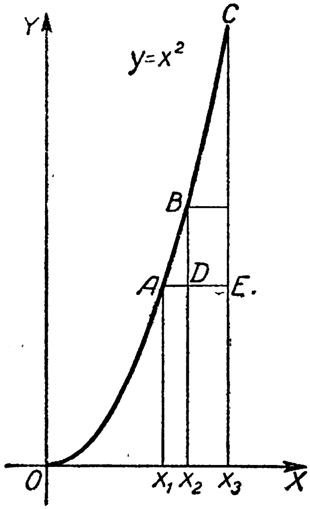
Черт. 9

Из чертежей (8 и 9) видно, что когда переменная x принимает положительные значения, то и переменная y принимает положительные значения, причем с возрастанием переменной x (т. е. основания степеней x^2 и x^3) и переменная y (т. е. степень x^2

и степень x^3) возрастает: если, например, $x_2>x_1$, то $x_2^2>x_1^2$ и $x_2^3>x_1^3$.

Исследуем, как возрастают эти степени с возрастанием основания.

Если положительное значение x_1 основания x увеличивается на положительное число h, или, как говорят, получает положительное приращение h, то степень x_1^2 получает положительное приращение $(x_1+h)^2-x_1^2$, равное сумме $2x_1h+h^2$, которая при одном и том же приращении h возрастает вместе с возрастанием начального значения x_1 основания x. Поэтому равным положительным приращениям основания будут соответствовать не равные, а все возрастающие приращения степени (черт. 8).



Черт. 10

В самом деле, если основание x будет принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, ..., отличающиеся одно от другого на 1 $(h=1)$, то соответствующие квадраты 0, 1, 4, 9, 16, ... будут отличаться на числа 1, 3, 5, 7, ..., из которых каждое больше предыдущего.

Так же ведет себя и степень x^3 положительного основания x (черт. 9).

Если основание x будет принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, ..., отличающиеся одно от другого на 1 $(h=1)$, то соответствующие кубы 0, 1, 8, 27, 64, ... будут отличаться на числа 1, 7, 19, 37, ..., из которых каждое больше предыдущего.

Если графики зависимостей $y=x^2$ и $y=x^3$ тщательно вычерчены на миллиметровой бумаге, то по этим графикам можно прочесть значения, которые принимают степени x^2 и x^3 для значений основания x, отличающихся на 0,1.

7. Таблицы квадратов и кубов чисел. Так как при решении многих задач необходимо находить квадраты и кубы чисел, то для облегчения этой работы составлены специальные таблицы, в которых приведены приближенные значения квадратов и кубов чисел.

Эти и другие таблицы помещены в книге «Четырехзначные математические таблицы для средней школы» В. М. Брадиса. В этой книге автор кратко указывает, как пользоваться каждой таблицей; выполняя указания автора, можно без труда найти требуемые числа.

8. Нахождение промежуточных значений степеней x^2 и x^3. Допустим, что мы с помощью вычисления, по графику или по таблице, нашли значения x_1^2 и x_3^2 степеней двух положительных оснований x_1 и x_3, где $x_1<x_3$; тогда, если x_2 есть какое-либо значение основания x, лежащее в промежутке между x_1 и x_3 $(x_1<x_2<x_3)$ и

поэтому называемое промежуточным значением, то степень x_2^2 может быть приближенно найдена путем вычисления на основании следующих соображений.

Именно, мы легко выполним это вычисление, если примем дугу AC графика степени x^2, соответствующую промежутку (x_1, x_3), за отрезок прямой (черт. 10). При этом предположении треугольники ABD и ACE будут подобными прямоугольными треугольниками и будет иметь место пропорция:

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE};$$

следовательно, какую часть отрезка AE составляет отрезок AD, такую же часть отрезка CE составляет отрезок BD.

Но AE и AD — приращения основания x_1, которые оно получает при переходе к значениям x_3 и x_2, а CE и BD — соответствующие приращения степени x_1^2. Поэтому мы можем сказать, что какую часть приращения $x_3—x_1$ составляет приращение $x_2—x_1$, такую же часть приращения $x_3^2—x_1^2$ составляет приращение $x_2^2—x_1^2$.

Пример 1. Если $x_1 = 2{,}73$ и $x_3 = 2{,}74$, а $x_2 = 2{,}732$, то $x_1^2 = 7{,}453$, $x_3^2 = 7{,}508$, а для нахождения числа x_2^2 рассуждаем следующим образом: так как при увеличении основания 2,73 на 10 тысячных степень 7, 453 увеличивается на 55 тысячных, то при увеличении основания 2,73 на 2 тысячных степень 7,453 увеличивается на $\frac{2}{10}$ от 55 тысячных, т. е. на 11 тысячных; поэтому

$$2{,}732^2 = 2{,}73^2 + 0{,}011 = 7{,}453 + 0{,}011 = 0{,}464.$$

Число 11 (тысячных) есть поправка на четвертую цифру 2 (тысячных). В таблице В. М. Брадиса эта поправка дается в готовом виде — ее надо только правильно прочесть.

Пример 2. Если $x_1 = 2{,}143$ и $x_3 = 2{,}144$, а $x_2 = 2{,}1435$, то $x_1^3 = 9{,}842$, $x_3^3 = 9{,}855$, а для нахождения числа x_2^3 рассуждаем следующим образом: так как при увеличении основания 2,143 на 10 десятитысячных степень 9,842 увеличивается на 13 тысячных, то при увеличении основания 2,143 на 5 десятитысячных степень 9,842 увеличивается на $\frac{5}{10}$ от 13 тысячных, т. е. на 65 десятитысячных; поэтому

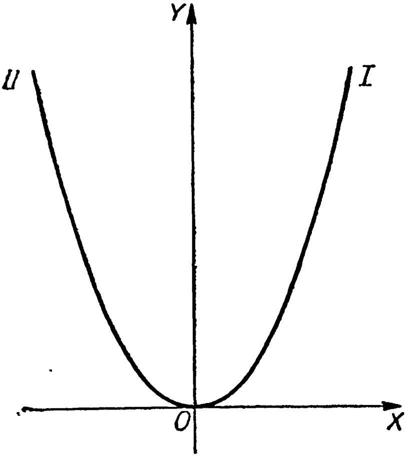
$$2{,}1435^3 \approx 2{,}143^3 + 0{,}0065 = 9{,}842 + 0{,}0065 = 9{,}8485.$$

Число 65 (десятитысячных) есть поправка на пятую цифру 5 (десятитысячных). В таблице В. М. Брадиса эта поправка округлена до числа 0,007, так что результат получает вид 9,849.

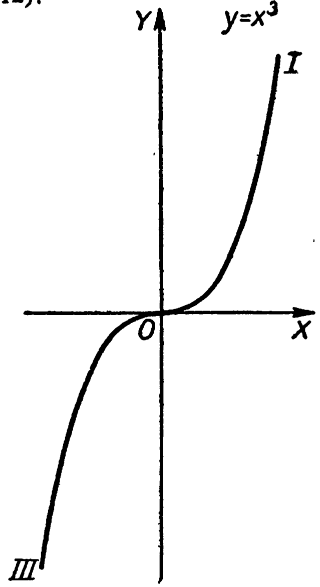
9. Графики зависимостей $y = x^2$ и $y = x^3$. В п. 6 мы построили эти графики для положительных значений основания x. Легко видеть, что построение графиков тех же зависимостей для отрицательных значений основания x облегчается тем, что значения степени x^2, соответствующие двум противоположным значениям x_1 и $—x_1$ основания x, равны между собой, а значения степени x^3, соответствующие двум противоположным значениям x_1 и $-x_1$ основания x, также представляют собой противоположные числа:

$$(-x_1)^2 = x_1^2; \qquad (-x_1)^3 = -x_1^3.$$

Поэтому для построения графика степени x^2, соответствующего отрицательным значениям основания x, достаточно график степени x^2, соответствующий положительным значениям основания x, отразить (как в зеркале) в оси OY (черт. 11), а для построения графика степени x^3, соответствующего отрицательным значениям основания x, достаточно график степени x^3, соответствующий положительным значениям основания x, сначала отразить в оси OY, а затем полученное отражение отразить в оси OX (черт. 12).



Черт. 11



Черт. 12

Очевидно, что графики I и II (черт. 11) будут симметричными по отношению к оси OY (OY — ось симметрии), а графики I и III (черт. 12) — симметричными по отношению к началу O (начало O — центр симметрии).

Из чертежей 11 и 12 мы заключаем, что, если x_1 и x_2 отрицательные числа и $x_2 > x_1$, то $x_2^2 < x_1^2$, а $x_2^3 > x_1^3$, т. е. что большему из двух отрицательных чисел соответствует меньший квадрат (четная степень), но больший куб (нечетная степень). Таким образом, когда основание x принимает отрицательные значения, то степень x^2 принимает положительные значения, но с возрастанием основания x убывает, а степень x^3 принимает отрицательные значения, но с возрастанием основания x также возрастает.

Отсюда мы делаем вывод, что степени x^2 и x^3 (и их графики) ведут себя неодинаково: если мы заставим основание x пробегать все значения, расположенные на числовой оси, то с возрастанием основания x степень x^2 будет сначала убывать (для значений отрицательной полуоси), а затем возрастать (для значений положительной полуоси), а степень x^3 — все время возрастать.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверить равенства:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3; \qquad 11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3.$$

Указание. Воспользоваться разложением на множители суммы кубов и разности кубов.

2. Найти значения выражений:

1) $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6$;

2) $(-a)^5 + (-a)^4 + (-a)^3 + (-a)^2 + (-a)$ при $a = 2$;

3) $4 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3^2$.

Указание. Выполнить приведение:

4) $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ при $a = -2$.

Указание. Предварительно разложить многочлен на множители; можно также применить формулу: $a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 = \frac{a^6 - 1}{a - 1} = \frac{63}{-3} = -21$.

5) $3a^4 - 4a^3 + 5a^2 + 6a - 7$ при $a = 3$.

Указание. Можно вычислять так:

$3a^4 = 3a \cdot a^3 = 9a^3$; $9a^3 - 4a^3 = 5a^3 = 5a \cdot a^2 = 15a^2$;

$15a^2 + 5a^2 = 20a^2 = 20a \cdot a = 60a$; $60a + 6a - 7 = 66a - 7 = 191$.

3. Упростить следующие выражения:

1) $(a - b)^2 + (b - a)^2$; $(a - b)^3 + (b - a)^3$;

2) $(a - b)^4 (b - a)^3$; $(a - b)(b - a)^{2n-3}$;

3) $(1 + t)^3 + (1 - t)^3$.

4. Найти значения выражений:

1) $\frac{(a-1)^4 (x-1)^3}{(a-1)^3 (1-x)^4}$ при $a = 2, \quad x = -3$.

2) $\frac{a^n b^n (b-1)}{a^{n-1} b^{n-2} (1-b)^2}$ при $a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{4}{5}$.

5. Выполнить действия:

$$\frac{y^2}{(x-y)^n} + \frac{x}{(x-y)^{n-1}} - \frac{1}{(x-y)^{n-2}}.$$

6. Устно упростить выражения:

1) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(6\frac{2}{3}\right)^4$;

2) $\left(\frac{ax}{by}\right)^2 \cdot \left(\frac{bx}{cy}\right)^3 \cdot \left(\frac{cy}{ax}\right)^5$;

3) $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^3 : \left(\frac{a-b}{x-y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\right)^2$.

Указание. В примерах 2) и 3) учащийся должен предварительно устно подсчитать, в которой степени войдет каждый множитель в числитель или знаменатель результата.

7. Доказать тождества:

1) $(a+b+c)^2+(a-b-c)^2+(2c-b)^2=2a^2+3b^2+6c^2$.

2) $(a+b+c+d)^2+(a-b-c+d)^2+(a-b+c-d)+$ $+(a+b-c-d)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

3) $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2+$ $+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4abc$.

8. Построить по точкам графики зависимостей:

1) $y=\frac{1}{2}x^2;\quad y=\frac{3}{2}x^2;\quad y=\frac{1}{10}x^2;$

2) $y=\frac{2}{3}x^3;\quad y=\frac{5}{4}x^3;\quad y=\frac{1}{10}x^3.$

Каким способом можно получить графики 1) и 2) соответственно из графиков зависимостей $y=x^2$ и $y=x^3$?

9. Построить графики зависимостей:

1) $y=-\frac{1}{2}x^2;\quad y=-\frac{3}{2}x^2;\quad y=-\frac{1}{10}x^2;$

2) $y=-\frac{2}{3}x^3;\quad y=-\frac{5}{4}x^3;\quad y=-\frac{1}{10}x^3.$

Как использовать для этого графики 1) и 2) упражнения 8?

10. Используя шаблон графика зависимости $y=x^2$, построить графики зависимостей:

$$y=x^2+2,\qquad y=x^2-2.$$

11. Построить по точкам графики зависимостей:

$$y=(x-3)^2,\qquad y=(x+3)^2$$

и убедиться, что они могут быть построены с помощью шаблона графика зависимости $y=x^2$.

ВОПРОСЫ

1. Какими цифрами оканчиваются квадраты последовательных целых положительных чисел? В какой последовательности повторяются эти цифры? Какими цифрами не может оканчиваться квадрат целого положительного числа?

Ответ. 1, 4, 5, 6, 9 (в этой последовательности), причем $1+9=$ $=4+6=5+5=10$; 2, 3, 7, 8, причем $2+8=3+7=10$.

2. Какими цифрами оканчиваются кубы последовательных целых положительных чисел? В какой последовательности повторяются эти цифры?

Ответ. 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, причем $1+9=8+2=\ldots=10$.

3. Объяснить, почему квадраты двух натуральных чисел, сумма последних цифр которых равна 10, оканчиваются одной и той же цифрой?

Решение. Если $M=10A+a$ и $N=10B+b$, где $a+b=10$, то
$$M^2-N^2=[10(A+B)+10]\cdot[10(A-B)+a-b]=$$
$$=10(A+B+1)\cdot[10(A-B)+(a-b)],$$
но если разность двух чисел делится на 10, то эти числа оканчиваются одной и той же цифрой.

4. Найти (устно) двузначные числа, кубы которых равны числам: 19 683, 753 571, 438 976.

Указание. Сначала найти цифру единиц, а затем принять во внимание границы, между которыми заключено число.

5. Доказать, что если m есть целое положительное число, то
1) при условии $a>1$ имеет место неравенство $a^m>1$;
2) при условии $0<a<1$ имеет место неравенство $a^m<1$.

Указание. Воспользоваться теоремой 2.

6. Среди чисел

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5; \quad \left(\frac{5}{4}\right)^3; 0{,}28^{10}; \ 1{,}4^8$$

указать правильные и неправильные дроби.

7. Поставить знак неравенства между числами:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ и $\left(\frac{7}{8}\right)^5$; $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ и $\left(\frac{9}{8}\right)^3$; $\left(\frac{5}{10}\right)^{10}$ и $\left(\frac{4}{3}\right)^{10}$;

2) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$ и $\left(\frac{4}{3}\right)^{12}$.

Указание. См. вопрос 6.

8. Доказать, что числа вида 121, 12321, 1234321, ..., 123 ... n... 321, где $n \leqslant 9$, — полные квадраты.

Указание. Принять во внимание, что в числе

$$\underbrace{123\ldots}_{n-1}\ n\ \underbrace{\ldots 321}_{n-1}$$

цифре n предшествует n — 1 цифр и за цифрой n следует n — 1 цифр, и записать это число в виде многочлена, расположенного по убывающим степеням основания 10.

§ 2. СТЕПЕНИ С НУЛЕВЫМИ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

1. Общее понятие. В начальном курсе алгебры было установлено следующее правило деления степеней одного и того же основания.

Если $m>n$, то $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Это правило может быть применено только при условии $m>n$, так как при $m = n$ и при $m<n$ определение степени a^{m-n}, как произведения $m-n$ равных сомножителей, теряет смысл.

Для того чтобы сделать возможным употребление правила деления двух степеней одного и того же основания и при условиях $m = n$ и $m<n$, надо придать выражению a^{m-n} определенный смысл также и при этих условиях, т. е. установить понятия о степени с нулевым показателем и степени с отрицательным показателем.

Определение 1. Если a есть число, отличное от нуля, то выражение a^0 называется степенью числа a с нулевым показателем и принимается равным числу 1:

$$a^0 = 1, \text{ где } a \neq 0.$$

При этом условии (соглашении) равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ будет верным и в случае, если $m = n$. В самом деле, если $m = n$, то

$$a^m : a^n = a^m : a^m = 1; \ a^{m-n} = a^{m-m} = a^0 = 1,$$

так что

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Определение 2. Если a есть число, отличное от нуля, то выражение a^{-k}, где $-k$ есть целое отрицательное число, называется степенью числа a с отрицательным показателем и принимается равным дроби $\frac{1}{a^k}$, у которой числитель есть 1, а знаменатель — степень того же числа a, но с показателем, противоположным показателю данной отрицательной степени:

$$a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

При этом условии (соглашении) равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ будет верным и в случае, если $m<n$. В самом деле, если $m<n$ и именно $n = m+k$, то

$$a^m : a^n = \frac{a^n}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{1}{a^k};$$

$$a^{m-n} = a^{-k} = \frac{1}{a^k},$$

так что

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

2. Действия над степенями с нулевым и отрицательными показателями. Сначала докажем, что правила

$$(1) \qquad a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ a^m : a^n = a^{m-n},\ (a^m)^n = a^{mn},$$

установленные для целых положительных показателей, сохраняются и в том случае, если один из показателей m и n — нуль или оба они нули.

1) Если $n = 0$, то

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^m \cdot a^0 = a^m; & a^{m+n} &= a^{m+0} = a^m. \\ a^m : a^n &= a^m : a^0 = a^m; & a^{m-n} &= a^{m-0} = a^m. \\ (a^m)^n &= (a^m)^0 = 1; & a^{mn} &= a^{m\cdot 0} = a^0 = 1. \end{aligned}$$

2) Доказательство выполнимости равенств (1) в случае, если $m = 0$, $n = 0$, предоставляем читателям.

Докажем, что правила (1) сохраняются и в том случае, если один из показателей m и n — отрицательное число или оба они — отрицательные числа.

1) Если m — целое положительное число, а n — целое отрицательное число, то, представляя число n в виде $-n'$, находим:

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-n'} = a^m \cdot \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^m}{a^{n'}}\ a^{m-n'} = a^{m+(-n')} = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^m : a^{-n'} = a^m : \frac{1}{a^{n'}} = a^m \cdot a^{n'} = a^{m+n'} = a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = (a^m)^{-n'} = \frac{1}{(a^m)^{n'}} = \frac{1}{a^{mn'}} = a^{-mn'} = a^{mn}.$$

Рассмотрение случая, когда m — целое отрицательное, а n — целое положительное число, предоставляем читателям.

2) Если m и n — целые отрицательные числа, то, представляя их соответственно в виде $-m'$ и $-n'$, находим:

$$a^m \cdot a^n = a^{-m'} \cdot a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \cdot \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'}\,a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-m'-n'} = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{-m'} \cdot a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} : \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^{n'}}{a^{m'}} = a^{-(m'-n')} = a^{-m'-(-n')} =$$

$$= a^{m-n};$$

$$(a^m)^n = (a^{-m'})^{-n'} = \frac{1}{(a^{-m'})^{n'}} = 1 : \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'} = 1 : \frac{1}{a^{m'n'}} = a^{m'n'} =$$

$$= a^{(-m')(-n')} = a^{mn}.$$

3. График зависимости $y=x^{-1}$. Для построения по точкам графика зависимости

$$y=x^{-1}, \quad \text{т. е.} \quad y=\frac{1}{x},$$

предварительно обратим внимание на следующее:

1) Выражение $\frac{1}{x}$ имеет определенное числовое значение для всех значений основания x, отличных от нуля.

2) При положительных значениях основания x степень x^{-1} принимает положительные значения, а при отрицательных значениях основания x — отрицательные значения; следовательно, ветвь графика зависимости $y=x^{-1}$, соответствующая положительным значениям переменной x, расположена в первой четверти, а ветвь этого графика, соответствующая отрицательным значениям переменной x, расположена в третьей четверти.

3) Так как

$$\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x},$$

то значения степени x^{-1}, соответствующие двум противоположным значениям основания x, также являются противоположными числами; ввиду этого каждой точке M графика с положительными координатами x_0, y_0 соответствует точка N графика с отрицательными координатами $-x_0$, $-y_0$, так что две ветви, из которых состоит график степени x^{-1}, симметричны по отношению к началу координат O как к центру симметрии.

Теперь приступим к построению графика. Начнем с составления таблицы соответствующих значений переменных x и y, где одновременно берутся верхние или нижние знаки (стр. 66).

Следуя этой таблице, строим график (черт. 13).

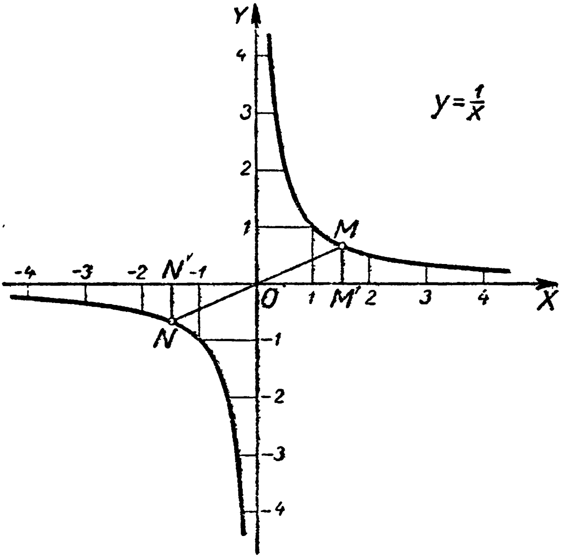
4) Когда основание x принимает положительные значения, то с возрастанием основания x степень x^{-1} убывает. При этом точки графика степени x^{-1} (черт. 13) все более приближаются к оси OX и для достаточно больших значений переменной x становятся сколь угодно близкими к оси OX, или, как говорят, асимптотичес-

ки приближаются к ней. Так, точки рассматриваемой ветви графика становятся ближе к оси OX, чем на $\frac{1}{1}$ единицы масштаба, с того момента, как значения переменной x, которым эти точки соответствуют, начинают удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{10}, \quad \text{где } x > 0;$$

это будет выполняться при $x > 10$.

x	y
± 1	± 1
± 2	$\pm \frac{1}{2}$
± 3	$\pm \frac{1}{3}$
± 4	$\pm \frac{1}{4}$
...	....
$\pm \frac{1}{2}$	± 2
$\pm \frac{1}{3}$	± 3
$\pm \frac{1}{4}$	± 4
...	...



Черт. 13.

5) Если основание x будет принимать положительные значения, все более приближающиеся к нулю, например, такие:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

или такие:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots,$$

то степень x^{-1} будет принимать все возрастающие значения:

$$2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots$$

или

$$10, 100, 1000, , \ldots, 10^n, \ldots.$$

При этом для достаточно малых положительных значений переменной x значения степени x^{-1} становятся сколь угодно большими. Так, для того чтобы степень x^{-1} приняла значение, превосходящее число 10^6, достаточно, чтобы основание x удовлетворяло неравенству:

$$\frac{1}{x} > 10^6\ , \quad \text{где } x > 0;$$

это выполняется при $x < \frac{1}{10^6}$.

6) Вместе с тем, как бы ни было близко к нулю положительное значение основания x, ему соответствует некоторая точка графика, находящаяся на этом именно расстоянии x от оси OY; поэтому по мере того, как переменная x, оставаясь положительной, будет приближаться к нулю, точки графика степени x^{-1} будут все более приближаться к оси OY и для достаточно малых значений переменной x будут становиться сколь угодно близкими к оси OY, т. е. будут асимптотически приближаться к ней.

7) Ветвь графика степени x^{-1}, расположенную в третьей четверти, можно построить, отразив ветвь, расположенную в первой четверти, в оси OY, а затем отразив построенное отражение в оси OX. Это следует из того, что эти ветви симметричны по отношению к центру O.

4. График зависимости $y=x^{-2}$. Для построения по точкам графика зависимости

$$y=x^{-2}, \text{ т. е. } y=\frac{1}{x^2}\ ,$$

предварительно обратим внимание на следующее:

1) Выражение $\frac{1}{x^2}$ имеет определенное числовое значение для всех значений основания x, отличных от нуля.

2) Все значения выражения $\frac{1}{x^2}$ — положительные числа; следовательно, весь график степени x^{-2} расположен над осью OX.

3) Так как

$$\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}\ ,$$

то значения степени x^{-2}, соответствующие двум противоположным значениям основания x, равны; ввиду этого график степени x^{-2} состоит из двух ветвей, симметрично расположенных по отношению к оси OY.

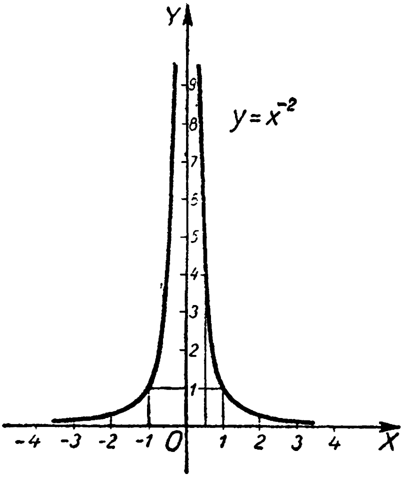
Теперь приступим к построению графика. Начнем с составления таблицы соответствующих значений переменных x и y (стр. 68).

Следуя этой таблице, строим график (черт 14).

4) Когда основание x принимает положительные значения, то с возрастанием основания x степень x^2 возрастает и, следовательно, степень x^{-2} убывает. Поэтому точки графика степени x^{-2} (черт. 14) все более приближаются к оси OX и для достаточно больших зна-

чений переменной x становятся сколь угодно близкими к оси OX, т.е. асимптотически приближаются к ней. Так, точки рассматриваемой ветви графика становятся ближе к оси OX,

x	y
± 1	1
± 2	$\frac{1}{4}$
± 3	$\frac{1}{9}$
± 4	$\frac{1}{16}$
...	...
$\pm\frac{1}{2}$	4
$\pm\frac{1}{3}$	9
$\pm\frac{1}{4}$	16
...	...



Черт. 14

чем на $\frac{1}{100}$ единицы масштаба, с того момента, как значения переменной x, которым эти точки соответствуют, начинают удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{x^2}<\frac{1}{100},\ \text{где } x>0;$$

это будет выполняться при $x^2>100$, т. е. при $x>10$.

5) Если основание x будет принимать положительные значения, все более приближающиеся к нулю, то степень x^{-2} будет принимать все возрастающие значения.

При этом для достаточно малых положительных значений переменной x значения степени x^{-2} становятся сколь угодно большими. Так, для того чтобы степень x^{-2} приняла значение, превосходящее число 10^6, достаточно, чтобы основание x удовлетворяло неравенству:

$$\frac{1}{x^2}>10^6,\ \text{где } x>0;$$

это выполняется при $x^2<10^{-6}$, т.е. при $x<10^{-3}$.

6) Вместе с тем, как бы ни было близко к нулю положительное значение основания x, ему соответствует некоторая точка графика, находящаяся на этом именно расстоянии от оси OY; поэтому, по мере того, как переменная x, оставаясь положительной, будет приближаться к нулю, точки графика степени x^{-2} будут все более приближаться к оси OY и для достаточно малых значений переменной x

становиться сколь угодно близкими к оси OY, т. е. асимптотически приближаться к ней.

7) Ветвь графика степени x^{-2}, расположенную во второй четверти, можно построить, отразив ветвь, расположенную в первой четверти, в оси OY. Это следует из того, что эти ветви симметричны по отношению к оси OY.

5. Таблица чисел, обратных данным числам. С помощью графика зависимости $y=x^{-1}$ (черт. 13) можно — в пределах этого графика — по заданному числу x находить соответствующее ему обратное число $\frac{1}{x}$.

Если график вычерчен на миллиметровой бумаге с достаточной точностью и в надлежащем масштабе, то число $\frac{1}{x}$ можно найти по графику с точностью до 2 десятичных знаков.

Однако ограниченность пределов, для которых построен график, и недостаточная степень точности, с которой можно прочесть по графику искомое число, заставляют предпочесть этому способу нахождения чисел, обратных данным числам, способ использования таблиц; такие таблицы чисел, обратных данным числам, составлены и включены в сборники таблиц.

В «Четырехзначных математических таблицах для средней школы» В. М. Брадиса эти таблицы помещены под названием «Значения дробей вида $\frac{1}{n}$». В таблицах автором указаны и необходимые поправки.

Эти поправки вычисляются с помощью линейной интерполяции (гл. I, § 2, п. 5).

Так как с возрастанием основания x степень x^{-1} убывает, то при переходе от какого-либо значения степени x^{-1} к значению той же степени при большем основании поправки приходится не прибавлять, а вычитать.

Например, найдя по таблице, что

$$\frac{1}{1{,}632}=0{,}6127,\quad \frac{1}{1{,}633}=0{,}6124,$$

и желая найти значение дроби $\frac{1}{1{,}6325}$, мы должны из числа 0,6127 вычесть указанную в таблице поправку 2, что даст в результате число 0,6125.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что при $a \neq 0$ и $b \neq 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^{m}.$$

2. Освободить от степеней с отрицательными показателями дробь:

$$\frac{a^{-4}b^{5}c^{-2}}{x^{-1}y^{-2}z^{3}}.$$

Указание. Умножить числитель и знаменатель дроби на произведение $a^4 \cdot c^2 \cdot x \cdot y^2$.

3. Выполнить действия:

$$\frac{15a^3b^{-2}}{16x^5y^{-4}} \cdot \frac{12a^{-4}b}{25x^{-7}y^2};$$

$$\frac{a^{-2}x^4y^{-6}}{b^3c^{-4}z^{-5}} : \frac{a^{-3}b^{-5}x^3}{c^{-5}y^6z^{-7}};$$

$$\left(\frac{a^5b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^{-1}$$

сначала без предварительного освобождения, а затем с освобождением выражений от степеней с отрицательными показателями.

4. Освободить от степеней с отрицательными показателями и сократить дробь

$$\frac{a^4 + 2a^2 - 16a^{-4} - 32a^{-6}}{a + 4a^{-1} + 4a^{-3}}.$$

Указание. Умножить числитель и знаменатель дроби на a^6, т. е. на степень буквы a с положительным показателем, равным наибольшему из всех абсолютных значений отрицательных показателей.

Ответ. $\dfrac{(a^2 - 2)(a^4 + 4)}{a^3}$.

5. Записать без знаменателей, пользуясь степенями с отрицательными показателями, следующие выражения:

$$a^n - \frac{1}{a^n}; \quad \frac{1}{x^{m-n}}; \quad \frac{a}{x^4} - \frac{b}{x^2};$$

$$1 - \frac{1}{x}; \quad \frac{1}{1+x}; \quad \frac{1}{(1+x)^n};$$

$$\frac{1}{1+x^n}; \quad \left(\frac{1}{1+x}\right)^n.$$

6. Доказать, что если $a + a^{-1} = b$, то

$$a^3 + a^{-3} = b^3 - 3b.$$

Указание. Выразить сумму кубов и сумму квадратов через сумму оснований.

7. Доказать тождество:

$$(a + a^{-1})^2 - (b + b^{-1})^2 = (ab - a^{-1}b^{-1})(ab^{-1} - a^{-1}b).$$

8. Найти значение многочлена:

$$x^2 - a^{-3}x + a^{-6} - b^{-4}$$

при $x = a^{-3} + b^{-2}$.

9. Построить графики зависимостей:

$$y = x^{-3}; \quad y = (x - 2)^{-3}; \quad y = 2x^{-3}.$$

10. Уравнения

$$x = x^{-1}; \qquad x = x^{-2}; \qquad x = x^{-3}$$

решить алгебраически и графически.

11. Графически решить уравнения:

$$\sqrt{x} = x^{-1}, \qquad \sqrt{x} = x^{-2}, \qquad \sqrt{x} = x^{-3}.$$

ВОПРОСЫ

1. Доказать, что если $-m$ есть целое отрицательное число, то:

1) при условии $a > 1$ имеет место неравенство: $a^{-m} < 1$;

2) при условии $0 < a < 1$ имеет место неравенство: $a^{-m} > 1$.

Указание. Воспользоваться теоремой 2 § 1.

2. Являются ли степени

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-8}, \quad 1{,}3^{-5}$$

правильными или неправильными дробями?

3. Которая из двух степеней больше:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{-4} \text{ или } \left(\frac{7}{8}\right)^{-4}; \quad \left(\frac{4}{9}\right)^{-3} \text{ или } \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}; \quad 1{,}3^{-5} \text{ или } 2{,}7^{-5}?$$

4. Являются ли числа

$$(-2)^{-9}, \quad (-0{,}3)^{-8}$$

положительными или отрицательными?

Какое общее заключение можно сделать о знаке степени с отрицательным показателем?

§ 3. КОРЕНЬ *n*-й СТЕПЕНИ

1. Определение корня. Если n есть целое положительное число, то число b, n-я степень которого равна данному числу a, называется корнем n-й степени из числа a.

Нахождение корня n-й степени из данного числа a называется извлечением корня n-ой степени из числа a; число a, из которого извлекается корень n-й степени, называется подкоренным числом; число n, указывающее, корень которой степени извлекается из данного числа a, называется показателем корня.

Для корня n-й степени из числа a введено обозначение $\sqrt[n]{a}$, так что равенство

$$\sqrt[n]{a} = b \tag{1}$$

выражает, что между числами a и b существует зависимость

$$b^n = a. \tag{2}$$

Очевидно, что, и обратно, если между числами a и b существует зависимость (2), то эту зависимость можно записать в виде (1).

Из определения корня n-й степени из числа a следует, что

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

2. Арифметический корень n-й степени. Для того чтобы иметь возможность определить это понятие, докажем следующую теорему.

Теорема. Если α есть положительное (рациональное или иррациональное) число, а n есть натуральное число, то существует одно и только одно положительное число ρ, n-я степень которого равна числу α.

Изложим сущность доказательства этой теоремы, например, для случая $n=3$.

Докажем, что существует положительное число ρ, удовлетворяющее равенству:

$$\rho^3=\alpha.$$

Составим последовательность третьих степеней натуральных чисел:

(1) $$0^3,\ 1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3, \ldots .$$

Если какой-либо из членов последовательности (1), например член 5^3, равен числу α, то $\rho=5$.

Если же ни один из членов последовательности (1) не равен числу α, то в этой последовательности существуют два смежных члена, между которыми заключается число α, так как, с одной стороны, число 0 заведомо меньше, чем положительное число α, а, с другой стороны, члены последовательности (1) неограниченно возрастают. Пусть число α заключается, например, между членами 5^3 и 6^3; тогда будут иметь место соотношения:

(2) $$5^3<\alpha<6^3,\quad 6-5=1.$$

Теперь разделим промежуток между числами 5 и 6, отличающимися между собой на 1, на 10 равных частей и составим последовательность:

(3) $$5^3;\ 5{,}1^3;\ 5{,}2^3;\ 5{,}3^3;\ 5{,}4^3;\ 5{,}5^3;\ 5{,}6^3;\ 5{,}7^3;\ 5{,}8^3;\ 5{,}9^3;\ 6^3.$$

Если какой-либо из членов последовательности (3), например член $5{,}7^3$, равен числу α, то $\rho=5{,}7$.

Если же ни один из членов последовательности (3) не равен числу α, то, в силу первого из соотношений (2), в этой последовательности существуют два смежных члена, между которыми заключается число α. Пусть число α заключается, например, между числами $5{,}7^3$ и $5{,}8^3$; тогда будут иметь место соотношения:

(4) $$5{,}7^3<\alpha<5{,}8^3;\quad 5{,}8-5{,}7=\frac{1}{10}.$$

Теперь разделим промежуток между числами 5,7 и 5,8, отличающимися между собой на 0,1, на 10 равных частей и составим последовательность:

(5) $$5{,}7^3;\ 5{,}71^3;\ 5{,}72^3;\ 5{,}73^3;\ 5{,}74^3;\ 5{,}75^3;\ 5{,}76^3;\ 5{,}77^3;\ 5{,}78^3;\ 5{,}79^3;\ 5{,}8^3.$$

Если какой-либо из членов последовательности (5), например член $5{,}71^3$, равен числу α, то $\rho=5{,}71$.

Если же ни один из членов последовательности (5) не равен числу α, то, в силу первого из соотношений (4), в этой последовательности существуют два смежных члена, между которыми заключается число α. Пусть число α заключается, например, между членами $5{,}71^3$ и $5{,}72^3$; тогда будут иметь место соотношения:

$$(6) \qquad 5{,}71^3 < \alpha < 5{,}72^3;\ 5{,}72-5{,}71=\frac{1}{100}.$$

Последовательно повторяя приведенные рассуждения, мы найдем 1) либо некоторую конечную десятичную дробь $5{,}71\ldots\lambda$ (где λ есть ее последний десятичный знак), удовлетворяющую равенству:

$$5{,}71\ldots\lambda^3=\alpha,$$

так что окажется, что $\rho=5{,}71\ldots\lambda$, 2) либо две числовые последовательности:

$$(7) \qquad 5;\ 5{,}7;\ 5{,}71;\ldots,$$

$$(8) \qquad 6;\ 5{,}8;\ 5{,}72\ldots,$$

члены которых удовлетворяют соотношениям:

$$(9) \qquad 5<5{,}7<5{,}71<\ldots<5{,}72<5{,}8<6;$$

$$(10) \qquad 6-5=1;\ 5{,}8-5{,}7=\frac{1}{10};\ 5{,}72-5{,}71=\frac{1}{100};\ldots;$$

$$(11) \qquad 5^3<5{,}7^3<5{,}71^3<\ldots<\alpha<\ldots5{,}72^3<5{,}8^3<6^3.$$

Из соотношений (9) и (10) следует, что последовательности (7) и (8) образуют двойную последовательность.

Легко видеть, что число ρ, определяемое этой двойной последовательностью, есть именно то число, которое удовлетворяет неравенству:

$$\rho^3=\alpha.$$

В самом деле, число ρ^3 определяется двойной последовательностью:

$$5^3<5{,}7^3<5{,}71^3<\ldots<5{,}72^3<5{,}8^3<6^3$$

(гл. I, § 3, п. 5,3°). Но в то же время число α удовлетворяет соотношению (11). Поэтому

$$\rho^3=\alpha$$

(гл. I, § 3, п. 1,6°).

Теперь допустим, что, кроме числа ρ, существует также число σ, 3-я степень которого равна числу α, т. е. что

$$\sigma^3=\rho^3.$$

Но это равенство возможно только в том случае, если $\sigma=\rho$, так как допущение $\sigma>\rho$ влечет за собой неравенство $\sigma^3>\rho^3$, а допущение $\sigma<\rho$ — неравенство $\sigma^3<\rho^3$.

Определение. Если α есть положительное число, а n есть натуральное число, то положительное число ρ, n-я степень которого равна положительному числу α, называется *арифметическим корнем n-й степени из числа α*.

При нахождении корня n-й степени из данного числа необходимо различать следующие случаи.

1) Если показатель n — четное число, а a — положительное число, то существуют *два* числа, служащие корнями n-й степени из числа a; эти числа имеют одно и то же абсолютное значение, но противоположные знаки, т. е. являются противоположными числами.

Примеры. $\sqrt[6]{64}=+2$ и $\sqrt[6]{64}=-2$;
$\sqrt{0{,}0001}=+0{,}01$ и $\sqrt{0{,}0001}=-0{,}01$.

2) Если показатель n — нечетное число, а a — положительное число, то существует положительное число, служащее корнем n-й степени из числа a.

Примеры. $\sqrt[5]{32}=2$; $\sqrt[3]{1{,}728}=1{,}2$.

3) Если показатель n — нечетное число, а a — отрицательное число, то существует отрицательное число, служащее корнем n-й степени из числа a.

Примеры. $\sqrt[5]{-32}=-2$; $\sqrt[3]{-1{,}728}=-1{,}2$.

4) Если показатель n — четное число, а a — отрицательное число, то не существует числа, которое могло бы служить корнем n-й степени из числа a.

Это объясняется тем, что не существует числа, четная степень которого была бы отрицательным числом.

5) Если n — целое положительное число, а подкоренное число a равно нулю, то корнем n-й степени из числа a служит число 0:

$$\sqrt[n]{0}=0,$$

так как

$$0^n=0.$$

Из рассмотрения этих случаев видно, что для нахождения корня n-й степени из числа a во всех тех случаях, когда он существует, достаточно знать положительный корень n-й степени из *абсолютного значения* этого числа, т. е. арифметический корень из этого значения.

3. Свойства арифметического корня. Арифметический корень n-й степени обладает следующими основными свойствами:

1°. *Корень из произведения.* Если $a>0$, $b>0$, $c>0$, то

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}. \tag{1}$$

В самом деле,

$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n(\sqrt[n]{c})^n$ (по правилу возведения в степень произведения) $=abc$ (по определению корня);

вместе с тем произведение $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}$ есть положительное число.

Следовательно, это произведение действительно представляет собой арифметический корень n-й степени из числа abc.

Арифметический корень какой-либо степени из произведения, сомножители которого — положительные числа, равен произведению арифметических корней той же степени из этих сомножителей.

Равенство (1) верно также и в том случае, если один, по крайней мере, из сомножителей a, b, c равен нулю, так как при этом условии каждая из частей равенства (1) обращается в нуль.

Примеры.

1) $\sqrt[4]{16\cdot625}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{625}=2\cdot5=10;$

2) $\sqrt[3]{27\cdot216}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{216}=3\cdot6=18;$

3) $\sqrt{a^4b^6}=\sqrt{a^4}\cdot\sqrt{b^6};$

4) $\sqrt{(1-a)^2b^4}=\sqrt{(1-a)^2}\cdot\sqrt{b^4};$

5) $\sqrt[4]{(a-b)^2c^3}=\sqrt[4]{(a-b)^2}\cdot\sqrt[4]{c^3}.$

2°. *Корень из дроби.* Если $a>0$, $b>0$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \tag{2}$$

В самом деле,

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}$$

(по правилу возведения в степень дроби)$=\frac{a}{b}$(по определению корня); вместе с тем дробь $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ есть положительное число.

Следовательно, эта дробь действительно представляет собой арифметический корень n-й степени из числа $\frac{a}{b}$.

Арифметический корень какой-либо степени из дроби, числитель и знаменатель которой — положительные числа, равен частному от деления арифметического корня той же степени из числителя на арифметический корень той же степени из знаменателя.

Равенство (2) верно также и в том случае, если $a=0$, так как при этом условии каждая из частей равенства (2) обращается в нуль.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{3}{5};$

2) $\sqrt[6]{\frac{64}{729}}=\frac{\sqrt[6]{64}}{\sqrt[6]{729}}=\frac{2}{3};$

3) $\sqrt{\frac{a^4}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{b^2}}$, где $b \neq 0$;

4) $\sqrt[4]{\frac{(a-b)^2}{c^6 d}} = \frac{\sqrt[4]{(a-b)^2}}{\sqrt[4]{c^6}\,\sqrt[4]{d}}$, где $c \neq 0$, $d > 0$;

5) $\sqrt[5]{\frac{a^3}{(b-c)^2}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{(b-c)^2}}$, где $a \geqslant 0$, $b \neq c$.

3°. *Корень из степени.* Если число представляет собой степень положительного числа a, показатель которой m делится на число n, так что $m=nk$, то арифметический корень n-й степени из степени a^m может быть найден по следующему правилу:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^k.$$

В самом деле, a^k — положительное число и

$$(a^k)^n = a^{nk} = a^m,$$

так что степень a^k действительно есть арифметический корень n-й степени из числа a^m.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{a^{12}} = a^4$;

2) $\sqrt{(a-b)^4} = (a-b)^2$;

3) $\sqrt[5]{a^{10}(b-c)^5} = a^2(b-c)$, где $b > c$;

4) $\sqrt[3]{\frac{a^6}{(b-c)^3}} = \frac{a^2}{b-c}$, где $b > c$.

Арифметический корень n-й степени из данной степени a^m, основание a которой есть положительное число и показатель которой m делится на показатель корня n, получается путем возведения того же основания a в степень, равную частному от деления показателя m данной степени на показатель корня n.

4°. *Корень из одночлена.* Применяя правила 1°, 2°, 3°, мы можем извлечь корень из одночлена.

Примеры.

1) $\sqrt{125a^3b^{12}} = 5ab^4$, где $a > 0$;

2) $\sqrt[7]{a^{14}(b-c)^{7k}} = a^2(b-c)^k$, где $b > c$;

3) $\sqrt[5]{\frac{32a^{10}b^{5m}}{c^{5n+15}}} = \frac{2a^2b^m}{c^{n+3}}$, где $b > 0$, $c > 0$.

При извлечении корня n-й степени из одночлена могут быть применены следующие приемы:

а) Если среди множителей произведения, из которого требуется извлечь корень n-й степени, имеются степени, показатели которых делятся на показатель корня, то, применяя правила 1° и 3°, извлекают корень из этих степеней, оставляя остальные множители под знаком корня. Это преобразование называется вынесением множителя за знак корня.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{a^{12}bc^3} = a^4c\sqrt[3]{b}$, где $b>0$, $c>0$;

2) $\sqrt[5]{a^8b^2c^{12}} = \sqrt[5]{a^5c^{10}\cdot a^3b^2c^2} = ac^2\sqrt{a^3b^2c^2}$, где $a>0$;

3) $\sqrt[4]{\dfrac{a^5}{b^8c^2}} = \dfrac{a}{b^2}\sqrt[4]{\dfrac{a}{c^2}}$, где $a>0$, $b\neq0$, $c\neq0$.

б) Если требуется извлечь корень n-й степени из дробного выражения, то, умножая числитель и знаменатель этого выражения на некоторый множитель, подобранный так, чтобы знаменатель сделался n-й степенью, извлекают корень из полученного дробного выражения, после чего данный корень заменится произведением некоторого множителя на корень той же степени из целого выражения. Это преобразование называется освобождением подкоренного выражения от знаменателя.

Примеры.

1) $\sqrt{\dfrac{a}{b^5}} = \sqrt{\dfrac{ab}{b^6}} = \dfrac{1}{b^3}\sqrt{ab}$, где $a>0$, $b>0$;

2) $\sqrt{\dfrac{9ab^3}{c^2d}} = \sqrt{\dfrac{9ab^3d}{c^2d^2}} = \dfrac{3b}{cd}\sqrt{abd}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$;

3) $\sqrt[3]{\dfrac{8a}{b^2c^3}} = \sqrt[3]{\dfrac{8ab}{b^3c^3}} = \dfrac{2}{bc}\sqrt{ab}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$;

4) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{b}{a^4}} = \sqrt[4]{\dfrac{a-b}{a^4}} = \dfrac{1}{a}\sqrt[4]{a-b}$, где $a>0$, $a>b$;

5) $\sqrt[3]{\dfrac{ab^5}{c^{3n+1}}} = \sqrt[3]{\dfrac{ab^5c^2}{c^{3n+3}}} = \dfrac{b}{c^{n+1}}\sqrt[3]{ab^2c^2}$, где $a>0$, $b>0$, $c>0$.

4. Алгебраический корень n-й степени. Как мы видели в п. 2, выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет:

1) два значения (положительное и отрицательное), если a — положительное число и n — четное число;

2) одно значение (положительное), если a — положительное число и n — нечетное число;

3) одно значение (отрицательное), если a — отрицательное число и n — нечетное число.

Каждое из этих значений выражения $\sqrt[n]{a}$ называется **алгебраическим корнем** n-й степени из числа a. Таким образом, арифметический корень n-й степени из числа a есть один из алгебраических корней n-й степени из числа a.

Обратим внимание на следующее:

1) Отрицательный корень четной степени из положительного числа a есть число, противоположное арифметическому корню той же степени из этого числа: если $a > 0$, то $-\sqrt[2k]{a}$ и $+\sqrt[2k]{a}$ — противоположные числа.

Поэтому, если находят алгебраические корни четной степени из положительного числа, то пишут сразу оба знака:

$$\sqrt[4]{81} = \pm 3;\ \sqrt[4]{625} = \pm 5.$$

2) Корень нечетной степени из отрицательного числа a есть отрицательное число, противоположное арифметическому корню той же степени из положительного числа $-a$: если $a < 0$, то

$$\sqrt[2k+1]{a} = -\sqrt[2k+1]{-a}.$$

В самом деле,

$$\left(-\sqrt[2k+1]{-a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{-a}\right)^{2k+1} = -(-a) = a.$$

Например:

1) $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4;$

2) $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2.$

Таким образом, каждый корень нечетной степени имеет единственное значение, причем корень нечетной степени из положительного числа есть положительное число, а корень нечетной степени из отрицательного числа есть отрицательное число.

Для алгебраических корней нечетной степени сохраняются правила 1° — 3° извлечения корней из произведения, дроби и степени, установленные для арифметических корней (§ 1, п.3). В самом деле, если n — нечетное число, то равенства

(1) $$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\ \sqrt[n]{c},$$

(2) $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

(3) $$\sqrt[n]{a^{nk}} = a^k$$

верны при положительных, отрицательных или нулевых (но не обращающих в нуль знаменателя дроби) значениях букв a, b, c, так как: 1) каждый корень нечетной степени имеет единственное значение и 2) этими значениями корней, находящихся в левой части равенств (1) — (3), как раз и служат их правые части; в этом мы убеждаемся путем возведения этих правых частей равенств (1)—(3) в n-ю степень.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{\dfrac{a^{12}b}{c^6}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^{12}}\ \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{c^6}} = \dfrac{a^4}{c^2}\sqrt[3]{b}$, где $c \neq 0$;

2) $\sqrt[5]{(a-b)^{10}c^5} = (a-b)^2 c$.

5. Вынесение множителя за знак корня и введение множителя под знак корня. Если требуется извлечь корень n-й степени из произведения $a^m b$, среди множителей которого имеется степень a^m с показателем m, делящимся на показатель корня n, то, применяя правила 1° и 3° (§ 1, п. 3 и 4) и находя при четном показателе n арифметический корень, а при нечетном показателе n — алгебраический корень, получим следующие равенства:

1) если n — нечетное число, то

$$(1)\qquad \sqrt[n]{a^m b} = a^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{b},$$

где a и b — любые числа;

2) если n — четное число и $\frac{m}{n}$ — также четное число, то

$$(2)\qquad \sqrt[n]{a^m b} = a^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{b},$$

где a— любое число, а b — неотрицательное число;

3) если n —четное число, а $\frac{m}{n}$ — нечетное число, то

$$(3)\qquad \sqrt[n]{a^m b} = \begin{cases} a^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{b} & \text{при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0; \\ -a^{\frac{m}{n}}\sqrt[n]{b} & \text{при } a \leqslant 0,\ b \geqslant 0. \end{cases}$$

Преобразование, выполняемое по этому правилу, называется вынесением множителя за знак корня.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{\dfrac{a^{12}b}{c^6}} = \dfrac{a^4}{c^2}\sqrt[3]{b}$, где $c \neq 0$;

2) $\sqrt[4]{\dfrac{a^8 b}{c^2}} = a^2\sqrt[4]{\dfrac{b}{c^2}}$, где $b \geqslant 0$, $c \neq 0$;

$$3)\ \sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0; \end{cases}$$

$$4)\ \sqrt{a^6 b} = \begin{cases} a^3\sqrt{b} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0, \\ -a^3\sqrt{b} \text{ при } a \leqslant 0,\ b \geqslant 0. \end{cases}$$

Обозначая частное $\frac{m}{n}$ буквой k, мы можем прочесть равенства (1) — (3) справа налево и записать их в следующем виде:

1) если n — нечетное число, то

$$a^k\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{kn}b},$$

где a и b — любые числа;

2) если n — четное число и k — также четное число, то

$$a^k\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{kn}b},$$

где a — любое число, а b — неотрицательное число;

3) если n — четное число, а k — нечетное число, то

$$a^k\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{kn}b} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$$

и

$$a^k\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^{kn}b} \text{ при } a \leqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Преобразование, выполняемое по этому правилу, называется **введением множителя под знак корня**.

Примеры.

1) $a^5\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^{15}b}$, где a и b — любые числа;

2) $a^4\sqrt{b} = \sqrt{a^8 b}$, где a — любое число, а $b \geqslant 0$;

$$3)\ a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0, \\ -\sqrt{a^2 b} \text{ при } a \leqslant 0,\ b \geqslant 0; \end{cases}$$

$$4)\ a^3\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^6 b} \text{ при } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0, \\ -\sqrt{a^6 b} \text{ при } a \leqslant 0,\ b \geqslant 0. \end{cases}$$

6. Степень с дробным показателем. Теорема об извлечении корня n-й степени из степени (§1, п. 3) относится к тому случаю, когда показатель m степени, из которой извлекается корень, делится на показатель n корня; в формуле

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

в виде дроби $\frac{m}{n}$ обозначается частное от деления целого положительного числа m на целое положительное число n.

Таким образом, эта формула не обладает общностью: в ней m и n обозначают не любые целые положительные числа. Для устранения этого неудобства (а также из других соображений, которые выяснятся позже) в алгебру введено новое понятие — степень с дробным показателем $a^{\frac{m}{n}}$, где числитель m и знаменатель n — любые целые положительные числа; это понятие определяется следующим образом.

Определение 1. Если $a > 0$, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \tag{1}$$

т. е. степенью основания a с дробным показателем $\frac{m}{n}$ называется арифметический корень n-й степени из степени a^m.

Так, $2^{\frac{3}{5}}$ есть лишь иное обозначение числа $\sqrt[5]{2^3}$; $0{,}12^{0{,}3}$ обозначает число $\sqrt[10]{0{,}12^3}$.

Обратно, число $\sqrt[3]{5^2}$ может получить обозначение $5^{\frac{2}{3}}$, а число $\sqrt[10]{3^7}$ — обозначение $3^{0{,}7}$.

Следствие. Из равенства (1) следует, что

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m, \tag{2}$$

так как

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n = a^m.$$

Замечания. 1. Очевидно, что в частном случае

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\text{, где } a>0.$$

2. Определение 1 остается в силе и в том случае, если m делится на n, т. е. если $m = nk$, где k—натуральное число, так как в этом случае

$$a^{\frac{m}{n}} = a^k \text{ и } \sqrt[n]{a^m} = a^k.$$

7. Основное свойство степени с дробным показателем. Докажем, что значение степени $a^{\frac{m}{n}}$ с дробным показателем $\frac{m}{n}$ не изменится, если дробь $\frac{m}{n}$ будет заменена равной ей дробью $\frac{m'}{n'}$.

Теорема 1. Если $\frac{m'}{n'} = \frac{m}{n}$, то $a^{\frac{m'}{n'}} = a^{\frac{m}{n}}$.

Доказательство. Для того чтобы доказать равенство двух положительных чисел

$$a^{\frac{m}{n}} \text{ и } a^{\frac{m'}{n'}}$$

при условии $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$, т. е. при условии $mn'=m'n$, возведем эти числа в одну и ту же степень nn'; пользуясь следствием, получим:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{nn'}=\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{n}\right]^{n'}=\left(a^{m}\right)^{n'}=a^{mn'},$$

$$\left(a^{\frac{m'}{n'}}\right)^{nn'}=\left[\left(a^{\frac{m'}{n'}}\right)^{n'}\right]^{n}=\left(a^{m'}\right)^{n}=a^{m'n}.$$

Но $mn'=m'n$; следовательно, $a^{mn'}=a^{m'n}$ и (по теореме 3, § 1) $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m'}{n'}}$.

8. Действия над степенями с дробными показателями. Действия над степенями с дробными показателями могут выполняться по тем же правилам, по которым выполняются действия над степенями с целыми показателями.

1°. *Умножение.* Докажем справедливость формулы:

$$a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}. \tag{3}$$

Доказательство. Так как

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mq}{nq}},\quad a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{pn}{qn}},\quad a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}=a^{\frac{mq+pn}{nq}},$$

то формула (3) может быть представлена в виде:

$$a^{\frac{mq}{nq}}\cdot a^{\frac{pn}{qn}}=a^{\frac{mq+pn}{nq}}. \tag{3'}$$

Левая и правая части этой формулы — положительные числа; для доказательства равенства этих чисел возведем их в одну и ту же степень nq; пользуясь следствием, получим:

$$\left(a^{\frac{mq}{nq}}\cdot a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{nq}=\left(a^{\frac{mq}{nq}}\right)^{nq}\cdot\left(a^{\frac{pn}{qn}}\right)^{nq}=a^{mq}\cdot a^{pn}=a^{mq+pn};$$

$$\left(a^{\frac{mq+pn}{nq}}\right)^{nq}=a^{mq+pn}.$$

Оказалось, что nq-е степени двух положительных чисел равны между собой; следовательно (по теореме 3, § 1), равны и основания, т. е.

$$a^{\frac{m}{n}}\,a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}.$$

2°. *Возведение в степень.* Докажем справедливость формулы:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{mp}{nq}}. \tag{4}$$

Доказательство. Возведем левую и правую части этой формулы в одну и ту же степень nq; при возведении в эту степень левой части мы сначала найдем, что

$$\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p,$$

а затем, что

$$\left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p\right]^n = \left[\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right]^p = (a^m)^p = a^{mp};$$

возведя же правую часть в степень nq, мы сразу получим, что

$$\left(a^{\frac{mp}{nq}}\right)^{nq} = a^{mp}.$$

Оказалось, что nq-е степени двух положительных чисел равны между собой; следовательно (по теореме 3, § 1), равны и основания, т. е.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}.$$

3°. *Деление.* Докажем справедливость формулы:

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}, \text{ где } \frac{m}{n} > \frac{p}{q}. \tag{5}$$

Доказательство. Так как

$$a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}},$$

то формула верна.

4°. *Извлечение корня.* Докажем справедливость формулы:

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{np}}. \tag{6}$$

Доказательство. Так как

$$\left(a^{\frac{m}{np}}\right)^p = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}},$$

то формула верна.

9. Степень с отрицательным дробным показателем. Понятие о степени с отрицательным дробным показателем устанавливается с помощью следующего определения.

Определение 2. Если $a > 0$, то (7) $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, т. е. степенью основания a с отрицательным дробным показателем $-\frac{m}{n}$ называется дробь, числитель которой есть единица, а знаменатель — степень того же основания a с положительным показателем $\frac{m}{n}$.

10. Действия над степенями с положительными и отрицательными дробными показателями могут выполняться по тем же правилам, по которым выполняются действия над степенями с целыми показателями. Для степеней с положительными дробными показателями это установлено в п. 8.

Доказательство формул

(8) $$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

и

(9) $$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

читатели, пользуясь определением 2, выполнят самостоятельно. Из формул (8) и (9) следует, что формула

$$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$$

верна и в том случае, если $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$, так как и в этом случае

$$a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Пример 1. Разложить на множители выражение

$$x\sqrt[3]{a^2} - x^2\sqrt[3]{a^4} + x^3\sqrt[3]{a^5}.$$

Решение. Представим выражение в виде

$$x \cdot a^{\frac{2}{3}}\left(1 - x \cdot a^{\frac{2}{3}} + x^2 \cdot a\right).$$

Пример 2. Разложить на множители выражение

$$a^3 - 2\sqrt[4]{a^2b^3} - a^2\sqrt[6]{a^3b^2} + 2b\sqrt[12]{b}.$$

Решение. Представив выражение в виде

$$a^3 - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 2b^{\frac{13}{12}},$$

применим способ группировки:

$$a^{\frac{5}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}\right) - 2b^{\frac{3}{4}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{5}{2}} - 2b^{\frac{3}{4}}\right).$$

Пример 3. Сократить дробь:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 16x^{-\frac{2}{3}} - 32x^{-1}}{x^{\frac{1}{6}} + 4x^{-\frac{1}{6}} + 4x^{-\frac{1}{2}}}.$$

Решение. Сначала освободимся от степеней с отрицательными показателями; для этого умножим числитель и знаменатель на x^1:

$$\frac{x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} - 16x^{\frac{1}{3}} - 32}{x^{\frac{7}{6}} + 4x^{\frac{5}{6}} + 4x^{\frac{1}{2}}},$$

Теперь положим $x^{\frac{1}{6}} = u$:

$$\frac{u^{10}+2u^8-16u^2-32}{u^7+4u^5+4u^3}.$$

Разлагаем числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{(u^2+2)^2(u^2-2)(u^4+4)}{u^3(u^2+2)^2}$$

и выполняем сокращение:

$$\frac{(u^2-2)(u^4+4)}{u^3}.$$

Следовательно, данная дробь равна дроби:

$$\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+4\right)}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

Пример 4. Установить, которое из чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$ больше.

Решение. Для сравнения чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$, т. е. чисел $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$, найдем их шестые степени:

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 2^3 = 8, \qquad \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 3^2 = 9.$$

Так как $9 > 8$, то и $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ (теорема 3, § 1).

11. Изменение степени с дробным показателем. Об изменении степени с дробным показателем $a^{\frac{m}{n}}$ в зависимости от изменения основания a можно судить на основании следующих теорем.

Теорема 1. Если a и b — положительные числа и $a = b$, то $a^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{m}{n}}$, т. е. при одном и том же показателе степени равным основаниям соответствуют и равные степени.

Доказательство. Для сравнения положительных чисел $a^{\frac{m}{n}}$ и $b^{\frac{m}{n}}$ можно сравнить их n-е степени; найдем их:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m, \qquad \left(b^{\frac{m}{n}}\right)^n = b^m.$$

Так как $a = b$, то и $a^m = b^m$(теорема 1, § 1), т. е.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \left(b^{\frac{m}{n}}\right)^n.$$

Но отсюда (по теореме 3, § 1) следует, что

$$a^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{m}{n}}.$$

Теорема 2. Если a и b — положительные числа и $a > b$, а m и n — целые положительные числа, то $a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}$, т. е. если основания степеней — положительные числа, то при одном и том же показателе степени большему основанию соответствует и большая степень (и, следовательно, меньшему основанию — меньшая степень).

Доказательство. Для сравнения положительных чисел $a^{\frac{m}{n}}$ и $b^{\frac{m}{n}}$ можно сравнить их n-е степени. Найдем их:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m, \quad \left(b^{\frac{m}{n}}\right)^n = b^m.$$

Так как $a > b$, то и $a^m > b^m$ (теорема 2, § 1), т. е.

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n > \left(b^{\frac{m}{n}}\right)^n.$$

Но отсюда (по теореме 4, § 1) следует, что

$$a^{\frac{m}{n}} > b^{\frac{m}{n}}.$$

Теорему 2 можно сформулировать и так: если основание степени с положительным дробным показателем возрастает, то возрастает и степень.

Следствие. Если $\frac{m}{n}$ есть положительное число, то:

1) при условии $a > 1$ имеет место неравенство $a^{\frac{m}{n}} > 1$,

2) при условии $0 < a < 1$ имеет место неравенство $a^{\frac{m}{n}} < 1$.

В самом деле,

1) если $a > 1$, то $a^{\frac{m}{n}} > 1^{\frac{m}{n}}$, т. е. $a^{\frac{m}{n}} > 1$;

2) если $0 < a < 1$, то $a^{\frac{m}{n}} < 1^{\frac{m}{n}}$, т. е. $a^{\frac{m}{n}} < 1$.

Если мы условимся каждое целое число рассматривать как дробь со знаменателем 1, то это следствие может быть сформулировано так: при возведении какой-либо дроби в положительную степень мы получаем дробь того же характера, что и основание (т.е. вновь неправильную или вновь правильную дробь).

12. График зависимости $y = x^{\frac{m}{n}}$. В гл. II, § 1, п. 6 и 9 и гл. I, § 2, п. 5 были рассмотрены графики зависимостей:

$$y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = \sqrt{x}, \text{ т. е. } y = x^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что эти зависимости представляют собой виды зависимости $y = x^{\frac{m}{n}}$, соответствующие случаям: $\frac{m}{n} = 2$, $\frac{m}{n} = 3$, $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим некоторые общие свойства зависимости $y = x^{\frac{m}{n}}$ и ее графика.

1) Так как, по определению, степень $x^{\frac{m}{n}}$ для всех положительных значений переменной x имеет положительное значение, а при $x=0$ равна нулю, то переменная y, определяемая равенством

$$y = x^{\frac{m}{n}}, \tag{1}$$

принимает только неотрицательные значения.

Поэтому график зависимости (1) на всем своем протяжении, т. е. при $x \geqslant 0$, расположен над осью OX.

2) Если $x = 0$, то $x^{\frac{m}{n}} = 0$; если $x = 1$, то $x^{\frac{m}{n}} = 1$.

Следовательно, какое бы значение ни имел показатель $\frac{m}{n}$, график зависимости (1) проходит через начало координат и через точку (1; 1).

3) Если $x_2 > x_1 \geqslant 0$, то $x_2^{\frac{m}{n}} > x_1^{\frac{m}{n}}$ (теорема 2, п. 11). Это означает, что при возрастании переменной x график зависимости (1) во всем промежутке $(0 \leqslant x < \infty)$ поднимается вверх.

Свойствами 1—3 обладают графики зависимостей: $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{2}}$.

Построим графики зависимостей:

$$y=x^{\frac{3}{2}} \text{ и } y=x^{\frac{2}{3}}.$$

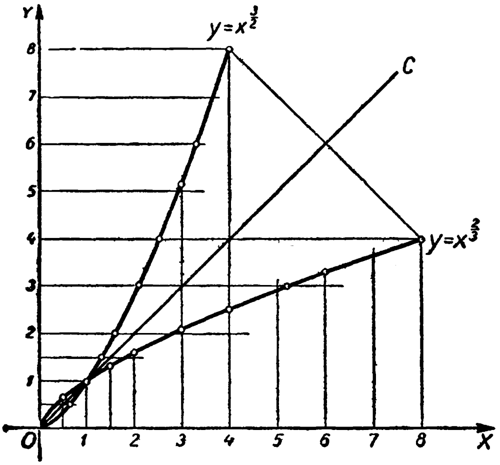
Для этого, пользуясь таблицами квадратных и кубических корней, составим следующие таблицы соответствующих значений переменных x и y:

x	$y = x^{\frac{3}{2}}$
0	0
0,5	0,35
1	1
1,5	1,8
2	2,83
3	5,2
4	8

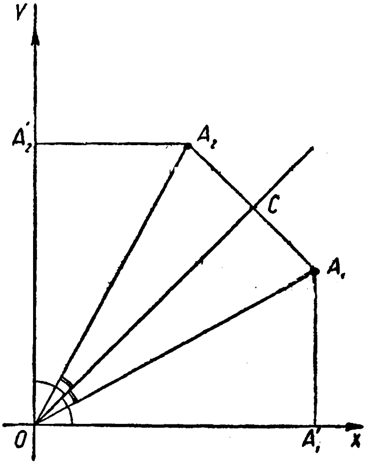
x	$y = x^{\frac{2}{3}}$
0	0
0,5	0,63
1	1
1,5	1,31
2	1,59
3	2,08
4	2,52
6	3,3
8	4

Эти таблицы позволяют начертить следующие графики (черт. 15): Из рассмотрения этих графиков можно заключить, что они обладают еще двумя свойствами.

4) График зависимости $y=x^{\frac{3}{2}}$ расположен в промежутке (0...1) под биссектрисой *OC* координатного угла, а в промежутке (1...∞)— над ней; график зависимости $y=x^{\frac{2}{3}}$ расположен в промежутке (0...1) над биссектрисой *OC* координатного угла, а в промежутке (1...∞) — под ней.



Черт. 15



Черт. 16

Заметив, что биссектриса *OC* имеет уравнение $y=x$, объясним, почему это происходит.

а) Если $0<x<1$, то, согласно следствию, $x^{\frac{3}{2}-1}<1$, т. е. $x^{\frac{3}{2}}<x$, а это обозначает, что в каждой точке промежутка (0...1) ордината $x^{\frac{3}{2}}$ меньше ординаты биссектрисы.

Если же $1<x<\infty$, то $x^{\frac{3}{2}-1}>1$, т. е. $x^{\frac{3}{2}}>x$, так что в каждой точке промежутка (1...∞) ордината $x^{\frac{3}{2}}$ больше ординаты биссектрисы.

б) Если $0<x<1$, то $x^{1-\frac{2}{3}}<1$, т. е. $x<x^{\frac{2}{3}}$, а это означает, что в каждой точке промежутка (0...1) ордината $x^{\frac{2}{3}}$ больше ординаты биссектрисы.

Если же $1<x<\infty$, то $x^{1-\frac{2}{3}}>1$, т. е. $x>x^{\frac{2}{3}}$, так что в каждой точке промежутка $(1\ldots\infty)$ ордината $x^{\frac{2}{3}}$ меньше ординаты биссектрисы.

Из этого доказательства видно, что первое расположение графика зависимости $y=x^{\frac{m}{n}}$ относительно биссектрисы координатного угла имеет место в том случае, когда $\frac{m}{n}-1>0$, т. е. $\frac{m}{n}>1$ $\left(\frac{3}{2}>1\right)$, а второе — в том случае, когда $1-\frac{m}{n}>0$, т. е. $\frac{m}{n}<1$ $\left(\frac{2}{3}<1\right)$.

5) Графики зависимостей $y=x^{\frac{3}{2}}$ и $y=x^{\frac{2}{3}}$ расположены симметрично относительно биссектрисы OC координатного угла.

Для доказательства этого свойства графиков предварительно установим следующее условие, необходимое и достаточное для того, чтобы две точки были расположены симметрично относительно биссектрисы OC координатного угла.

Лемма. Для того чтобы точки $A_1(x_1; y_1)$, где $x_1>0$, $y_1>0$, и $A_2(x_2; y_2)$, где $x_2>0$, $y_2>0$, были расположены симметрично относительно биссектрисы OC координатного угла, необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства:

$$x_1=y_2,\ x_2=y_1.$$

Доказательство. Пусть (черт. 16)

$$OA'_1=x_1,\ A'_1A_1=y_1,\ A'_2A_2=x_2,\ OA'_2=y_2.$$

Если A_1 и A_2 — точки, симметричные по отношению к биссектрисе OC, то при перегибании чертежа по биссектрисе OC точка A_1 совпадает с точкой A_2, луч OX — с лучом OY, перпендикуляр $A_1A'_1$ — с перпендикуляром $A_2A'_2$ и точка A'_1 — с точкой A'_2. Следовательно,

$$OA'_1=OA'_2,\ \text{т. е. } x_1=y_2,\quad A'_1A_1=A'_2A_2,\ \text{т. е. } y_1=x_2.$$

Обратно, если имеют место равенства

$$OA'_1=OA'_2 \text{ и } A'_1A_1=A'_2A_2,$$

то при перегибании чертежа по биссектрисе OC луч OX совпадает с лучом OY, точка A'_1 — с точкой A'_2, перпендикуляр A'_1A_1 — с перпендикуляром A'_2A_2 и точка A_1 — с точкой A_2. Следовательно, A_1 и A_2 — точки, симметричные по отношению к биссектрисе OC.

Теперь обратимся к доказательству свойства 5.

Если точка M_1 с координатами $(x_1; y_1)$ принадлежит графику зависимости $y=x^{\frac{3}{2}}$, то

$$y_1=x_1^{\frac{3}{2}}.$$

Точка M_2, симметричная с точкой M_1 относительно биссектрисы OC, имеет координаты x_2 и y_2, связанные, согласно лемме, с координатами x_1 и y_1 равенствами:

$$x_2=y_1=x_1^{\frac{3}{2}},\ y_2=x_1.$$

Но отсюда следует, что точка M_2 принадлежит графику зависимости $y = x^{\frac{2}{3}}$. В самом деле, ее координаты $(x_2;\ y_2)$ связаны этой зависимостью:

$$y_2 = x_1,\quad x_2^{\frac{2}{3}} = \left(x_1^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = x_1,\quad \text{т. е.}\quad y_2 = x_2^{\frac{2}{3}}.$$

Обратно, если точка M_2 с координатами $(x_2;\ y_2)$ принадлежит графику зависимости $y = x^{\frac{2}{3}}$, то $y_2 = x_2^{\frac{2}{3}}$.

Точка M_1, симметричная с точкой M_2 относительно биссектрисы OC, имеет координаты $(x_1;\ y_1)$, связанные, согласно лемме, с координатами $(x_2;\ y_2)$ равенствами:

$$x_1 = y_2 = x_2^{\frac{2}{3}},\quad y_1 = x_2.$$

Но отсюда следует, что точка M_1 принадлежит графику зависимости $y = x^{\frac{3}{2}}$. В самом деле, ее координаты $(x_1;\ y_1)$ связаны этой зависимостью:

$$y_1 = x_2,\quad x_1^{\frac{3}{2}} = \left(x_2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = x_2,\quad \text{т. е.}\quad y_1 = x_1^{\frac{3}{2}}.$$

Итак, перегнув чертеж 16 по биссектрисе OC, мы приведем каждую точку одного из двух графиков в совпадение с некоторой точкой другого графика и, наоборот, каждую точку второго графика — с некоторой точкой первого графика, так что графики совпадут.

6) Свойство 3 состоит в том, что при возрастании переменной x ординаты точек графика зависимости $y = x^{\frac{m}{n}}$ возрастают. Но путем рассмотрения графика нельзя сделать заключение о том, каково это возрастание, будет ли оно неограниченным. Иначе говоря, можно ли утверждать, что ординаты этого графика при своем возрастании могут превзойти всякое данное число G, как бы велико оно ни было. Легко видеть, что это будет именно так. В самом деле, для того чтобы имело место неравенство

$$x^{\frac{m}{n}} > G,$$

достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$x > G^{\frac{n}{m}},$$

так как, если выполняется неравенство $x > G^{\frac{n}{m}}$, то, в силу теоремы 2, имеет место и неравенство

$$x^{\frac{m}{n}} > \left(G^{\frac{n}{m}}\right)^{\frac{m}{n}},$$

т. е. неравенство $x^{\frac{m}{n}} > G$.

Например, для того чтобы степень $x^{\frac{2}{3}}$ превзошла число 100, достаточно, чтобы основание x превзошло число $100^{\frac{3}{2}}$, т. е. число 1000: если $x>1000$, то $x^{\frac{2}{3}}>1000^{\frac{2}{3}}$, т. е. $x^{\frac{2}{3}}>100$.

Итак, при возрастании основания x степень $x^{\frac{m}{n}}$ возрастает неограниченно.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Установите, как расположен каждый из графиков зависимостей $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$, где $x\geqslant 0$, относительно биссектрисы координатного угла.
2. Докажите, что они симметричны относительно этой биссектрисы.

§ 4. ДЕЙСТВИЯ НАД РАДИКАЛАМИ

1. Общее понятие.

Определение. Алгебраическое выражение $\sqrt[n]{A}$, обозначающее результат извлечения корня n-й степени из выражения A, называется радикалом n-й степени.

Выражение A, находящееся под знаком радикала $\sqrt{\ }$, называется подрадикальным выражением. Оно само может содержать радикалы.

Например, выражения

$$\sqrt{\frac{5}{8}},\ \sqrt[3]{\frac{2a^5b}{a-b^3}},\ \sqrt[4]{3a^2+\sqrt{\frac{b^3}{c^4}}}$$

являются радикалами.

Рассмотрим преобразования радикалов и действия над радикалами в предположении, что их значения представляют собой арифметические корни.

2. Приведение радикала к нормальному виду. Если под знаком радикала находится рациональное выражение, то можно выполнить следующие преобразования радикала:

1°. *Сокращение показателя корня и показателя степени подкоренного выражения.* Если подкоренное выражение A радикала $\sqrt[n]{A}$ может быть представлено в виде степени B^m выражения B, где $B>0$, и если показатели m и n имеют общий множитель k, так что $m=km'$, $n=kn'$, то на этот общий множитель k показатели m и n можно разделить. При этом мы получим тождественное равенство:

$$\sqrt[kn']{B^{km'}}=\sqrt[n']{B^{m'}},$$

т. е. равенство, выполняющееся для всех допустимых значений букв, входящих в выражение B.

В самом деле, это равенство есть лишь иная запись равенств

$$B^{\frac{km'}{kn'}}=B^{\frac{m'}{n'}},$$

доказанного в § 3, п. 7.

Примеры.

$$1)\ \sqrt[15]{a^5b^{20}c^{10}} = \sqrt[15]{(ab^4c^2)^5} = \sqrt[3]{ab^4c^2};$$

$$2)\ \sqrt[12]{64a^4b^{2n}} = \sqrt[12]{(8a^2b^n)^2} = \sqrt[6]{8a^2b^n};$$

$$3)\ \sqrt[6n]{\frac{16a^{10}}{9b^6c^{18}}} = \sqrt[6n]{\left(\frac{4a^5}{3b^3c^9}\right)^2} = \sqrt[3n]{\frac{4a^5}{3b^3c^9}}.$$

2°. *Вынесение множителя за знак радикала.* Это преобразование было рассмотрено выше в § 3, п. 3 и п. 5.

3°. *Освобождение подкоренного выражения от знаменателя.* Это преобразование было рассмотрено в § 3, п. 3.

Если радикал упрощен с помощью преобразований 1°—3°, то говорят, что он приведен к нормальному виду.

Примеры.

$$1)\ \sqrt[5]{\frac{a^6}{32x^3}} = \frac{a}{2}\sqrt[5]{\frac{a}{x^3}} = \frac{a}{2x}\sqrt[5]{ax^2};$$

$$2)\ \sqrt[3]{\frac{3}{2a^{2m}}} = \frac{1}{2a^m}\sqrt[3]{12a^m};$$

$$3)\ \sqrt[6]{\frac{4a^8}{b^4}} = \sqrt[6]{\left(\frac{2a^4}{b^2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{2a^4}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt[3]{2ab};$$

$$4)\ \sqrt[4]{\frac{(a-b)^3}{(c-d)^5}} = \frac{1}{(c-d)^2}\sqrt[4]{(a-b)^3(c-d)^3}.$$

3. Приведение радикалов к общему показателю. Если радикалы имеют различные показатели, то их можно привести к общему показателю. Это преобразование основано на тождестве

$$\sqrt[kn']{B^{km'}} = \sqrt[n']{B^{m'}},$$

установленном в п. 2, 1°. В самом деле, из тождественного равенства

$$\sqrt[n']{B^{m'}} = \sqrt[kn']{B^{km'}}$$

следует, что если мы показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножим на одно и то же число, то получим корень, имеющий то же значение, что и данный корень, при всех допустимых значениях букв, входящих в выражение B.

Пользуясь этим, мы можем заменить данные радикалы радикалами с одним и тем же показателем, приняв за этот общий показатель наименьшее кратное всех показателей данных радикалов.

Пример.

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[20]{a^{15}},\ \sqrt[5]{b^2} = \sqrt[20]{b^8},\ \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[20]{c^{14}}.$$

4. Подобные радикалы. В результате приведения какого-либо радикала к нормальному виду мы заменяем этот радикал произведением некоторого рационального выражения на корень из целого алгебраического выражения, которое либо не представляет собой степени, либо является степенью с показателем, взаимно простым с показателем корня.

Произведение рационального алгебраического выражения на корень n-й степени из рационального алгебраического выражения (целого или дробного) также называется радикалом n-й степени, а рациональный сомножитель, стоящий перед корнем n-й степени, называется коэффициентом этого радикала.

Определение. Радикалы, которые отличаются один от другого только коэффициентами или не отличаются один от другого, называются подобными радикалами.

Радикалы, которые не являются подобными, могут после приведения их к нормальному виду оказаться равными подобным радикалам.

Примеры.

1) Так как

$$\sqrt{20}=2\sqrt{5};\quad 3\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{5};\quad 4\sqrt{125}=20\sqrt{5};$$

$$7\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{21}{5}\sqrt{5};\quad \sqrt[4]{\frac{25}{16}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{5};$$

$$3\sqrt{\frac{9}{80}}=\frac{9}{4}\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{9}{20}\sqrt{5},$$

то все данные радикалы могут быть заменены подобными радикалами.

2) Точно так же, выполнив преобразования:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{m^3}}=\frac{1}{m}\sqrt{m};\quad \sqrt[4]{\frac{a^4b^4}{m^3}}=\frac{ab}{m}\sqrt[4]{m},$$

$$\sqrt[8]{m^2}=\sqrt[4]{m};\quad \sqrt[4]{\frac{m}{81}}=\frac{1}{3}\sqrt[4]{m},$$

убеждаемся, что все данные радикалы могут быть заменены подобными радикалами.

3) Имеем:

$$\sqrt{\frac{1}{m}-n}=\frac{1}{m}\sqrt{(1-mn)m};\quad \sqrt{\frac{n^6-mn^7}{mn^2}}=\frac{n^2}{m}\sqrt{(1-mn)m};$$

$$\sqrt{m^3-m^4n}=m\sqrt{(1-mn)m}.$$

Радикалы, полученные после преобразований, подобны.

5. Сложение и вычитание радикалов. Суммой двух или нескольких радикалов называется алгебраическое выражение, которое получается из данных радикалов путем соединения их знаком сложения (плюсом).

Разностью двух радикалов называется алгебраическое выражение, которое получается из данных радикалов путем соединения их знаком вычитания (минусом).

Точно так же, как и в случае вычитания одночлена, вычитание радикала может быть заменено прибавлением радикала, имеющего противоположное числовое значение, т. е. радикала, получающегося из вычитаемого радикала умножением его коэффициента на (—1).

Поэтому алгебраическое выражение, полученное путем соединения нескольких радикалов знаками + и —, всегда можно представить в виде суммы радикалов.

Например:

$$1)\ 15\sqrt{2}+28\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}-11\sqrt{2}-3\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}-4\sqrt{2}-15\sqrt[3]{4}=$$

$$=15\sqrt{2}+28\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}+(-11)\sqrt{2}+\left(-3\tfrac{1}{2}\right)\sqrt[3]{4}+(-4)\sqrt{2}+$$

$$+(-15)\sqrt[3]{4};$$

$$2)\ 2b^2\sqrt{3bc}-5b^2\sqrt{3ac}-8c^2\sqrt{3bc}+20c^2\sqrt{3ac}=$$

$$=2b^2\sqrt{3bc}+(-5b^2)\sqrt{3ac}+(-8c^2)\sqrt{3bc}+20c^2\sqrt{3ac}.$$

Алгебраическое выражение, полученное путем соединения нескольких радикалов знаками + и —, называется алгебраической суммой этих радикалов.

Алгебраическая сумма нескольких подобных радикалов тождественно равна радикалу, который может быть получен путем умножения суммы коэффициентов всех слагаемых радикалов на общий корень, входящий в состав каждого из них.

Например:

$$1)\ 15\sqrt{2}+28\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}-11\sqrt{2}-3\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}-4\sqrt{2}-15\sqrt[3]{4}=$$

$$=[15+(-11)+(-4)]\sqrt{2}+\left[28\tfrac{1}{2}+\left(-3\tfrac{1}{2}\right)+(-15)\right]\sqrt[3]{4}=$$

$$=10\sqrt[3]{4};$$

$$2)\ 2b^2\sqrt{3bc}-5b^2\sqrt{3ac}-8c^2\sqrt{3bc}+20c^2\sqrt{3ac}=$$

$$=[2b^2+(-8c^2)]\sqrt{3bc}+[(-5b^2)+20c^2]\sqrt{3ac}=$$

$$=2(b^2-4c^2)\sqrt{3bc}-5(b^2-4c^2)\sqrt{3ac}.$$

Преобразование, состоящее в замене алгебраической суммы подобных радикалов одним радикалом, называется приведением подобных радикалов. Очевидно, что оно основано на применении распределительного закона умножения.

Правило. Для того чтобы выполнить сложение или вычитание радикалов, надо соединить их соответствующими знаками действий и полученную алгебраическую сумму упростить посредством приведения подобных радикалов, служащих ее слагаемыми.

Примеры.

$$1)\ \sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-\sqrt{2}-\sqrt[3]{27}=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}-\sqrt{2}-3=$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-3;$$

$$2)\ a+2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}-4\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{a^2}-3\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{a^3}=$$
$$=a+2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{a}-4\sqrt[3]{a}-\sqrt{a}-3\sqrt[3]{a}-\sqrt{a}=a-4\sqrt[3]{a};$$

$$3)\ 5\sqrt{a^2x}-b^2\sqrt[3]{\frac{27a}{b^3}}-6\sqrt{\frac{b^2x}{9}}+5\sqrt{\frac{a^2x}{25}}+c^3\sqrt[3]{\frac{343a}{c^6}}=$$
$$=5a\sqrt{x}-3b\sqrt[3]{a}-2b\sqrt{x}+a\sqrt{x}+7c\sqrt[3]{a}=$$
$$=2(3a-b)\sqrt{x}-(3b-7c)\sqrt[3]{a};$$

$$4)\ \sqrt{(x-y)^3}+\sqrt{(2x+3y)^2(x-y)}-(x^2-y^2)\sqrt{\frac{(x+y)^2}{x-y}}+$$
$$+\frac{2xy}{x-y}\sqrt{(x-y)^3}=(x-y)\sqrt{x-y}+(2x+3y)\sqrt{x-y}-$$
$$-(x+y)^2\sqrt{x-y}+2xy\sqrt{x-y}=(3x+2y-x^2-y^2)\sqrt{x-y}.$$

6. Умножение радикалов. Рассмотрим два случая.

1°. Для того чтобы найти произведение

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}$$

нескольких радикалов с одинаковыми показателями, достаточно воспользоваться формулой

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c},$$

доказанной в § 3, п. 3,1°; в самом деле, из нее следует, что

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc},$$

т. е. что произведение нескольких арифметических корней (радикалов) с одинаковыми показателями равно арифметическому корню (радикалу) с тем же показателем из произведения подкоренных чисел данных корней (радикалов).

2°. Если требуется найти произведение нескольких радикалов с различными показателями, то предварительно приводят эти радикалы к общему показателю, а затем поступают так, как в случае 1°.

Примеры.

$$1)\ \sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b^2}=\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{b^4}=\sqrt[6]{a^3b^4};$$

$$2)\ a\sqrt[3]{x^2}\cdot b\sqrt{ax}=ab\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[6]{a^3x^3}=ab\sqrt[6]{a^3x^7}=abx\sqrt[6]{a^3x};$$

$$3)\ \sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{ax}=\sqrt[6]{x^4}\cdot\sqrt[6]{a^3x^3}=\sqrt[6]{a^3x^7}=x\sqrt[6]{a^3x}.$$

При выполнении умножения радикалов часто бывает удобно представлять их в виде степеней с дробными показателями.

Пример 3 можно решить так:

$$\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{ax} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{6}}\cdot x^{\frac{7}{6}} = x\sqrt[6]{a^3x}.$$

7. Деление радикалов. Рассмотрим два случая.

1°. Из формулы

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

доказанной в § 3, п. 3, 2°, следует, что

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

т. е. что если два арифметических корня (радикала) имеют одинаковые показатели, то частное от деления одного из них на другой равно арифметическому корню (радикалу) с тем же показателем из частного от деления подкоренных чисел данных корней (радикалов).

2°. Если требуется найти частное от деления двух радикалов с различными показателями, то предварительно приводят эти радикалы к общему показателю, а затем поступают так, как в случае 1°.

Примеры.

1) $16a^2b\sqrt{c} : 4a\sqrt[3]{c} = 4ab\left(\sqrt[6]{c^3} : \sqrt[6]{c^2}\right) = 4ab\sqrt[6]{c};$

2) $6x^3 : \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} = 8x^2\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 8x\sqrt[3]{x^2};$

3) $\left(a\sqrt{x} - x\sqrt{a}\right) : \sqrt{ax}$

1-й способ $= a\sqrt{\frac{x}{ax}} - x\sqrt{\frac{a}{ax}} = \sqrt{a} - \sqrt{x};$

2-й способ $= \left(\sqrt{a^2x} - \sqrt{ax^2}\right) : \sqrt{ax} = \sqrt{a} - \sqrt{x};$

3-й способ $= \left(\sqrt{a}\sqrt{ax} - \sqrt{x}\sqrt{ax}\right) : \sqrt{ax} = \sqrt{a} - \sqrt{x};$

4) $\left(ab\sqrt{c} + bc\sqrt{a} + ca\sqrt{b}\right) : \sqrt{abc} = \left(\sqrt{ab}\sqrt{abc} +\right.$

$\left.+ \sqrt{bc}\sqrt{bca} + \sqrt{ca}\sqrt{cab}\right) : \sqrt{abc} = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$

При выполнении деления радикалов часто бывает удобно представлять их в виде степеней с дробными показателями.

5) $\left(12\sqrt[6]{a^5} - 8\sqrt[4]{a^3} + 20\sqrt[3]{a^2} - 56\sqrt{a}\right) : 4\sqrt{a} =$

$$= \left(3a^{\frac{5}{6}} - 2a^{\frac{3}{4}} + 5a^{\frac{2}{3}} - 14a^{\frac{1}{2}}\right) : a^{\frac{1}{2}} = 3a^{\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{1}{4}} + 5a^{\frac{1}{6}} - 14 =$$

$$= 3\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[4]{a} + 5\sqrt[6]{a} - 14.$$

8. Возведение радикалов в степень. Если m и n — целые положительные числа, а a—положительное число, то (§ 3, п. 8)

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n},$$

т. е. для того чтобы возвести арифметический корень (радикал) в целую положительную степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное число и из результата извлечь корень с тем показателем, который имеет данный корень.

Примеры.

1) $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5 = \sqrt[4]{a^{15}} = a^3\sqrt[4]{a^3};$

2) $\left(a\sqrt[3]{b^2}\right)^2 = a^2\sqrt[3]{b^4} = a^2b\sqrt[3]{b};$

3) $\left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}\right)^2 = a - 2\sqrt{a}\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = a - 2\sqrt[6]{a^5} + \sqrt[3]{a^2};$

4) $\left(a + \sqrt[3]{a^2}\right)^3 = a^3 + 3a^2\sqrt[3]{a^2} + 3a^2\sqrt[3]{a} + a^2;$

5) $\left(3ab^2\sqrt[3]{a^2b}\right)^4 = \left(3a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{3}}\right)^4 = 81a^{\frac{20}{3}}b^{\frac{28}{3}} = 81a^6b^9\sqrt[3]{a^2b}.$

9. Извлечение корня из радикала. Если m и n—целые положительные числа, а a—положительное число, то (§ 3, п. 8)

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a},$$

т. е. для того чтобы извлечь корень из арифметического корня, достаточно из числа, из которого извлекается арифметический корень, извлечь корень с показателем, равным произведению двух данных показателей.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a};$

2) $\sqrt[5]{a\sqrt{a}} = \sqrt[5]{\sqrt{a^3}} = \sqrt[10]{a^3};$

3) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[10]{a^6} = \sqrt[5]{a^3};$

4) $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}} =$

1-й способ $= \sqrt{\sqrt[3]{a^{14}}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[3]{a^7} = a^2\sqrt[3]{a};$

2-й способ $= a^2\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2\sqrt[6]{a^2} = a^2\sqrt[3]{a};$

3-й способ $= \sqrt{\left(a^2\sqrt[3]{a}\right)^2} = a^2\sqrt[3]{a};$

5) $\sqrt[3]{a^7\sqrt{a}} = a^2\sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = a^2\sqrt{a};$

6) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a^3}} =$

$$\text{1-й способ} = \sqrt[6]{a^5\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[24]{a^{23}};$$

$$\text{2-й способ} = \sqrt[24]{a^{(3+2)4+3}} = \sqrt[24]{a^{23}};$$

7) $\sqrt[5]{a^4b^3\sqrt[3]{ab^2}} = \sqrt[15]{a^{13}b^{11}};$

8) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a^4}} = \left(a^2\cdot a^{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{14}{15}}.$

10. Освобождение числителя или знаменателя дроби от радикалов. Если числитель или знаменатель алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ содержит радикалы, то в определенных случаях можно заменить эту дробь такой тождественно равной ей дробью, числитель или знаменатель которой уже не содержит радикалов. Это преобразование называется освобождением числителя или знаменателя дроби от радикалов или, иначе, приведением числителя или знаменателя дроби к рациональному виду.

Рассмотрим различные случаи, в которых освобождение числителя или знаменателя дроби от радикалов может быть выполнено.

$$1^\circ.\ \frac{A}{B} = \frac{a}{\sqrt[n]{x^py^qz^r}}, \text{ где } p<n,\ q<n,\ r<n.$$

Для того чтобы освободить знаменатель дроби от радикала n-й степени из одночлена, умножим числитель и знаменатель дроби на радикал той же степени из такого одночлена, который дополняет данный подкоренной одночлен до n-й степени некоторого одночлена. Благодаря этому знаменатель заменится рациональным выражением:

$$\frac{A}{B} = \frac{a\sqrt[n]{x^{n-p}\cdot y^{n-q}\cdot z^{n-r}}}{\sqrt{x^py^qz^r}\cdot\sqrt{x^{n-p}y^{n-q}z^{n-r}}} = \frac{a\sqrt[n]{x^{n-p}y^{n-q}z^{n-r}}}{xyz}.$$

Пример 1.

$$\frac{a}{\sqrt[5]{x^3yz^2}} = \frac{a\sqrt[5]{x^2y^4z^3}}{\sqrt[5]{x^3yz^2}\cdot\sqrt[5]{x^2y^4z^3}} = \frac{a\sqrt[5]{x^2y^4z^3}}{xyz}.$$

Пример 2.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{300}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2\cdot 3\cdot 5^2}} = \frac{\sqrt[3]{2\cdot 3^2\cdot 5}}{2\cdot 3\cdot 5} = \frac{\sqrt[3]{90}}{30}.$$

$$2^\circ.\ \frac{A}{B} = \frac{a}{b\pm\sqrt{c}}.$$

Если знаменатель дроби есть сумма или разность двух членов, один, по крайней мере, из которых — квадратный радикал, то для освобождения этого знаменателя от радикала достаточно умножить числитель и знаменатель дроби соответственно на разность или сумму тех же членов:

$$\frac{A}{B}=\frac{a(b\mp\sqrt{c})}{(b\pm\sqrt{c})(b\mp\sqrt{c})}=\frac{a(b\mp\sqrt{c})}{b^2-c}.$$

Пример 3.

$$\frac{2}{3-\sqrt{5}}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

$$3^\circ.\ \frac{A}{B}=\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}.$$

Поступая так же, как в случае 2, последовательно находим:

$$\frac{A}{B}=\frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{(\sqrt{b}\pm\sqrt{c})(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}\mp\sqrt{c})}{b-c}.$$

Пример 4.

$$\frac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}=4(\sqrt{5}+\sqrt{2}).$$

Пример 5.

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{8}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=-5+2\sqrt{6}.$$

Пример 6.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}.$$

1-й способ. Для решения этого примера мы, пользуясь способом, примененным в случаях 2° и 3°, сначала освободимся от корня $\sqrt{5}$, а затем от корня $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}}=\frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{-2+2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2(\sqrt{2}-1)}=$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+1)}{2\cdot 1}=\frac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}}{2}.$$

2-й способ. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на произведение

$$(-1+\sqrt{2}+\sqrt{5})\ \ (1-\sqrt{2}+\sqrt{5})\ \ (1+\sqrt{2}-\sqrt{5}),$$

сомножители которого получены из знаменателя $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ путем последовательной замены слагаемых противоположными числами. Заметив, что

$$(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1-\sqrt{2}+\sqrt{5})=(1+\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2=4+$$
$$+2\sqrt{5}=2(\sqrt{5}+2),\ (1+\sqrt{2}-\sqrt{5})(-1+\sqrt{2}+\sqrt{5})=$$
$$=(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5}-1)^2=-4+2\sqrt{5}=2(\sqrt{5}-2),$$

находим, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{5})\cdot 2(\sqrt{5}-2)}{4(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=\frac{3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}}{2\cdot 1}.$$

$$4^\circ.\ \frac{A}{B}=\frac{a}{b\pm\sqrt[3]{c}}\ \text{или}\ \frac{a}{\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c}}.$$

В обоих случаях можно достигнуть цели, пользуясь формулой:

$$(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)=x^3\pm y^3.$$

В самом деле, полагая в этой формуле

$$x=\sqrt[3]{b},\ y=\sqrt[3]{c},$$

находим, что

$$(\sqrt[3]{b}\pm\sqrt[3]{c})\cdot(\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})=b\pm c.$$

Следовательно, для того чтобы освободить знаменатель данной дроби от радикалов, достаточно умножить числитель и знаменатель ее на трехчлен

$$\sqrt[3]{b^2}\mp\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2}.$$

Пример 7.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}=\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}.$$

Пример 8.

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{40}}=\frac{3}{\sqrt[3]{5}+3\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{5}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}{9}=\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+2\sqrt[3]{2}}{9}.$$

Примечание. Все указанные преобразования 1°—4°, состоящие в освобождении от радикалов знаменателя B дроби $\frac{A}{B}$, полностью относятся и к тому случаю, когда требуется освободить от радикалов числитель A этой дроби.

Пример 9. Освободить от радикалов числитель дроби:

$$\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}.$$

Последовательно получаем:

$$\frac{\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x}}{x}=\frac{(\sqrt{x+x^2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x})}{x(\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{x+x^2-x}{x(\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x})}=\frac{x}{\sqrt{x+x^2}+\sqrt{x}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. **Выполнить умножение:**

1) $(2\sqrt{8}+3\sqrt{5}-7\sqrt{2})(\sqrt{72}-5\sqrt{20}-2\sqrt{2})$.

Указание. Предварительно упростить сомножители.

Ответ. $42\sqrt{10}-174$.

Alexei

2) $\sqrt{1+ab+a+b}\cdot\sqrt{1+a}$.

Указание. Применить разложение на множители.

Ответ. $(1+a)\sqrt{1+b}$.

3) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

Указание. Применить формулу.

Ответ. $6\sqrt{2}$.

4) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b})\times$
$\times(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$.

Указание. Применить формулу.

Ответ. $4bc-(b+c-a)^2$.

2. Сократить дробь:

$$\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}.$$

Ответ. $\frac{2}{3}$.

3. Сократить дробь:

$$\frac{2\sqrt[6]{x^5}+6\sqrt[3]{x^2}-23\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}+16\sqrt[6]{x}-3}{\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-1}.$$

Указание. Положить $\sqrt[6]{x}=u$ и выразить все радикалы через u, а затем выполнить деление многочленов.

Ответ. $2\sqrt{x}-4\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+3$.

4. Разложить на множители многочлен:

$$(a-b-c)\sqrt{abc}-2bc\sqrt{a}.$$

Указание. Положить $\sqrt{a}=x$, $\sqrt{b}=y$, $\sqrt{c}=z$.

5. Доказать справедливость равенств:

$$1)\ \sqrt{9+\sqrt{45}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$$

Указание. Возвести обе части равенства в квадрат (см. теорему 3, § 1).

$$2)\ \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}.$$

Указание. Положить $\sqrt{2+\sqrt{3}}=u$, $\sqrt{2-\sqrt{3}}=v$.

6. Найти значения выражений:

$$1)\ \left(\frac{1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \text{ при } x=\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}.$$

Указание. Предварительно выразить сумму квадратов через квадрат суммы.

Ответ. $a^2+\sqrt{a^2-1}$.

2) $$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{\frac{a}{b}\left(x-1-\frac{b}{a}\right)}+\sqrt{\frac{b}{a}\left(x-1-\frac{a}{b}\right)}}$$

$$\text{при } x=\frac{a^2+ab+b^2}{ab}, \text{ где } a>0,\ b>0.$$

Ответ. $\frac{2a\sqrt{ab}}{a^2+b^2}$ при $a>b$ и $\frac{2b\sqrt{ab}}{a^2+b^2}$ при $a<b$.

7. Освободить от радикалов знаменатель дроби:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}.$$

Указание. Применить формулу.

Ответ. $\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a+b}$.

8. Освободить от радикалов знаменатель дроби:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}}.$$

Указание. Сначала освободиться от одного радикала, а затем от другого.

9. Освободить от радикалов знаменатель дроби:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}.$$

Указание. Положить $\sqrt[3]{a}=x$, $\sqrt[3]{b}=y$, $\sqrt[3]{c}=z$ и воспользоваться тождеством

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

10. Разложить на множители выражение:

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

Указание. Представить радикалы в виде степеней с дробными показателями.

Ответ. $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

11. Сократить дробь:

$$\frac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}-xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{5}{3}}-2xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}}.$$

Ответ. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}$.

12. Сократить дробь: $\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}$.

13. Сократить дробь:

$$\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}.$$

Ответ. $\dfrac{3}{(x-1)\left(\sqrt{3+x+x^2}+\sqrt{9-2x+x^2}\right)}$.

14. Построить графики зависимостей:

1) $y=x^3$ и $y=x^{\frac{1}{3}}$;

2) $y=(x-1)^2$ для $x\geqslant 1$ и $y=x^{\frac{1}{2}}+1$ для $x\geqslant 0$;

3) $y=\frac{1}{2}x^2$ для $x\geqslant 0$ и $y=(2x)^{\frac{1}{2}}$ для $x\geqslant 0$;

4) $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$ для $x\geqslant 1$;

5) $y=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ для $x\geqslant 0$.

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

1. Общее понятие.

Определение. Уравнение вида

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

левая часть которого есть многочлен второй степени по отношению к переменной x, а правая есть нуль, называется уравнением второй степени или квадратным уравнением с одной неизвестной x.

Всякое уравнение, которое путем последовательной замены его равносильными ему уравнениями может быть приведено к виду (1), также называется уравнением второй степени или квадратным уравнением с одной неизвестной.

Из определения следует, что коэффициент a при наивысшей (второй) степени переменной x (в которой она входит в левую часть уравнения второй степени) предполагается отличным от нуля: $a \neq 0$.

Пример. Уравнение

$$x(x+1) - 2x = (x-1)(2x+3)$$

может быть последовательно заменено следующими равносильными ему уравнениями:

$$x^2 + x - 2x = 2x^2 - 2x + 3x - 3;$$

$$-x^2 - 2x + 3 = 0;$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Последнее из этих уравнений имеет вид (1) и является уравнением второй степени с одной неизвестной x; поэтому и данное уравнение есть уравнение второй степени с одной неизвестной x.

2. Формула для решения уравнения второй степени. Для решения уравнения

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

мы употребим способ, с помощью которого решение уравнения второй степени может быть сведено к решению двух уравнений первой степени. Этот способ состоит в том, что левую часть уравнения второй степени с одной неизвестной x разлагают на два множителя первой степени относительно переменной x.

Для разложения трехчлена

$$ax^2+bx+c$$

на множители первой степени относительно переменной x поступим следующим образом:

1) вынесем коэффициент a трехчлена ax^2+bx+c за скобки:

$$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right];$$

2) первый и второй члены трехчлена, заключенного в квадратные скобки, будем рассматривать как первые два члена трехчлена, полученного от возвышения в квадрат двучлена первой степени

$$x+\frac{b}{2a};$$

это возможно, так как

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2};$$

3) прибавим к трехчлену, заключенному в квадратные скобки, и вычтем из него член $\frac{b^2}{4a^2}$:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a};$$

4) представим этот трехчлен в виде:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2};$$

5) представим трехчлен ax^2+bx+c в виде:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

В результате преобразований 1)— 4) из трехчлена $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}$, заключенного в квадратные скобки, выделился полный квадрат

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Прием, который состоит в применении к трехчлену вида x^2+px+q преобразований 1(—4), называется **выделением из трехчлена полного квадрата**.

Итак, мы вывели тождественное равенство:

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right].$$

Теперь рассмотрим следующие случаи:

I. Если выражение $b^2 - 4ac$ имеет положительное значение:

$$b^2 - 4ac > 0,$$

то дробь $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ можно рассматривать как квадрат дроби $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, где $\sqrt{b^2 - 4ac}$ есть арифметическое значение квадратного корня из выражения $b^2 - 4ac$. Поэтому в случае I трехчлен $ax^2 + bx + c$ может быть представлен сначала в виде:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right],$$

а затем (путем разложения разности квадратов на множители) в виде:

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

В соответствии с этим в случае I уравнение

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

может быть преобразовано в уравнение

$$(2) \qquad a\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0.$$

Так как $a \neq 0$, то левая часть уравнения (2) может обратиться в нуль при тех и только тех значениях неизвестной x, при которых обращается в нуль один из двух множителей левой части, зависящих от неизвестной x, т. е. при тех и только тех значениях неизвестной x, которые удовлетворяют либо уравнению

$$(2а) \qquad x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0,$$

либо уравнению

$$(2б) \qquad x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0.$$

Таким образом, оказалось, что в случае I уравнение второй степени (1) равносильно совокупности (не системе!) двух уравнений первой степени.

Уравнения (2а) и (2б) имеют соответственно корни:

$$(3) \qquad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ и } \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

и притом только эти корни.

Если $a > 0$, то первый из этих корней меньше второго; если же $a < 0$, то он больше второго:

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \lesseqgtr \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (a \gtreqless 0),$$

так как $\sqrt{b^2 - 4ac} > 0$.

Условимся обозначать первый из корней (3) через x_1, а второй через x_2:

$$(4)\qquad x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Эти две формулы обычно записываются вместе в виде:

$$(5)\qquad x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Вывод I. Если коэффициенты a, b, c уравнения второй степени

$$ax^2+bx+c=0$$

удовлетворяют неравенству

$$b^2-4ac>0,$$

то это уравнение имеет два неравных корня x_1 и x_2, вычисляемых по формулам:

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

и притом только эти корни.

II. Если

$$b^2-4ac=0,$$

то тождественное равенство

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

обращается в тождественное равенство

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

а уравнение

$$(1)\qquad ax^2+bx+c=0$$

в уравнение

$$(6)\qquad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Так как $a\neq0$, то левая часть уравнения (6) может обратиться в нуль при тех и только тех значениях неизвестной x, при которых обращается в нуль множитель левой части, зависящий от x, т. е. при тех и только тех значениях неизвестной x, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Это уравнение имеет корень $-\frac{b}{2a}$.

Однако, если мы представим уравнение (6) в виде:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right)=0,$$

то можно будет сказать, что это уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$x+\frac{b}{2a}=0 \text{ и } x+\frac{b}{2a}=0$$

первой степени, имеющих равные корни:

$$x_1=-\frac{b}{2a}, \quad x_2=-\frac{b}{2a},$$

и притом только эти корни.

Заметим, что эти корни могут быть получены из формул (4), выведенных при рассмотрении случая I, если в соответствии с условием II заменить в них выражение b^2-4ac нулем.

Вывод II. Если коэффициенты a, b, c уравнения второй степени

$$ax^2+bx+c=0$$

удовлетворяют равенству

$$b^2-4ac=0,$$

то это уравнение имеет два равных корня x_1 и x_2, вычисляемых по формуле

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a},$$

и при том только эти корни.

Если коэффициент a имеет положительное значение (в случае $a<0$ все члены уравнения можно умножить на -1), то при условии II уравнение $ax^2+bx+c=0$ может быть представлено в виде:

$$\left[\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2=0,$$

так что его левая часть есть в этом случае полный квадрат произведения $\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ числа $\sqrt{a}$ на двучлен первой степени по отношению к неизвестной x.

Как в случае I, так и в случае II левая часть уравнения (1') может быть представлена в виде произведения

$$a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — неравные или равные числа, соответственно служащие корнями множителей первой степени

$$x-x_1 \text{ и } x-x_2.$$

Таким образом, число корней уравнения (1) как раз равно числу множителей первой степени относительно неизвестной x, на которые разлагается его левая часть. Вот причина, по которой нам выгоднее считать, что уравнение (1) в случае II имеет два равных корня, а не один корень.

III. Если

$$b^2-4ac<0,$$

то уравнение (1) может быть представлено в виде:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0.$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, есть сумма двух выражений; из них первое при всех значениях переменной x, отличных от числа $-\frac{b}{2a}$, имеет положительное значение, а при $x=-\frac{b}{2a}$ имеет значение нуль, а второе — при условии III есть положительное число. Поэтому выражение, заключенное в квадратные скобки, при всех без исключения значениях переменной x имеет положительное значение и, следовательно, ни при одном из ее значений не может принять нулевое значение. Но и коэффициент a, по условию, отличен от нуля. Следовательно, при условии III уравнение (1) вовсе не имеет корней.

Вывод III. Если коэффициенты a, b, c уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

удовлетворяют неравенству

$$b^2-4ac<0,$$

то это уравнение не имеет корней.

В зависимости от того, которое из трех соотношений

1) $b^2-4ac>0$, 2) $b^2-4ac=0$, 3) $b^2-4ac<0$

выполняется, уравнение второй степени

(1) $$ax^2+b+c=0$$

1) имеет два неравных корня, 2) имеет два равных корня, 3) не имеет корней.

Ввиду этой роли выражения b^2-4ac для уравнения второй степени (1) оно носит специальное название, именно: оно называется дискриминантом уравнения второй степени (1). Дискриминант обозначается обычно буквой D.

3. Частный случай. Если коэффициенты a, b, c уравнения $ax^2+bx+c=0$, целые числа и коэффициент b есть четное число, то, полагая

$$b=2b',$$

найдем по общей формуле (5):

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\mp\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\mp2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-b'\mp\sqrt{b^{2'}-ac}}{a},$$

так что в случае, если $b=2b'$, можно пользоваться формулой:

(5a) $$x_{1,2}=\frac{-b'\mp\sqrt{b'^2-ac}}{a}.$$

4. Неполные уравнения второй степени. При выводе формулы решения уравнения

(1) $$ax^2+bx+c=0$$

мы предполагали, что $a\neq 0$; на коэффициенты же b и c мы не налагали никаких ограничений. Поэтому формула (5) относится и к случаям, если: 1) $b=0$, 2) $c=0$, 3) $b=c=0$.

1) Если $b=0$, но $c\neq 0$, то уравнение (1) принимает вид:

(7) $$ax^2+c=0.$$

Дискриминант D уравнения (7) есть $-4ac$. Если $ac<0$, то $D>0$, и уравнение (7) имеет два неравных корня, которые могут быть найдены по формуле (5), но могут быть получены также с помощью следующих преобразований:

$$ax^2+c=0,\ x^2+\frac{c}{a}=0,\ x^2=-\frac{c}{a}.$$

Так как $ac<0$, то $\frac{c}{a}<0$, а $-\frac{c}{a}>0$.

Поэтому существуют два числа

$$-\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } +\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

квадраты которых равны числу $-\frac{c}{a}$. Очевидно, что каждое из этих чисел представляет собой корень уравнения $x^2=-\frac{c}{a}$, т. е.

$$x_{1,2}=\mp\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

2) Если $b\neq 0$, но $c=0$, то уравнение (1) принимает вид

(8) $$ax^2+bx=0.$$

Дискриминант уравнения (8) есть b^2, т. е. положительное число, ибо $b\neq 0$. Поэтому уравнение (8) имеет два неравных корня, которые могут быть найдены по формуле (5), но могут быть получены также из уравнения. Представляя уравнение (8) в виде:

$$x(ax+b)=0,$$

заключаем, что оно равносильно совокупности двух уравнений:

$$x=0 \quad \text{и} \quad ax+b=0$$

и, следовательно, имеет корни:

$$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}.$$

3) Если $b=0$ и $c=0$, то уравнение (1) принимает вид

(9) $$ax^2=0.$$

Так как $D=0$, то уравнение (9) имеет два равных корня, которые могут быть получены как по формуле (5), так и по формулам, выведенным для случая $b=0$ и для случая $c=0$. По каждой из этих формул находим, что

$$x_1=0,\quad x_2=0.$$

Пример 1. Для решения уравнения

$$2x^2-5x+3=0$$

применяем формулу (5):

$$x_{1,2}=\frac{5\mp\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\mp1}{4};\quad x_1=1,\quad x_2=\frac{3}{2}.$$

Пример 2. Уравнение

$$3x^2-7x+1=0$$

имеет корни:

$$x_{1,2}=\frac{7\mp\sqrt{49-12}}{6}=\frac{7\mp\sqrt{37}}{6};\quad x_1=\frac{7-\sqrt{37}}{6},\quad x_2=\frac{7+\sqrt{37}}{6}.$$

При решении практических задач находят приближенные значения иррациональных чисел и в соответствии с этим приближенные значения корней уравнения:

$$\sqrt{37}\approx6{,}08;\quad x_1\approx\frac{7-6{,}08}{6}=0{,}15;\quad x_2\approx\frac{7+6{,}08}{6}=2{,}18.$$

Пример 3. Уравнение

$$3x^2+3x+2=0$$

не имеет корней, так как $D=9-24=-15<0$.

Пример 4. Для решения уравнения

$$5x^2-6x+1=0$$

применяем формулу (5а):

$$x_{1,2}=\frac{3\mp\sqrt{9-5\cdot1}}{5}=\frac{3\mp2}{5};\quad x_1=\frac{1}{5};\quad x_2=1.$$

Пример 5. Для решения уравнения

$$x^2-7x+10=0$$

применяем формулу (5):

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\mp3}{2};\quad x_1=2,\ x_2=5.$$

Пример 6. Для решения уравнения

$$x^2-6x+5=0$$

применяем формулу (5а):

$$x_{1,2}=3\mp\sqrt{9-5}=3\mp2;\quad x_1=1,\quad x_2=5.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$(1)\qquad \frac{x}{x-1}+\frac{x}{x-9}=1.$$

Решение. Умножая все члены уравнения на произведение $(x-1)(x-9)$, получаем уравнение

$$(2)\qquad x(x-9)+x(x-1)=(x-1)(x-9).$$

Это уравнение, возможно, неравносильно данному: именно, если среди его корней окажутся числа 1 или 9, то эти корни будут «посторонними» для данного уравнения и будут подлежать исключению.

Решим уравнение (2):

$$x^2-9=0;\ x_1=-3,\ x_2=3.$$

Оказывается, что найденные корни служат также корнями данного уравнения.

Пример 8. Решить уравнение

$$(1)\qquad \frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x(x-2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=0.$$

Решение. Умножая все члены этого уравнения на произведение $x(x^2-4)$, получаем уравнение

$$(2)\qquad 2x-(x+2)+(x-4)(x-2)=0.$$

Приводя уравнение (2) к виду

$$x^2-5x+6=0,$$

находим, что оно имеет корни:

$$x_1=2,\quad x_2=3.$$

Но корень 2, обращающий в нуль знаменатели двух первых членов уравнения (1), является для него посторонним и должен быть отброшен. Корень 3 удовлетворяет данному уравнению.

Пример 9. Решить квадратное уравнение

$$(a^2-b^2)x^2-2ax+1=0.$$

Решение. Так как $a^2-b^2\neq 0$, то находим по формуле (5*a*):

$$x_{1,2}=\frac{a\mp\sqrt{a^2-(a^2-b^2)}}{a^2-b^2}=\frac{a\mp b}{a^2-b^2};$$

$$x_1=\frac{1}{a+b},\ x_2=\frac{1}{a-b}.$$

Пример 10. Решить квадратное уравнение

$$(m-2)x^2-2mx+2m-3=0.$$

Решение. Так как $m\neq 2$, то по формуле (5а) находим:

$$x_{1,2}=\frac{m\mp\sqrt{m^2-(m-2)(2m-3)}}{m-2}=\frac{m\mp\sqrt{-m^2+7m-6}}{m-2}=$$

$$=\frac{m\mp\sqrt{-(m^2-7m+6)}}{m-2}=\frac{m\mp\sqrt{-(m-1)(m-6)}}{m-2}.$$

Если $m \neq 2$ и $(m-1)(m-6) \leqslant 0$, что, очевидно, имеет место при условии

$$m \neq 2 \quad \text{и} \quad 1 \leqslant m \leqslant 6,$$

то уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{m \mp \sqrt{-(m-1)(m-6)}}{m-2}.$$

Например, при $m = 5$ данное уравнение обращается в уравнение

$$3x^2 - 10x + 7 = 0,$$

имеющее корни 1 и $2\frac{1}{3}$.

Пример 11. Решить квадратное уравнение

$$\frac{a}{b}x^2 - a^2x + a = \frac{x}{b}.$$

Решение. Так как $b \neq 0$, то данное уравнение равносильно уравнению $ax^2 - (a^2b + 1)x + ab = 0$.

При $a \neq 0$ по формуле (5) находим:

$$x_{1,2} = \frac{a^2b + 1 \mp \sqrt{(a^2b+1)^2 - 4a^2b}}{2a} = \frac{a^2b + 1 \mp (a^2b - 1)}{2a};$$

$$x_1 = \frac{1}{a}, \quad x_2 = ab.$$

Пример 12. Решить уравнение

$$\frac{x-a}{a} = \frac{2a}{x-a}.$$

Решение. Очевидно, что

$$a \neq 0.$$

Умножаем обе части уравнения на произведение $a(x-a)$:

$$(x-a)^2 = 2a^2;$$

приводим это уравнение к виду:

$$x^2 - 2ax - a^2 = 0.$$

По формуле (5а) находим:

$$x_{1,2} = a \mp \sqrt{a^2 + a^2} = a \mp a\sqrt{2} = a(1 \mp \sqrt{2})^*.$$

Ни один из этих корней не обращает в нуль знаменатель $x - a$, так как при $a \neq 0$

$$a(1 \mp \sqrt{2}) \neq a.$$

---

* Впрочем, эти корни могут быть получены путем разложения на множители левой части уравнения: $(x-a)^2 - 2a^2 = 0$.

Следовательно, оба найденных корня удовлетворяют данному уравнению.

Пример 13. Решить уравнение

$$\frac{a}{x}+\frac{a-1}{x-1}=2.$$

Решение. Умножаем обе части уравнения на произведение $x(x-1)$:

$$a(x-1)+(a-1)x=2x(x-1);$$

приводим это уравнение к виду:

$$2x^2-(2a+1)x+a=0.$$

По формуле (5) находим:

$$x_{1,2}=\frac{2a+1\mp\sqrt{(2a+1)^2-8a}}{4}=\frac{2a+1\mp(2a-1)}{4},$$

$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=a.$$

Корень a не должен обращать в нуль ни один из знаменателей данного уравнения, т. е. не может иметь значений 0 и 1:

$$a\neq 0,\quad a\neq 1.$$

При $a=0$ и при $a=1$ данное уравнение имеет только один корень $\frac{1}{2}$.

Пример 14. Решить уравнение.

$$\frac{x}{a}+\frac{a-1}{x-1}=2.$$

Ответ. При $a\neq 1$ уравнение имеет корни a и $a+1$; при $a=1$ уравнение имеет только один корень 2.

Пример 15. Решить уравнение

$$\frac{x}{2}-\frac{2(2x-3)}{3(x-1)}+\frac{3x-1}{2(x-1)}=\frac{3(x^2+2)}{2(3x-2)}.$$

Решение. Группируя по сходству знаменателей второй и третий члены левой части между собой и остальные члены между собой, последовательно находим:

$$\frac{3x-1}{2(x-1)}-\frac{2(2x-3)}{3(x-1)}=\frac{x+9}{6(x-1)};$$

$$\frac{3(x^2+2)}{2(3x-2)}-\frac{x}{2}=\frac{x+3}{3x-2}.$$

Поэтому данное уравнение сводится к уравнению:

$$\frac{x+9}{6(x-1)}=\frac{x+3}{3x-2},$$

Ответ. $x_1 = 0,\ x_2 = 4\frac{1}{3}.$

Пример 16. Решить уравнение

$$\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x-7}{x-1} = 4 - \frac{3x-1}{x+2}.$$

Решение. Исключая из каждого дробного члена уравнения его целую часть, приходим к уравнению:

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{7}{x+2}.$$

Ответ. $x_1 = -1\frac{1}{4},\ x_2 = 5.$

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $$\frac{x+2}{1+2x} = \frac{3x+4}{3+4x}.$$

2. $$\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-9} = 1.$$

Указание. Выделить из одной дроби целую часть:

3. $$\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x(x-1)} = 7.$$

Указание. Применить разложение многочлена на множители отбросить посторонний корень:

4. $$\frac{5x+3}{x-1} + \frac{2x-3}{x-2} = 12.$$

Указание. Выделить из дробей их целые части:

5. $$\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3}.$$

Ответ. $\frac{7}{3}$ и посторонний корень 1.

6. $$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} = \frac{6x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

7. $$\frac{x}{15} + \frac{40}{3(10-x)} = \frac{3(10+x)}{95}.$$

Ответ. $x_1 = -10,\ x_2 = 29.$

8. $$\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+8} = 0.$$

Указание. Скомбинировать первый член левой части с четвертым и второй с третьим.

Ответ. $x_1 = 0,\ x_{2,3} = \mp 5\sqrt{2}.$

9. При каком значении параметра m каждое из уравнений

$$x^2 - 8x + m = 0,$$
$$(a - b)^2 x^2 + 2(a^2 - b^2)x + m = 0,$$
$$mx^2 + 2(m + 1)x + m + 3 = 0$$

имеет равные корни?

ВОПРОСЫ

1. Доказать, что уравнение

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

имеет два и только два корня.

2. Составить уравнение, имеющее корни 0, 2, 3 и никаких других корней не имеющее. Сколько таких уравнений можно составить?

3. При всяких ли значениях коэффициентов a, b, c уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

можно решать по формуле (5)?

4. Решить неравенство

$$(x - 4)(x - 9) > 0,$$

т. е. найти, при каких значениях буквы x произведение, составляющее левую часть этого неравенства, есть положительное число.

5. При каких значениях параметра m уравнение

$$x^2 - 8x + m = 0$$

имеет два неравных корня?

6. Тот же вопрос по отношению к уравнениям:

$$(a - b)^2 x^2 + 2(a^2 - b^2)x + m = 0;$$
$$mx^2 + 2(m + 1)x + m + 3 = 0.$$

§ 2. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОРНЯМИ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Общий случай. Допустим, что квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

имеет корни x_1 и x_2. Тогда, как мы установили в § 1, имеют место равенства:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2}$$

указывающие, в какой зависимости находится каждый их этих корней от коэффициентов уравнения (1).

Равенства (2) позволяют установить соотношения, существующие между суммой $x_1 + x_2$ и произведением x_1x_2 корней квадратного уравнения (1) и его коэффициентами. Именно:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Мы доказали теорему:

Теорема 1. Если квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0$$

имеет корни, то сумма этих корней равна взятому с обратным знаком отношению коэффициента b при x к коэффициенту a при x^2, а произведение этих корней равно отношению свободного члена c к коэффициенту a при x^2.

Примечание. Теореме 1 можно дать также следующую формулировку:

Для того чтобы числа x_1 и x_2 были корнями квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

необходимо, чтобы они были связаны с коэффициентами этого уравнения равенствами:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Пример 1. Уравнение

$$3x^2-8x+4=0$$

имеет корни, так как его дискриминант $4^2-3\cdot 4$ есть положительное число. Не находя этих корней, мы утверждаем, что их сумма равна $\frac{8}{3}$, а их произведение равно $\frac{4}{3}$.

Пример 2. Уравнение

$$(m-2)x^2+2(m-1)x+m-3=0$$

имеет корни при условии, если

$$(m-1)^2-(m-2)(m-3)\geqslant 0,$$

т. е. при $m\geqslant\frac{5}{3}$. Так как $m\neq 2$, то сумма этих корней равна отношению $-\frac{2(m-1)}{m-2}$, а их произведение равно отношению $\frac{m-3}{m-2}$.

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 2. Если числа α и β связаны с коэффициентами уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

равенствами

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}, \tag{3}$$

то эти числа служат его корнями.

Доказательство 1-е. Пользуясь равенствами (3), мы можем выполнить в левой части уравнения (1) следующие тождественные преобразования:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]=$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta);$$

поэтому при условиях (3) уравнение (1) можно заменить равносильным ему уравнением

$$(4)\qquad a(x-\alpha)(x-\beta)=0.$$

Очевидно, что α и β суть корни уравнения (4); следовательно, при условиях (3) эти числа служат также корнями и уравнения (1).

Доказательство 2-е. Так как $\beta=-\frac{b}{a}-\alpha$, то $\alpha\beta=$ $=\alpha\left(-\frac{b}{a}-\alpha\right)=-\alpha^2-\frac{b}{a}\alpha$; следовательно, $-\alpha^2-\frac{b}{a}\alpha=\frac{c}{a}$, т. е. $a\alpha^2+b\alpha+c=0$.

Значит, α есть корень уравнения (1).

Так же докажем, что и β есть корень уравнения (1).

Примечание. Теореме 2 можно дать также следующую формулировку:

Для того чтобы числа α и β были корнями квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

достаточно, чтобы они были связаны с коэффициентами этого уравнения равенствами: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

2. Частный случай. Если квадратное уравнение имеет приведенный вид

$$x^2+px+q=0,$$

который может быть получен из квадратного уравнения общего вида путем деления всех его членов на отличный от нуля коэффициент a, то отношения $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$, о которых идет речь в теоремах 1 и 2, сводятся соответственно к коэффициентам p и q.

Поэтому обе теоремы 1 и 2 могут быть сформулированы в виде следующего общего предложения.

Для того чтобы числа α и β были корнями приведенного квадратного уравнения

$$x^2+px+q=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы они были связаны с коэффициентами p и q этого уравнения равенствами:

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=q.$$

3. Приложения теорем 1 и 2.

1°. На теореме 1 основано решение следующих задач.

Задача 1. По коэффициентам квадратного уравнения

$$(1) \qquad ax^2+bx+c=0$$

определить, существуют ли у него корни и какие именно знаки имеют его корни.

Решение. 1) Если отношение $\frac{c}{a}$ есть отрицательное число, то и произведение ac есть отрицательное число и, следовательно, дискриминант b^2-4ac имеет положительное значение. Поэтому в случае, если $\frac{c}{a}<0$, уравнение (1) имеет два неравных корня x_1 и x_2. Принимая же во внимание, что произведение корней уравнения (1) равно числу $\frac{c}{a}$, мы заключаем дополнительно, что в рассматриваемом случае корни x_1 и x_2 уравнения (1) имеют противоположные знаки.

Сумма этих корней равна числу $-\frac{b}{a}$. Ее знак (+ или —) указывает, который из двух корней (положительный или отрицательный) имеет большее абсолютное значение. Если же $b=0$ и, следовательно, $-\frac{b}{a}=0$, то корни x_1 и x_2 — противоположные числа.

2) Если отношение $\frac{c}{a}$ есть положительное число, то из этого факта нельзя еще сделать никакого заключения о существовании или несуществовании корней уравнения (1).

Для решения этого вопроса необходимо обратиться к дискриминанту b^2-4ac уравнения (1). Если

$$b^2-4ac \geqslant 0,$$

то уравнение (1) имеет два (неравных или равных) корня x_1 и x_2.

В этом случае из неравенства $\frac{c}{a}>0$ мы заключим, что произведение корней x_1 и x_2 есть число положительное и что, следовательно, эти корни суть числа одного и того же знака. Для решения вопроса о том, какой же именно знак имеют оба корня x_1 и x_2, необходимо установить знак суммы $-\frac{b}{a}$ этих корней. Именно, если сумма $-\frac{b}{a}$ есть число положительное, то корни x_1 и x_2 — положительные числа, а если сумма $-\frac{b}{a}$ есть число отрицательное, то корни x_1 и x_2 — отрицательные числа.

3) Если $c = 0$ и, следовательно, $\frac{c}{a} = 0$, то один из корней равен нулю, а другой — числу $-\frac{b}{a}$.

Выводы, к которым мы пришли, могут быть представлены в виде следующей схемы.

Схема определения знаков корней квадратного уравнения по его коэффициентам

Условимся для краткости обозначать дискриминант квадратного уравнения через D, произведение $\frac{c}{a}$ его корней — через P, а их сумму $-\frac{b}{a}$ через S.

P $\frac{c}{a}$	D $b^2 - 4ac$	S $-\frac{b}{a}$	Вывод (x_1 и x_2 — корни; $x_1 < x_2$).
$-$	Вычислять не надо	$+$	$x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1 \rvert < \lvert x_2 \rvert;$
$-$		$-$	$x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1 \rvert > \lvert x_2 \rvert;$
$-$		0	$x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert;$
$+$	$+$	$+$	$x_1 > 0,\ x_2 > 0;$
$+$	$+$	$-$	$x_1 < 0,\ x_2 < 0;$
$+$	0	$+$	$x_1 > 0,\ x_2 > 0;\ x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a};$
$+$	0	$-$	$x_1 < 0,\ x_2 < 0;\ x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a};$
$+$	$-$	Вычислять не надо	нет корней;
0	Вычислять не надо.		$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$ или $x_1 = -\frac{b}{a},\ x_2 = 0$.

Пример 1. Определить знаки корней уравнения

$$18x^2 + 27x - 95 = 0.$$

Решение. Так как $\frac{c}{a} = -\frac{95}{18}$, то $P < 0$; следовательно, уравнение имеет два неравных корня x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$); при этом $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Из того, что $-\frac{b}{a} = -\frac{27}{18}$, дополнительно заключаем, что $S < 0$ и что отрицательный корень x_1 имеет большее абсолютное значение, чем положительный корень x_2.

Пример 2. Определить знаки корней уравнения

$$50x^2 - 215x + 203 = 0.$$

Решение. Так как $\frac{c}{a} = \frac{203}{50}$, то $P > 0$. Составляем дискриминант:

$$D = 215^2 - 200 \cdot 203;$$

он явно имеет положительное значение. Из того, что $D > 0$ и $P > 0$, следует, что уравнение имеет два неравных корня x_1 и x_2 одного и того же знака. Но $-\frac{b}{a} = \frac{215}{50}$; поэтому $S > 0$; отсюда заключаем, что корни x_1 и x_2 — положительные числа.

Пример 3. Определить знаки корней уравнения

$$2x^2 - 2(m - 1)x - m = 0.$$

Решение. 1) Если $m > 0$, то $P < 0$; следовательно, уравнение имеет корни x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$, причем $x_1 < 0$, $x_2 > 0$.

2) Если $m < 0$, то составляем дискриминант:

$$D = (m - 1)^2 + 2m = m^2 + 1;$$

следовательно, при $m < 0$

$$D > 0, P > 0,$$

ввиду чего уравнение имеет два неравных корня x_1 и x_2 одного и того же знака. Но $S = m - 1$; при $m < 0$ разность $m - 1$ есть число отрицательное; поэтому при $m < 0$

$$x_1 < 0, x_2 < 0.$$

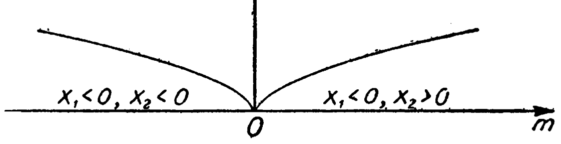
3) Если $m = 0$, то уравнение принимает вид:

$$2x^2 + 2x = 0.$$

Следовательно,

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0.$$

Результаты этого исследования целесообразно наглядно представить с помощью такой графической схемы (черт. 17):



Черт. 17.

Таким образом, если параметр (буква) m будет изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, то один из корней будет все время сохранять отрицательное значение, а другой будет иметь сперва отрицательное значение, затем примет значение 0 и после этого приобретет положительное значение.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что каждое из следующих уравнений имеет два неравных корня и, не находя этих корней, определить их знаки:

$$1)\ x^2-100x+6=0;\quad 2)\ 2x^2-3x+1=0;$$
$$3)\ (x-1)(x-3)+(x+1)(x+2)=6.$$

2. При каких значениях буквы y уравнение

$$x^2-3xy+y^2+2x-2y+1=0$$

с неизвестной x имеет два корня? Определить знаки этих корней в зависимости от переменной y.

При каких значениях буквы x то же уравнение, рассматриваемое как уравнение с неизвестной y, имеет два корня? Определить знаки этих корней в зависимости от переменной x.

3. Тот же вопрос по отношению к уравнению

$$x^2+12xy+4y^2+4x+8y+20=0.$$

Задача 2. Найти, при каких значениях коэффициентов p и q уравнения

$$x^2+px+q=0$$

его корни x_1 и x_2 связаны данной зависимостью?

Пример 1. Найти, при каком значении коэффициента q уравнение

$$(1)\qquad x^2-8x+q=0$$

имеет корни x_1 и x_2, связанные зависимостью

$$3x_1-4x_2=3.$$

Решение. Если данное уравнение (1) имеет корни x_1 и x_2, то

$$(2)\qquad x_1+x_2=8.$$

Кроме того,

$$(3)\qquad 3x_1-4x_2=3.$$

Решая систему уравнений:

$$x_1+x_2=8,\ 3x_1-4x_2=3,$$

находим, что $x_1=5$ и $x_2=3$ и что, следовательно, $q=5\cdot 3=15$.

Обратно, если $q=15$, т. е. данное уравнение (1) имеет вид:

$$x^2-8x+15=0,$$

то его корнями служат числа 5 и 3, связанные данной зависимостью (3).

Пример 2. Найти, при каком значении коэффициента q уравнение

$$(1)\qquad x^2-8x+q=0$$

имеет корни, связанные зависимостью

$$x_1^2+x_2^2=40.$$

Решение. Если данное уравнение (1) имеет корни x_1 и x_2, то

(2) $$x_1 + x_2 = 8.$$

Кроме того,

(3) $$x_1^2 + x_2^2 = 40.$$

Так как

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

то из равенств (2) и (3) следует, что

$$2x_1x_2 = 64 - 40 = 24,$$

т. е. что $x_1x_2 = 12$, ввиду чего $q = 12$.

Обратно, если $q = 12$, т. е. данное уравнение (1) имеет вид:

$$x^2 - 8x + 12 = 0,$$

то его корнями служат числа 2 и 6, связанные данной зависимостью (3).

Пример 3. Найти, при каком значении параметра (буквы) m уравнение

(1) $$2x^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0$$

имеет корни x_1 и x_2, связанные зависимостью

$$x_1 - x_2 = 1 \qquad (x_1 > x_2).$$

Решение. Если при некотором значении параметра m данное уравнение (1) имеет корни x_1 и x_2, то

(2) $$x_1 + x_2 = \frac{m-1}{2},$$ (3) $$x_1x_2 = \frac{m+1}{2}.$$

Кроме того,

(4) $$x_1 - x_2 = 1.$$

Тогда из уравнений (2) и (4) находим, что

$$x_1 = \frac{m+1}{4}, \quad x_2 = \frac{m-3}{4},$$

а из уравнения (3) получаем, что

$$\frac{(m+1)(m-3)}{16} = \frac{m+1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$m_1 = -1, \; m_2 = 11.$$

Обратно, если $m = -1$, то уравнение (1) обращается в уравнение

$$x^2 + x = 0,$$

корни которого — 1 и 0 удовлетворяют требованию (4).

Если $m = 11$, то приходим к уравнению

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

корни которого 2 и 3 также удовлетворяют требованию (4).

Примечание. Приводимое в конце решения примеров 1—2 обратное заключение может быть заменено ссылкой на теорему 2, если эта теорема уже доказана.

УПРАЖНЕНИЯ

1. При каком значении коэффициента p уравнение $x^2 - px + 36 = 0$ имеет корни x_1 и x_2, связанные зависимостью:

1) $x_1 = x_2$; 2) $x_1 = 4x_2$; 3) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$?

Ответ. 1) 12; 2) -15; 3) 15.

2. При каком значении коэффициента q уравнение $x^2 - 8x + q = 0$ имеет корни, связанные зависимостью:

1) $x_1 = x_2$; 2) $x_1 = 3x_2$; 3) $x_1 = \frac{1}{x_2}$; 4) $x_1 = -\frac{1}{x_2}$?

Ответ. 1) 16; 2) 12; 3) 1; 4) -1.

3. При каком значении параметра a уравнение $x^2 - 4x + a = 0$ имеет корни, связанные зависимостью $x_1 - 2x_2 = 1$?

Ответ. $a = 3$.

4. При каком значении параметра a уравнение $x^2 - 5x + a = 0$ имеет корни, связанные зависимостью $2x_1 = 3x_2$?

Ответ. $a = 6$.

Задача 3. Не решая уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

найти сумму одинаковых (натуральных) степеней его корней.

Решение. В этой задаче требуется, не зная корней x_1 и x_2 уравнения (1), найти значения сумм одинаковых (натуральных) степеней этих корней, т. е. выражений

$$x^2_1 + x^2_2,\quad x^3_1 + x^3_2,\quad x^4_1 + x^4_2, \ldots,\quad x^n_1 + x^n_2, \tag{2}$$

где n — натуральное число.

Очевидно, что нам удастся решить эту задачу, если мы сумеем выразить каждую из этих сумм в зависимости от суммы $x_1 + x_2$ и произведения $x_1 x_2$ корней данного уравнения (1), так как

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Суммы (2) могут быть вычислены последовательно на основании тождеств:

$$x^2_1 + x^2_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2;$$

$$x^3_1 + x^3_2 = (x_1 + x_2)(x^2_1 - x_1x_2 + x_2^2);$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2;$$

$$x_1^5 + x_2^5 = (x_1 + x_2)(x_1^4 - x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 - x_1x_2^3 + x_2^4) =$$
$$= (x_1 + x_2)[(x_1^4 + x_2^4) - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2x_2^2].$$

Очевидно, что этим способом мы можем вычислить и следующие суммы одинаковых степеней корней уравнения (1).

Пример 1. Не решая уравнения

$$x^2 - x - 4 = 0,$$

найти сумму третьих степеней чисел, обратных его корням x_1 и x_2, т. е. найти число

$$\frac{1}{x^3_1} + \frac{1}{x_2^3}.$$

Решение. Преобразовав искомую сумму к виду $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3}$ и заметив, что $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = -4$, последовательно находим:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] = 13;$$

$$x_1^3 x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = -64;$$

$$\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} = -\frac{13}{64}.$$

Пример 2. Не решая уравнения

$$m^2 x^2 - m(a - b)x - ab = 0,$$

найти сумму квадратов его корней.

Решение. Так как

$$x_1 + x_2 = \frac{a - b}{m}, \qquad x_1 x_2 = -\frac{ab}{m^2},$$

то

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{(a - b)^2}{m^2} + \frac{2ab}{m^2} = \frac{a^2 + b^2}{m^2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. При каком значении параметра (буквы)m сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (m - 2)x - (m + 3) = 0$$

1) равна числу 9? 2) равна числу k^2?

Указание. 1) Если при некотором значении параметра m данное уравнение имеет корни x_1 и x_2, то

$$x_1 + x_2 = -(m - 2), \quad x_1 x_2 = -(m + 3),$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (m-2)^2 + 2(m+3) = m^2 - 2m + 10.$$

Равенство

$$m^2 - 2m + 10 = 9$$

имеет место при $m = 1$.

При этом значении параметра m данное уравнение имеет корни, удовлетворяющие требованию.

Ответ. $m = 1$.

2) Тем же путем придем к уравнению

$$m^2 - 2m + 10 = k^2.$$

Это уравнение имеет корни

$$m_{1,2} = 1 \mp \sqrt{1 - 10 + k^2} = 1 \mp \sqrt{k^2 - 9}, \text{ где } k^2 \geqslant 9.$$

Таким образом, сумма квадратов корней данного уравнения ни при каком значении параметра m не может быть меньше, чем число 9.

2. Не находя корней x_1 и x_2 уравнения

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0,$$

вычислить суммы:

$$x_1^2 + x_2^2, \quad x_1^3 + x_2^3.$$

3. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - mx + 2m + 4 = 0$$

равна числу k^2?

Задача 4. Не решая уравнения

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

найти значение выражения, симметричного по отношению к его корням.

Выражением, **симметричным** по отношению к двум буквам u и v, называется выражение, содержащее эти буквы и не меняющее своего числового значения при взаимной замене (перестановке) этих букв.

Таковы, например, выражения:

$$(2) \qquad u + v, \quad u^2 + v^2, \quad u^3 + v^3, \ \ldots, \ u^n + v^n, \ \ldots,$$

$$(3) \qquad uv, \quad u^2v^2, \quad u^3v^3, \ \ldots, \ u^nv^n, \ \ldots,$$

представляющие собой соответственно суммы и произведения одинаковых (натуральных) степеней двух букв — u и v.

Точно так же симметричными по отношению к буквам u и v будут и любые выражения, которые могут быть получены из выражений (2) и (3) путем сложения, вычитания, умножения или деления этих выражений, предварительно умноженных на какие угодно числа.

Таковы, например, выражения:

$$3(u^2 + v^2) \pm 5u^3v^3; \qquad 15u^3v^3(u^2 + v^2);$$

$$2u^4 + 3u^3v \pm 4u^2v^2 + 3uv^3 + 2v^4; \ 2u^4 - 3u^3v \pm 4u^2v^2 - 3uv^3 + 2v^4,$$

а также отношения двух любых из этих или аналогично составленных выражений.

При возведении симметричного по отношению к двум буквам выражения в целую (положительную или отрицательную) степень мы получим такое же, т. е. симметричное по отношению к этим буквам, выражение.

Выражения

$$(u - v)^2, \ (u - v)^4, \ \ldots, \ (u - v)^{2n}, \ \ldots,$$

представляющие собой четные степени разности букв u и v, также, очевидно, являются симметричными по отношению к этим буквам; легко видеть, что они могут быть выражены через сумму $u+v$ и произведение uv букв u и v:

$$(u-v)^2=(u+v)^2-4uv;$$
$$(u-v)^4=[(u-v)^2]^2=[(u+v)^2-4uv]^2.$$

Вообще

$$(u-v)^{2n}=[(u-v)^2]^n=[(u+v)^2-4uv]^n.$$

Можно доказать (мы примем это без доказательства), что всякое рациональное выражение, симметричное по отношению к двум буквам u и v, может быть рационально выражено через сумму $u+v$ и произведение uv этих букв.

Пример 1. Не находя корней x_1 и x_2 уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

найти значение выражения

$$(x_1-x_2)^2.$$

Решение. Так как

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2,$$

то

$$(x_1-x_2)^2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-4\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{a^2}.$$

Данное уравнение имеет корни, так что $b^2-4ac\geqslant 0$. Поэтому

$$x_1-x_2=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{a},$$

где при $a>0$ знак плюс соответствует случаю $x_1>x_2$, а знак минус — случаю $x_1>x_2$.

Пример 2. Не находя корней x_1 и x_2 уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

найти значение выражения

$$(x_1^3+mx_1+n)(x_2^3+mx_2+n).$$

Решение. Так как

$$(x_1^3+mx_1+n)(x_2^3+mx_2+n)=(x_1x_2)^3+mx_1x_2(x_1^2+x_2^2)+$$
$$+n(x_1^3+x_2^3)+m^2x_1x_2+mn(x_1+x_2)+n^2,$$

то, пользуясь формулами, выведенными на странице 125, последовательно находим, что данное выражение имеет значение:

$$\frac{c^3}{a^3}+\frac{mc(b^2-2ac)}{a^3}+\frac{n(3abc-b^3)}{a^3}+\frac{m^2c}{a}-\frac{mnb}{a}+n^2,$$

которое может быть представлено в виде

$$\frac{1}{a^3}\left[c^3 - mc(b^2-2ac) + n(3abc - b^3) + m^2a^2c - mna^2b + n^2a^3\right]$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Не находя корней x_1 и x_2 уравнений

$$1)\ x^2 - 5x + 4 = 0;\quad 2)\ 2x^2 + 3x - 7 = 0,$$

найти значение выражения

$$(x_1 - x_2)^2.$$

2. Не находя корней x_1 и x_2 уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

найти значения каждого из выражений:

$$1)\ (x_1^2 + mx_1 + n)(x_2^2 + mx_2 + n);$$

$$2)\ x_1^2 + mx_1 + n + x_2^2 + mx_2 + n.$$

2°. На теореме 2 основано решение следующих задач:

Задача 5. Составить квадратное уравнение, корнями которого служили бы два данных числа α и β.

Решение. Согласно теореме 2, для того чтобы числа α и β были корнями приведенного квадратного уравнения

$$(1)\qquad x^2 + px + q = 0,$$

достаточно, чтобы они были связаны с коэффициентами этого уравнения равенствами

$$\alpha + \beta = -p,\quad \alpha\beta = q.$$

Поэтому, если мы напишем приведенное квадратное уравнение

$$(2)\qquad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0,$$

у которого коэффициентом при x и свободным членом будут служить соответственно числа $-(\alpha + \beta)$ и $\alpha\beta$, то требования теоремы 2 будут выполняться, ввиду чего числа α и β как раз и окажутся корнями уравнения (2).

Впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно, представляя уравнение (2) в виде:

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0.$$

Пример. 1. Составить квадратное уравнение, корни x_1 и x_2 которого были бы связаны равенствами:

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 - m = 0,\quad x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + 1 = 0,$$

где m — данное число.

Решение. Из данных равенств находим, что если $m+1 \neq 0$, то

$$x_1 + x_2 = 1,\quad x_1x_2 = m - 1.$$

Поэтому при $m+1\neq 0$ требованию будет удовлетворять уравнение

$$x^2-x+m-1=0.$$

Если же $m+1=0$, то данные равенства имеют один и тот же вид:

$$x_1x_2+(x_1+x_2)=-1.$$

Следовательно, в этом случае требованию будет удовлетворять бесчисленное множество уравнений

$$x^2+px+q=0,$$

коэффициенты p и q которых связаны только одним условием: $q-p=-1$.

Пример 2. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, зная, что один из его корней есть $\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

Решение. Для решения этой задачи необходимо доказать, что если один из корней квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ с рациональными коэффициентами есть иррациональное число вида $A+\sqrt{B}$, где A и B — рациональные числа, то другой корень этого уравнения имеет вид: $A-\sqrt{B}$.

Так как $A+\sqrt{B}$ есть корень данного уравнения, то

$$(A+\sqrt{B})^2+p(A+\sqrt{B})+q=0,$$

т. е.

$$A^2+B+pA+q=-(2A+p)\sqrt{B}.$$

Левая часть этого равенства есть, по условию, рациональное число, а правая — иррациональное; это равенство возможно только при условии, если

$$A^2+B+pA+q=0 \text{ и } 2A+p=0^*.$$

Но если $p+2A=0$, то $p=-2A$; поэтому $x_1+x_2=2A$; отсюда следует, что

$$x_2=2A-x_1=2A-(A+\sqrt{B})=A-\sqrt{B}.$$

Теперь обратимся к задаче.

Так как

$$x_1=\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=-\frac{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

то

$$x_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2};\ x_1+x_2=1;\ x_1x_2=-\frac{1}{2}.$$

---

* Ибо если бы коэффициент $2A+p$ был отличен от нуля, то иррациональное число $\sqrt{B}$ было бы равно рациональной дроби.

Поэтому требованию удовлетворяет уравнение

$$x^2 - x - \frac{1}{2} = 0,$$

которому равносильно уравнение

$$2x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Пример 3. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, зная, что один из его корней есть $\frac{2+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}$.

Ответ. $2x^2 - 26x - 3 = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить квадратное уравнение, которое имело бы корни:

$$1)\ \frac{a}{2} \text{ и } -\frac{2}{a};\quad 2)\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}} \text{ и } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}};$$

Ответы. 1) $2ax^2 - (a^2 - 4)x - 2a = 0$;

2) $bx^2 - 2ax + a = 0$.

2. Составить квадратное уравнение, корни x_1 и x_2 которого были бы связаны равенствами:

$$x_1^2 + x_2^2 = 5;\quad \frac{x_1^5 + x_2^5}{x_1^3 + x_2^3} = \frac{11}{3}.$$

Ответ. $x^2 \pm 3x + 2 = 0$.

ВОПРОСЫ

1. При каком значении коэффициента p уравнение $x^2 - px + 1 = 0$ имеет корень x_1, равный числу $2 - \sqrt{3}$?

2. Может ли квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ с иррациональными коэффициентами p и q иметь рациональные корни?

Задача 6. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 данного квадратного уравнения

$$(1)\qquad ax^2 + bx + c = 0$$

одной данной зависимостью или двумя данными зависимостями.

Решим эту задачу для отдельных видов этих зависимостей.

I. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения (1) зависимостью $y_{1,2} = x_{1,2} + h$, где h — данное число.

Решение. Дано, что квадратное уравнение (1) имеет корни x_1 и x_2. Требуется написать квадратное уравнение, корнями которого служили бы числа:

$$(2)\qquad x_1 + h,\ x_2 + h.$$

I способ. Следуя способу, указанному в задаче 5 и принимая во внимание, что

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a},$$

сначала составляем сумму и произведение чисел (2):

$$x_1+h+x_2+h=x_1+x_2+2h=-\frac{b}{a}+2h,$$

$$(x_1+h)(x_2+h)=x_1x_2+h(x_1+x_2)+h^2=\frac{c}{a}-\frac{hb}{a}+h^2,$$

а затем записываем искомое уравнение

$$y^2-\left(-\frac{b}{a}+2h\right)y+\frac{c}{a}-\frac{hb}{a}+h^2=0$$

и приводим его к нормальному виду:

$$(3)\qquad ay^2+(b-2ah)y+ah^2-bh+c=0.$$

Пример 1. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения $x^2-5x+6=0$ зависимостью $y_{1,2}=x_{1,2}+h$, где h — данное число.

Решение. Так как

$$x_1+x_2=5,\quad x_1x_2=6,$$

то

$$y_1+y_2=x_1+x_2+2h=5+2h;$$

$$y_1y_2=(x_1+h)(x_2+h)=x_1x_2+h(x_1+x_2)+h^2=6+5h+h^2.$$

Поэтому искомое уравнение имеет вид:

$$y^2-(5+2h)y+(6+5h+h^2)=0.$$

Пример 2. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения $x^2-5x+6=0$ зависимостями:

$$y_1=x_1+h,\quad y_2=x_2-h.$$

Решение. Так как

$$y_1+y_2=x_1+x_2,$$

$$y_1y_2=(x_1+h)(x_2-h)=x_1x_2-h(x_1-x_2)-h^2,$$

то (см. стр. 128, пример 1)

$$y_1+y_2=5,\quad y_1y_2=6\pm h-h^2.$$

Поэтому искомое уравнение имеет вид:

$$y^2-5y+(6\pm h-h^2)=0,$$

где знак плюс соответствует случаю $x_1<x_2$, а знак минус — случаю $x_1>x_2$.

Примечание. Корни $y_{1,2}$ уравнения (3) связаны с корнями $x_{1,2}$ уравнения (1) равенствами:

$$y_{1,2} = x_{1,2} + h.$$

Следовательно,

$$(4) \qquad x_{1,2} = y_{1,2} - h.$$

Поэтому, найдя корни $y_{1,2}$ уравнения (3), мы могли бы найти и корни уравнения (1). Но уравнение (3) ничуть не проще уравнения (1). Однако мы можем сделать уравнение (3) более простым, чем уравнение (1), если мы удачно выберем значение слагаемого h, под которым мы до сих пор подразумевали любое число. Именно мы достигнем упрощения, если выберем для h значение, обращающее коэффициент $b - 2ah$ при первой степени неизвестной y в нуль, т. е. если положим

$$b - 2ah = 0$$

и, следовательно,

$$h = \frac{b}{2a}.$$

При этом значении слагаемого h уравнение (3) примет вид:

$$ay^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0,$$

или вид:

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Если $b^2 - 4ac \geqslant 0$, то полученное уравнение, очевидно, имеет корни:

$$y_{1,2} = \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Но корни уравнения (1) связаны с корнями уравнения (3) равенством (4). Следовательно,

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Мы вновь пришли к формуле (5) (§ 1, п. 2)*.

II способ. Если уравнение (1) имеет корень x_1, то выполняется числовое равенство

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0.$$

Пусть $x_1 + h = y_1$; тогда $x_1 = y_1 - h$.

---

*Указанным приемом можно упрощать уравнения и более высоких степеней, заменяя, например, уравнение третьей степени $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ уравнением $a'y^3 + c'y + d' = 0$, которое не имеет члена, содержащего y^2.

Заменяя в равенстве $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ число x_1 равным ему числом $y_1 - h$, получим числовое равенство

$$a(y_1 - h)^2 + b(y_1 - h) + c = 0;$$

расположив его левую часть по убывающим степеням буквы y_1, придадим ему вид:

$$ay_1^2 + (b - 2ah)y_1 + ah^2 - bh + c = 0.$$

Из этого равенства следует, что число y_1 есть корень уравнения

$$ay^2 + (b - 2ah)y + ah^2 - bh + c = 0.$$

Таким образом, мы нашли квадратное уравнение, корень которого y_1 связан с корнем x_1 квадратного уравнения (1) зависимостью $y_1 = x_1 + h$..

Очевидно, что, повторяя это рассуждение по отношению к корню x_2, мы придем к выводу, что и $y_2 = x_2 + h$.

Как же получилось уравнение $ay^2 + (b - 2ah)y + ah^2 - bh + c = 0$? Оно получилось в результате подстановки в уравнение (1) вместо неизвестной x разности $y - h$ (и последующего расположения левой части найденного уравнения по убывающим степеням неизвестной y), т. е. в результате исключения из уравнений

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{и} \quad y = x + h$$

неизвестной x.

Пример 1. Исключая из уравнений

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{и} \quad y = x + h$$

неизвестную x, последовательно получаем:

$$x = y - h, \quad (y - h)^2 - 5(y - h) + 6 = 0;$$
$$y^2 - (5 + 2h)y + (6 + 5h + h^2) = 0.$$

Очевидно, что этот второй способ решения задачи 6 имеет общий характер и не зависит от того, какое именно уравнение преобразовывается и в какой связи должны находиться корни $y_{1,2}$ искомого уравнения от корней x_1, x_2 данного уравнения. Необходимо только (и достаточно), чтобы уравнение, выражающее эту связь, допускало возможность выразить x через y.

Таковы, например, уравнения:

$$y = kx, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = x^3.$$

II. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения (1) зависимостью

$$y_{1,2} = \frac{1}{x_{1,2}}.$$

Решение. Последовательно находим:

$$y_1 + y_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \left(-\frac{b}{a}\right) : \frac{c}{a} = -\frac{b}{c};$$

$$y_1 y_2 = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a}{c}.$$

Следовательно, требуемое уравнение имеет вид:

$$y^2 + \frac{b}{c} y + \frac{a}{c} = 0,$$

т. е. вид:

$$cy^2 + by + a = 0.$$

К тому же результату мы придем, исключая неизвестную x из уравнений системы:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad y = \frac{1}{x}.$$

III—V. В случае зависимостей

$$y = kx \text{ (III)}, \quad y = x^2 \text{ (IV)}, \quad y = x^3 \text{ (V)}$$

получим соответственно уравнения:

$$ay^2 + bky + ck^2 = 0 \text{ (III)};$$

$$a^2y^2 - (b^2 - 2ac)\,y + c^2 = 0 \text{ (IV)};$$

$$a^3y^2 + b(b^2 - 3ac)\,y + c^3 = 0 \text{ (V)}.$$

При этом для решения вида III можно употребить каждый из указанных двух способов; для решения вида V применение второго способа вызвало бы затруднения; для решения же вида IV можно применить только первый способ (так как уравнение $y = x^2$ не позволяет однозначно выразить x через y).

Повторяя рассуждение, которое мы провели выше при рассмотрении второго способа решения задачи 6, мы можем легко прийти к следующему общему выводу.

Если уравнение

$$(1) \qquad y = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ есть однозначная функция от x, позволяет однозначно выразить x через y с помощью уравнения

$$(2) \qquad x = \psi(y),$$

то для того, чтобы составить уравнение, корни которого y_i были бы связаны с корнями x_i данного уравнения

$$(3) \qquad f(x) = 0$$

зависимостью (1), достаточно из уравнений (3) и (1) исключить неизвестную x. В результате мы получим уравнение

$$f[\psi(y)] = 0, \text{ или } g(y) = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 3x - 6 = 0$ равенствами:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2 + 1}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1 + 1}.$$

Ответ. $2y^2 + 39y + 12 = 0$.

2. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения $3x^2 - 5x - 1 = 0$ равенствами:

$$y_1 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + x_2}, \quad y_1 = \frac{x_2 - 1}{x_1 + x_2}.$$

Ответ. $25y^2 + 5y - 9 = 0$.

3. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения $3x^2 - 7x + 3 = 0$ равенствами:

$$y_{1,2} = 2x_{1,2} + 1.$$

Ответ. $3y^2 - 20y + 29 = 0$.

4. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равенствами:

$$y_1 = mx_1x_2, \quad y_2 = nx_1x_2,$$

где m и n — данные числа.

Ответ. $a^2y^2 - (m + n)acy + mnc^2 = 0$.

5. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения $x^2 + px + q = 0$ равенствами:

$$1)\ y_{1,2} = \frac{1}{x_{1,2}^2}; \qquad 2)\ y_{1,2} = \frac{1}{x_{1,2}^3};$$

$$3)\ y_{1,2} = 1 - \frac{2}{x_{1,2}}; \qquad 4)\ y_{1,2} = \frac{x_{1,2}}{x_{1,2} - 1}.$$

6. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равенствами:

1) $y_1 = \frac{x_1}{x_2}, \ y_2 = \frac{x_2}{x_1}$;
2) $y_1 = x_1 + x_2, \ y_2 = x_1x_2$;
3) $y_1 = x_1 + 2x_2, \ y_2 = x_2 + 2x_1$.

7. Составить квадратное уравнение, корни которого y_1 и y_2 были бы связаны с корнями x_1 и x_2 уравнения $x^2 + px + q = 0$ равенствами:

$$y_{1,2} = x_{1,2}^2 + mx_{1,2} + n.$$

3°. На теоремах 1 и 2 основано решение следующих задач.

Задача 7. По данной сумме s и произведению p двух чисел найти эти числа.

Решение. Обозначая искомые числа через x_1 и x_2, мы можем выразить условие задачи в такой форме: требуется найти два числа x_1 и x_2, удовлетворяющие уравнениям:

$$x_1 + x_2 = s, \quad x_1x_2 = p.$$

Можно было бы решить эту систему уравнений способом подстановки. Но можно сразу, опираясь на теорему 1, написать то уравнение, корни которого могут быть приняты за числа x_1 и x_2. В самом деле, если мы напишем приведенное уравнение

$$x^2 - sx + p = 0,$$

принимая за его коэффициент при первой степени неизвестной x данную сумму s искомых чисел, взятую с противоположным знаком, и за его свободный член—данное произведение p этих чисел, то это уравнение как раз и будет требуемым. Действительно, при условии

$$s^2 - 4p \geqslant 0$$

уравнение $x^2 - sx + p = 0$ будет иметь два (неравных или равных) корня x_1 и x_2, сумма $x_1 + x_2$ и произведение x_1x_2 которых будут равны соответственно числам s и p и, следовательно, будут числами, которые мы ищем. Этим способом при указанном условии мы найдем одну пару чисел, удовлетворяющих условию задачи 7.

Но может возникнуть вопрос: не существуют ли другие пары чисел, удовлетворяющие тому же требованию? На этот вопрос дает ответ теорема 2. Именно если мы допустим, что существует какая-либо пара чисел x' и x'', связанных с числами s и p равенствами

$$x' + x'' = s, \quad x'x'' = p,$$

то в силу теоремы 2 числа x' и x'' будут служить корнями уравнения $x^2 - sx + p = 0$ и, следовательно, совпадут с числами x_1 и x_2. Таким образом, никакая пара чисел, отличная от чисел x_1 и x_2, найденных путем решения этого уравнения, не будет служить ответом на вопрос задачи 7.

Задача 8. При каком соотношении между коэффициентами p и q уравнения

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

его корни x_1 и x_2 будут находиться в данной зависимости между собой?

Решим эту задачу для частных случаев.

1. При каком соотношении между коэффициентами p и q уравнения (1) его корни x_1 и x_2 будут находиться в данном отношении m?

Решение. Если x_1 и x_2—корни уравнения (1), то, согласно теореме 1, имеют место равенства:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = q. \tag{2}$$

Если, кроме того,

$$x_1 = mx_2, \tag{3}$$

то из равенств

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 = mx_2$$

следует, что при $m+1\neq 0$

$$x_1=-\frac{mp}{m+1},\ x_2=-\frac{p}{m+1}.$$

Подставляя эти значения корней x_1 и x_2 в равенство $x_1x_2=q$, находим, что при выполнении равенства (3) коэффициенты p и q связаны соотношением

$$(4)\qquad \left(-\frac{mp}{m+1}\right)\cdot\left(-\frac{p}{m+1}\right)=q,$$

т. е. соотношением

$$(5)\qquad mp^2=(m+1)^2q.$$

Обратно, если имеет место соотношение (4), то это означает, что числа x_1 и x_2 удовлетворяют равенству $x_1x_2=q$. Так как эти числа удовлетворяют также равенству $x_1+x_2=-p$, то они, в силу теоремы 2, служат корнями уравнения (1). Но вместе с тем числа x_1 и x_2 связаны зависимостью (3), т. е. находятся в отношении m.

Таким образом, для того чтобы корни x_1 и x_2 данного уравнения (1) находились в зависимости $x_1=mx_2$, где $m\neq-1$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты p и q этого уравнения были связаны соотношением

$$mp^2=(m+1)^2q.$$

Если же $m=-1$, то требование (3) принимает вид:

$$x_1=-x_2,$$

т. е.

$$x_1+x_2=0.$$

Но, для того чтобы выполнялось это требование, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$p=0,$$

которым в случае $m=-1$ и надо заменить соотношение (5).

2. При каком соотношении между коэффициентами p и q уравнения (1) его корни x_1 и x_2 связаны зависимостью

$$x_1^2-x_2^2=m,$$

где m—данное число.

Решение. Если x_1 и x_2—корни уравнения (1), то имеют место равенства.

$$(2)\qquad x_1+x_2=-p,\ x_1x_2=q.$$

Если, кроме того,

$$(3)\qquad x_1^2-x_2^2=m,$$

то из равенств

$$x_1+x_2=-p,\ x_1^2-x_2^2=m$$

следует, что при $p\neq 0$

$$x_1-x_2=-\frac{m}{p}$$

и что

$$x_1=-\frac{p^2+m}{2p},\ x_2=-\frac{p^2-m}{2p};$$

подставляя эти значения корней x_1 и x_2 в равенство $x_1x_2 = q$, находим, что при $p \neq 0$ коэффициенты p и q связаны соотношением

$$(4) \qquad \left(-\frac{p^2+m}{2p}\right)\left(-\frac{p^2-m}{2p}\right) = q,$$

т. е. соотношением

$$p^4 - m^2 = 4p^2q.$$

Обратно, если имеет место соотношение (4), то это означает, что числа x_1 и x_2 удовлетворяют равенству $x_1x_2 = q$. Так как эти числа удовлетворяют также равенству $x_1 + x_2 = -p$, то они, в силу теоремы 2, служат корнями уравнения (1). Вместе с тем числа x_1 и x_2 связаны зависимостью (3), т. е. удовлетворяют заданному требованию.

УПРАЖНЕНИЯ

1. При каком соотношении между коэффициентами a, b, c уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ его корни x_1 и x_2 связаны зависимостью:

1) $x_1 - x_2 = d$; 2) $mx_1 + nx_2 = p$,

где d, m, n, p — данные числа?

Ответы. 1) $b^2 - 4ac = a^2d^2$;

2) $(ap + bn)(ap + bm) + ac(m - n)^2 = 0$.

2. При каком соотношении между коэффициентами a, b, c уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ его корни x_1 и x_2 связаны зависимостью:

$$mx_1^2 + nx_1 + p = mx_2^2 + nx_2 + p?$$

Ответ. Если $b^2 - 4ac > 0$, то искомое соотношение имеет вид: $an = bm$; если $b^2 - 4ac = 0$, то $x_1 = x_2$ и требуемая зависимость выполняется в силу этого равенства.

§ 3. ТРЕХЧЛЕН ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

1. Общее понятие

Определение. Трехчленом второй степени называется целая рациональная функция второй степени, т. е. выражение

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c,$$

в котором x есть независимая переменная, а коэффициенты a, b, c — данные действительные (вещественные) числа. Коэффициенты b и c могут иметь и нулевые значения; коэффициент же a предполагается отличным от нуля, т. е. имеет положительное или отрицательное значение.

2. Связь трехчлена второй степени с уравнением второй степени.

Каждое уравнение второй степени

$$(2) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

представляет собою равенство, выражающее вопрос, при каком значении переменной x трехчлен второй степени принимает значение 0 (обращается в нуль). Всякое значение переменной x, обращающее трехчлен второй степени (1) в нуль и являющееся поэтому корнем уравнения второй степени (2), называется **корнем** трехчлена второй степени (1).

Как мы знаем (§ 1, п. 2), в том случае, если выражение

$$b^2-4ac,$$

называемое дискриминантом уравнения второй степени (2), имеет положительное значение или значение 0, уравнение второй степени имеет два (соответственно неравных или равных) корня. Но так как корень уравнения (2) есть вместе с тем корень трехчлена (1), то мы можем сказать, что при том же условии

$$b^2-4ac \geqslant 0$$

трехчлен (1) имеет два (соответственно неравных или равных) корня.

Таким образом, в зависимости от того, который из трех случаев

$$1)\ b^2-4ac>0,\quad 2)\ b^2-4ac=0,\quad 3)\ b^2-4ac<0$$

имеет место, трехчлен второй степени (1) 1) имеет два неравных корня, 2) имеет два равных корня, 3) не имеет корней.

Выражение b^2-4ac, названное раньше (§ 1, п. 2) дискриминантом уравнения второй степени (2), называется также **дискриминантом трехчлена второй степени** (1). Мы будем впредь для краткости обозначать его буквой D:

$$D=b^2-4ac.$$

3. Разложение трехчлена второй степени на множители. В случае, если дискриминант D трехчлена второй степени имеет положительное значение или значение 0, т. е. если $D \geqslant 0$, то этот трехчлен может быть разложен на множители первой степени (линейные) относительно переменной x.

В самом деле, как мы знаем (§ 1, п. 2), всякий трехчлен второй степени (1) может быть представлен в виде:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]. \tag{3}$$

Но при условии $b^2-4ac>0$ выражение b^2-4ac можно рассматривать как квадрат арифметического корня $\sqrt{b^2-4ac}$, так что в этом случае выражение (3) может быть заменено тождественно равным ему выражением

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right].$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, представляет собой разность квадратов двух выражений и может быть разложено на множители, после чего выражение (3) примет вид:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right),$$

или вид:

$$a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Итак, мы пришли к тождеству:

$$(4)\quad ax^2+bx+c\equiv a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

Если мы теперь обозначим числа

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

соответственно через x_1 и x_2, то тождество (4) приобретет вид:

$$(5)\qquad ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2).$$

Множители $x-x_1$ и $x-x_2$ соответственно представляют собой разности между первой степенью неизвестной x и числами x_1 и x_2, а числа x_1 и x_2, каждое из которых обращает правую и, следовательно, левую часть тождества (5) в нуль, суть корни трехчлена (5).

Следовательно, мы пришли к выводу, что при условии $D>0$ трехчлен второй степени

$$ax^2+bx+c$$

может быть представлен в виде произведения

$$a(x-x_1)(x-x_2),$$

где a есть коэффициент при x^2, а x_1 и x_2 — корни этого трехчлена, имеющие значения:

$$(6)\qquad x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Мы рассмотрели случай $D>0$. Если же $D=0$, то выражение (3) принимает вид:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

так что в этом случае

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}\right),$$

т. е.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где

$$(7)\quad x_1=-\frac{b}{2a},\quad x_2=-\frac{b}{2a}.$$

Очевидно, что формулами (6) выражаются значения корней трехчлена второй степени как в случае $D>0$, так и в случае $D=0$, ибо в последнем случае формулы (6) сводятся к формулам (7).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Разложить на множители первой степени следующие трехчлены:

1) $x^2 - 13x + 30$; $x^2 + 17x + 16$; $2x^2 + 10x - 72$;
2) $2x^2 - 3x - 5$; $9x^2 - 9x + 2$; $24x^2 - 10x + 1$;
3) $-2x^2 - 3x + 5$; $-x^2 + 20x + 69$; $-27x^2 + 48x - 13$;
4) $4x^2 - 12x + 9$;
5) $x^2 - ax - 6a^2$; $x^2 + a^2x - 2a^4$; $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$;
6) $x^2 - 4m(x - m) - n^2$; $x^2 - 2(a + b)x + 10ab - 3(a^2 + b^2)$;
7) $4abx^2 - 2a(a + b^2)x + a^2b$;
8) $x^2 - ax - a\sqrt{b} - b$;
9) $4a^2x^2 - 4abx + b^2 - 1$;
10) $(a^2 - 4b^2)x^2 + 2(a^3 + 2b^3)x + a^4 - b^4$;
11) $3x - x^2 - n(1 - n) - 2$ (по отношению к букве x и к букве n).

2. Сократить следующие дроби:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 4x - 21}; \quad \frac{x^2 - 6x - 27}{x^2 + 9x + 18}; \quad \frac{12x^2 - x - 6}{3x^2 + 5x + 2};$$

$$\frac{2x^2 + 7x - 15}{8x^2 - 14x + 3}; \quad \frac{x^3 + 2ax^2 + a^2x}{ax^2 - a^3};$$

$$\frac{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 4x - 5)}{(x^2 - 1)(x^2 - x - 20)}.$$

3. Сократить следующие дроби:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 3x}; \quad \frac{x^2 - ax - 6a^2}{x^2 - 7ax + 12a^2};$$

$$\frac{(12x^2 - x - 6)(x^2 - 18x + 77)}{(x^2 - 10x - 11)(3x^2 + 5x + 2)}; \quad \frac{x^2 - 2bx - 4a(a - 2b) - 3b^2}{x^2 - 4ax - b^2 + 4a^2}.$$

$$\frac{x^2 - (a^2 + b)x - 2(a^4 + b^2) + 5a^2b}{x^2 - 3a^2x + 2a^4 + b(a^2 - b)};$$

$$\frac{x^2 - (a + b + 1)x + a(b + 1)}{x^2 - 2bx + b^2 - 1};$$

$$\frac{x^3 - 14x^2 + 45x}{x^4 - 15x^3 + 59x^2 - 45x};$$

$$\frac{x^2 - 2ax + a^2 - b}{x^2 - 2(a + \sqrt{b})x + a^2 + b + 2a\sqrt{b}}.$$

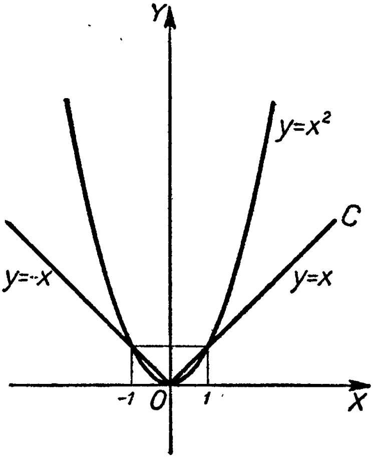
4. **График зависимости** $y = x^2 + px + q$. В гл. II, § 1, п. 6 и п. 9, был рассмотрен график зависимости $y = x^2$. Он имеет вид, представленный на чертеже 18, и обладает следующими свойствами:

1) В промежутке $(-\infty < x < 0)$ график опускается вниз, а в промежутке $(0 < x < \infty)$ поднимается вверх; это означает следующее: если x_1 и x_2 — абсциссы, принадлежащие промежутку $(-\infty \cdots 0)$, то при условии $x_1 < x_2$ абсциссе x_2 соответствует меньшая ордината, чем абсциссе x_1; если же x_1 и x_2 — абсциссы, принадлежащие промежутку $(0 \cdots \infty)$, то при том же условии $x_1 < x_2$ абсциссе x_2 соответствует большая ордината, чем абсциссе x_1.

2) График состоит из двух частей, имеющих общую точку O (начало координат) и симметричных относительно оси OY.

В гл. II, § 3, п. 12 был рассмотрен график зависимости $y = x^{\frac{m}{n}}$, где m и n—целые положительные числа. Так как степень x^2 есть вид степени $x^{\frac{m}{n}}$, соответствующий случаю $m = 2$, $n = 1$, то график зависимости $y = x^2$ обладает всеми свойствами графика зависимости $y = x^{\frac{m}{n}}$. Именно:

3) График зависимости $y = x^2$ в промежутке $(0 < x < 1)$ расположен под биссектрисой OC первого координатного угла, а в промежутке $(1 < x < \infty)$ — над этой биссектрисой. Отсюда легко заключить, что, в силу симметрии, график зависимости $y = x^2$ в промежутке $(-1 < x < 0)$ расположен под биссектрисой второго координатного угла, а в промежутке $(-\infty < x < -1)$ — над этой биссектрисой.



Черт. 18

4) Если абсцисса x, принимая положительные значения, неограниченно возрастает, то ординаты соответствующих точек графика зависимости $y = x^2$ также неограниченно возрастают; это означает, что, как бы велико ни было данное число G, можно указать такую абсциссу x_0, которой соответствует ордината y_0, превосходящая число G, так что при $x \geqslant x_0$ будет иметь место неравенство $y \geqslant y_0 > G$.

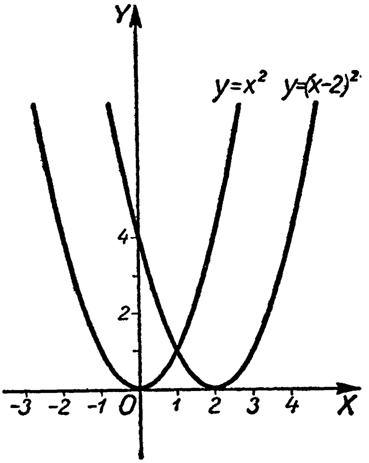
Теперь рассмотрим графики зависимостей $y = (x \mp h)^2$ и $y = x^2 \pm g$, где h и g — данные положительные числа, и докажем, что эти графики отличаются от графика зависимости $y = x^2$ исключительно только своим положением относительно осей OX и OY, так что они могут быть путем наложения полностью совмещены с графиком зависимости $y = x^2$ точно так же, как могут быть совмещены в геометрии два треугольника, имеющие равные элементы. Проведем наши рассуждения на примерах.

1°. Для построения графика зависимости $y = (x - 2)^2$ составим таблицу (см. стр. 144).

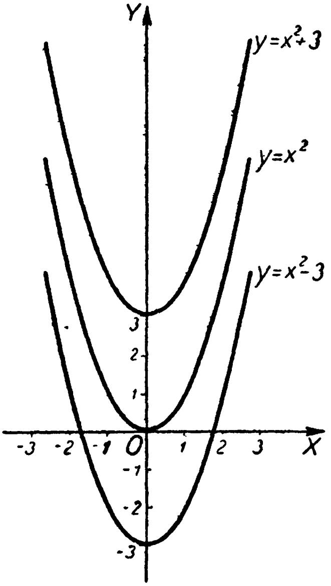
Из этой таблицы видно, что степень $(x - 2)^2$ принимает все те и только те значения, что и степень x^2, но то значение, которое степень x^2 принимает в точке x_0, степень $(x - 2)^2$ принимает в точке $x_0 + 2$, т. е. все значения степени $(x - 2)$ как бы запаздывают, отодвигаются вправо на 2 единицы масштаба, так что график зависимости $y = (x - 2)^2$ может быть получен простым *смещением* графика зависимости $y = x^2$ вправо на 2 единицы масштаба (черт. 19а).

x	$x - 2$	y
$2 + 0$	0	0
2 ± 1	± 1	1
2 ± 2	± 2	4
2 ± 3	± 3	9
. . .	. . .	. . .
$2 \pm h$	$\pm h$	h^2

x	x^2	y
0	0	± 3
± 1	1	1 ± 3
± 2	4	4 ± 3
± 3	9	9 ± 3
. . .	. . .	. . .
$\pm x_0$	x_0^2	$x_0^2 \pm 3$



Черт. 19 а

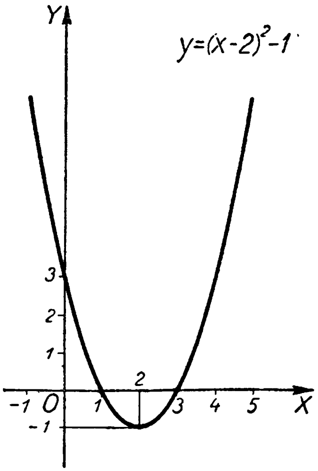


Черт. 19 б

С помощью тех же рассуждений можно установить, что график зависимости $y = (x + 2)^2$ может быть получен простым смещением графика зависимости $y = x^2$ влево на 2 единицы масштаба. Вообще график зависимости $y = (x \mp h)^2$, где h — *положительное* число, может быть получен простым смещением графика зависимости $y = x^2$ соответственно *вправо* (в случае знака минус) и *влево* (в случае знака плюс) по направлению оси OX на h единиц масштаба.

2°. Для построения графика зависимости $y = x^2 \pm 3$ составим таблицу (см. стр. 143).

Из этой таблицы видно, что ординаты $x_0^2 + 3$ и $x_0^2 - 3$, соответствующие какой-либо абсциссе x_0, получаются из ординаты x_0^2, соответствующей той же абсциссе x_0, соответственно путем прибавления или вычитания одного и того же числа 3; ввиду этого графики зависимостей $y=x^2 + 3$ и $y = x^2 - 3$ могут быть получены простым смещением графика зависимости $y=x^2$ соответственно вверх или вниз на 3 единицы масштаба (черт. 19 б).



Черт 19 в

Вообще график зависимости $y=x^2 \pm g$, где g — положительное число, может быть получен смещением графика зависимости $y = x^2$ соответственно вверх (в случае знака плюс) или вниз (в случае знака минус) по направлению оси OY на g единиц масштаба.

Умение строить графики зависимостей $y = (x \mp h)^2$ и $y = x^2 \pm g$, как мы сейчас увидим, дает возможность построить график зависимости $y = x^2 + px + q$, где $x^2 + px + q$ есть приведенный трехчлен второй степени, т. е. такой трёхчлен, высший член которого x^2 имеет коэффициент 1.

В самом деле, если дана, например, зависимость

$$y = x^2 - 4x + 3,$$

то, выделяя из трехчлена полный квадрат (§ 1, п. 2), мы можем представить ее в виде:

$$y = (x - 2)^2 - 1.$$

Отсюда следует, что для построения графика этой зависимости достаточно будет график зависимости $y = x^2$ сначала сместить вправо на 2 единицы масштаба, а затем из этого положения вниз на 1 единицу масштаба (черт. 19 в).

Вообще, если дана зависимость

$$y = x^2 + px + q,$$

то, выделяя из трехчлена полный квадрат, мы можем представить ее в виде:

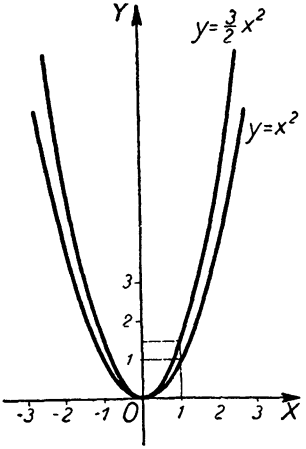
$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right).$$

Отсюда следует, что для построения графика этой зависимости достаточно будет график зависимости $y = x^2$ сместить сначала вправо (если $p < 0$) или влево (если $p > 0$) по направлению оси OX на $\left|\frac{r}{2}\right|$ единиц масштаба, а затем из этого положения — вверх $\left(\text{если } \frac{p^2}{4} - q < 0\right)$ или вниз $\left(\text{если } \frac{p^2}{4} - q > 0\right)$ по направлению оси OY на $\left|\frac{p^2}{4} - q\right|$ единиц масштаба.

5. График зависимости $y = ax^2 + bx + c$. Для того чтобы построить этот график, рассмотрим, как строится график зависимости $y = mx^2$, где m есть положительное или отрицательное число. Проведем наши рассуждения на примерах.

1°. Для построения графика зависимости $y = \frac{3}{2}x^2$ составим таблицу:

x	x^2	y
0	0	0
± 1	1	$1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
± 2	4	$4 \cdot \frac{3}{2} = 6$
± 3	9	$9 \cdot \frac{3}{2} = 13\frac{1}{2}$
± 4	16	$16 \cdot \frac{3}{2} = 24$
...	...	...
$\pm x_0$	x_0^2	$x_0^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}x_0^2$



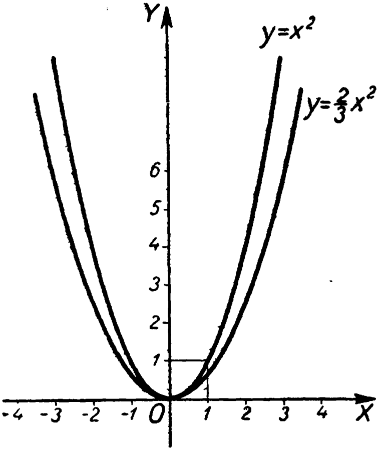
Черт. 20

Из этой таблицы видно, что ордината $\frac{3}{2}x_0^2$, соответствующая какой-либо абсциссе x_0, получается из ординаты x_0^2, соответствующей той же абсциссе x_0, путем увеличения этой ординаты в отношении $\frac{3}{2} : 1$, или, как говорят в геометрии, путем ее растяжения по направлению оси OY в отношении $\frac{3}{2} : 1$ (черт. 20).

Поэтому говорят, что график зависимости $y = \frac{3}{2}x^2$ получается из графика зависимости $y = x^2$ путем растяжения его по направлению оси OY в отношении $\frac{3}{2} : 1$.

2°. Для построения графика зависимости $y=\frac{2}{3}x^2$ составим таблицу:

x	x^2	y
0	0	0
± 1	1	$1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$
± 2	4	$4\cdot\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$
± 3	9	$9\cdot\frac{2}{3}=6$
± 4	16	$16\cdot\frac{2}{3}=10\frac{2}{3}$
...	...	...
$\pm x_0$	x_0^2	$x_0^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}x_0^2$



Черт. 21

Из этой таблицы видно, что ордината $\frac{2}{3}x_0^2$, соответствующая какой-либо абсциссе x_0, получается из ординаты x_0^2, соответствующей той же абсциссе x_0, путем уменьшения этой ординаты в отношении $\frac{2}{3}:1$, или, как говорят в геометрии, путем ее сжатия по направлению оси OY в отношении $\frac{2}{3}:1$.

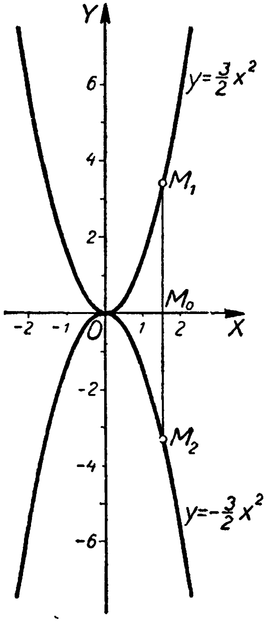
Поэтому говорят, что график зависимости $y=\frac{2}{3}x^2$ получается из графика зависимости $y=x^2$ путем сжатия его по направлению оси OY в отношении $\frac{2}{3}:1$ (черт. 21).

Из рассмотрения примеров 1° и 2° следует, что график зависимости $y=mx^2$, где $m>0$, получается из графика зависимости $y=x^2$ путем растяжения по направлению оси OY в отношении $m:1$ в том случае, если $m>1$, и путем сжатия по направлению оси OY в отношении $m:1$, если $m<1$.

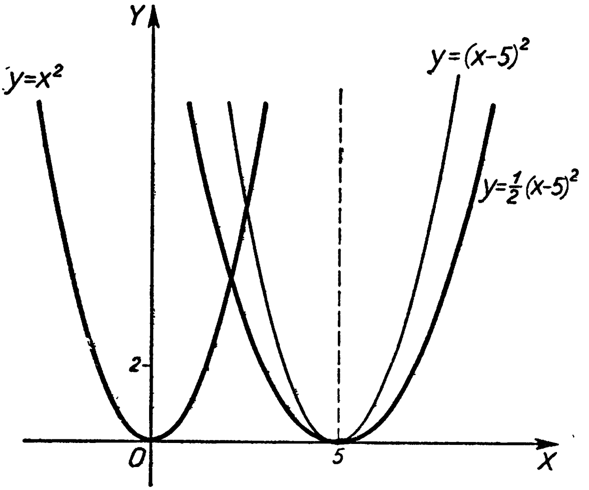
3°. Графики зависимостей $y=-\frac{3}{2}x^2$ и $y=\frac{3}{2}x^2$ расположены симметрично по отношению к оси OX, так как каждой точке M_0 сси OX с абсциссой x_0 соответствуют на этих графиках точки M_1 и M_2 с ординатами $\frac{3}{2}x_0^2$ и $-\frac{3}{2}x_0^2$, симметрично расположенные относительно оси OX (черт. 22).

Так же расположены относительно оси OX графики зависимостей $y = \frac{2}{3}x^2$ и $y = -\frac{2}{3}x^2$.

Вообще графики зависимостей $y = mx^2$ и $y = -mx^2$ расположены симметрично относительно оси OX. Поэтому каждый из них представляет собой отражение другого в оси OX и может быть построен как линия, симметричная другой линии относительно данной оси.



Черт. 22



Черт. 23

4°. Теперь ясно, что для построения графика зависимости $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$ достаточно график зависимости $y = x^2$ подвергнуть смещению вправо на 5 единиц масштаба и затем, исходя из этого его положения, подвергнуть его сжатию в отношении $\frac{1}{2}:1$ (черт. 23).

5°. Для построения графика зависимости $y = 3(x+4)^2 - 5$ достаточно график зависимости $y = x^2$ последовательно подвергнуть следующим преобразованиям (черт. 24):

1) смещению влево на 4 единицы масштаба;

2) растяжению по направлению оси OY в отношении $3:1$, т. е. в 3 раза;

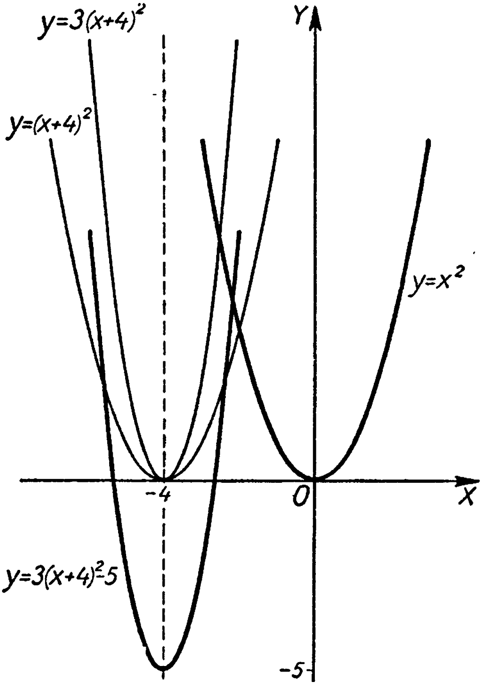
3) смещению вниз на 5 единиц масштаба.

6°. Теперь займемся построением графика зависимости $y = 2x^2 + 4x - 1$, т. е. графика трехчлена $2x^2 + 4x - 1$. Для этого достаточно будет сначала преобразовать этот трехчлен в произведение путем вынесения за скобки коэффициента при x^2:

$$2x^2+4x-1=2\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right),$$

а затем преобразовать приведенный трехчлен $x^2+2x-\frac{1}{2}$, заключенный в скобки, путем выделения из него квадрата:

$$x^2+2x-\frac{1}{2}=(x+1)^2-\frac{3}{2}.$$



Черт. 24

Следовательно, данная зависимость есть не что иное, как зависимость

$$y=2\left[(x+1)^2-\frac{3}{2}\right],$$

и для построения ее графика достаточно последовательно подвергнуть график зависимости $y=x^2$ следующим преобразованиям (черт. 25):

1) смещению влево на 1 единицу масштаба;

2) смещению вниз на $\frac{3}{2}$ единицы масштаба;

3) растяжению по направлению оси OY в отношении 2 : 1, т. е. в 2 раза.

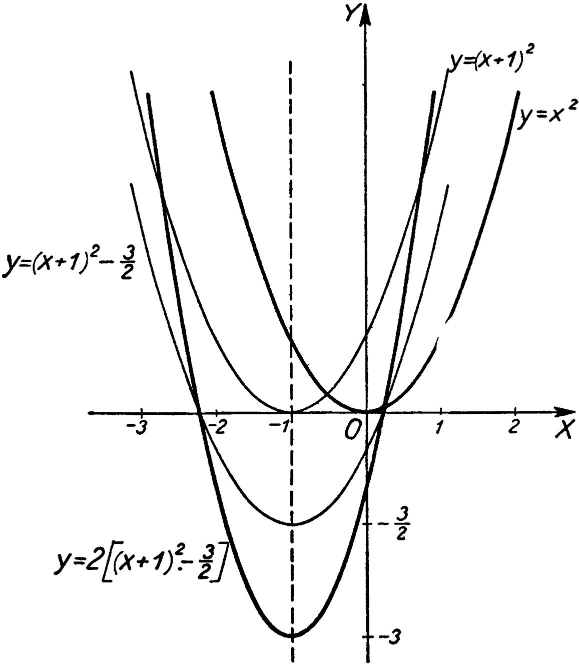
Вообще, если дана зависимость

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a > 0,$$

то, представляя ее в виде (§ 1, п. 2)

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right],$$

заключаем, что для построения ее графика достаточо последовательно подвергнуть график зависимости $y = x^2$ следующим преобразованиям:



Черт. 25

1) смещению вправо или влево по направлению оси OX на $\left|\frac{b}{2a}\right|$ единиц масштаба;

2) смещению вверх или вниз по направлению оси OY на $\left|\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right|$ единиц масштаба;

3) растяжению или сжатию по направлению оси OY в отношении $a : 1$.

Если же данную зависимость представить в виде

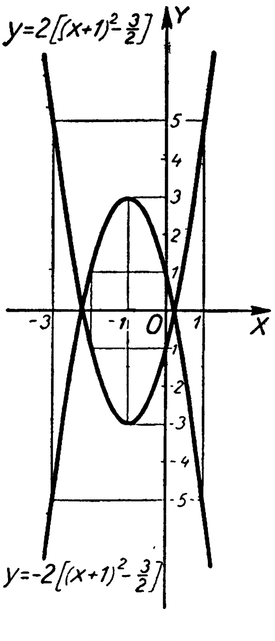
$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

то для построения ее графика надо будет последовательно подвергнуть график зависимости $y = x^2$ следующим преобразованиям (см. пример 5°):

1) смещению вправо или влево по направлению оси OX на $\left|\frac{b}{2a}\right|$ единиц масштаба;

2) растяжению или сжатию по направлению оси OY в отношении $a : 1$;

3) смещению вверх или вниз на $\left|\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right|$ единиц масштаба.



Черт. 26

Таким образом, график зависимости $y = ax^2 + bx + c$, где $a > 0$, может быть получен из графика зависимости $y = x^2$ либо посредством смещения, либо посредством растяжения или сжатия этого графика, либо посредством применения обоих этих преобразований в одном или другом порядке.

7°. Теперь рассмотрим, как построить график зависимости

$$(1) \qquad y = -2x^2 - 4x + 1,$$

т. е. график трехчлена $-2x^2 - 4x + 1$, у которого коэффициент при x^2 есть отрицательное число.

Представляя эту зависимость в виде:

$$(2) \qquad y = -(2x^2 + 4x - 1) = -2\left[(x+1)^2 - \frac{3}{2}\right],$$

видим, что ее график может быть получен из графика зависимости

$$(3) \qquad y = 2x^2 + 4x - 1,$$

рассмотренного в п. 6°, посредством отражения этого графика в оси OX, так что графики зависимостей (1) и (3) симметричны один другому относительно оси OX (черт. 26).

Вообще график зависимости

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a < 0,$$

симметричен графику зависимости

$$y = -ax^2 - bx - c$$

относительно оси OX.

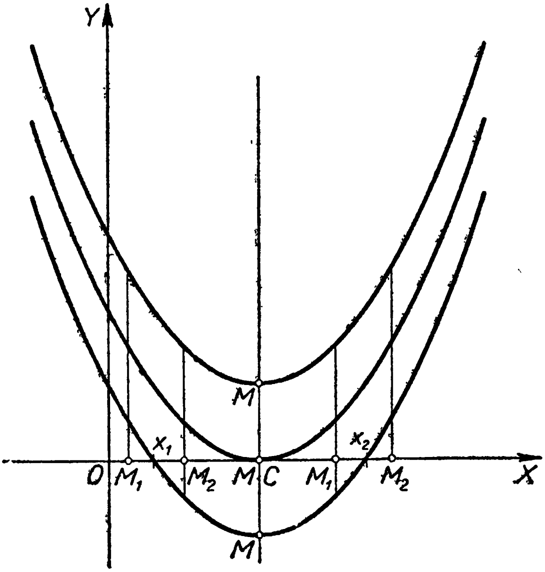
Кривая (линия), представляющая собой график зависимости $y = ax^2 + bx + c$, называется **параболой**. Следовательно, кривая, называемая параболой, определяется тем, что ордината y каждой ее точки связана с абсциссой x этой точки зависимостью

$$y = ax^2 + bx + c,$$

так что каждое значение переменной y есть то значение трехчлена $ax^2 + bx + c$, которое этот трехчлен имеет при некотором значении переменной x.

Иначе говоря, параболой называется кривая, координаты каждой точки которой удовлетворяют уравнению:

$$y = ax^2 + bx + c.$$



Черт. 27

6. Ход изменения параболы. Ход изменения параболы, определяемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$ при условии $a > 0$, очевидно, ничем не отличается от хода изменения параболы, определяемой уравнением $y = x^2$. Именно, каждая такая парабола состоит из двух ветвей, симметрично расположенных относительно некоторой оси, параллельной оси OY; эта ось симметрии пересекает ось абсцисс в точке C, обладающей следующими свойствами (черт. 27):

1) каждой паре точек оси абсцисс, равноотстоящих от точки C, соответствуют на параболе точки, имеющие равные ординаты;

2) если точки M_1 (x_1; y_1) и M_2 (x_2; y_2) расположены влево от точки C и при этом $x_2 > x_1$, то $y_2 < y_1$, т. е. при перемещении вдоль левой ветви параболы в сторону возрастающих абсцисс соответствующие этим абсциссам ординаты убывают; если же точки M_1 (x_1; y_1) и M_2 (x_2; y_2) расположены вправо от точки C и при этом

$x_2 > x_1$, то $y_2 > y_1$, т. е. при перемещении вдоль правой ветви параболы в сторону возрастающих абсцисс соответствующие этим абсциссам ординаты возрастают;

3) точка C есть та точка, которой соответствует наименьшая ордината, причем в этой точке ординаты переходят от убывания к возрастанию.

Пользуясь свойством точки C, нетрудно найти ее абсциссу; для этого достаточно найти абсциссу наименьшей ординаты. Так как каждая ордината y точек параболы имеет значение

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

то ее наименьшее значение при $a>0$ соответствует наименьшему значению множителя $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, зависящему от переменной x; но этот множитель при всех значениях переменной x, отличных от значения $-\frac{b}{2a}$, имеет положительные значения, а при значении $-\frac{b}{2a}$ принимает значение 0, которое и является наименьшим его значением. Следовательно, при $a>0$ наименьшую ординату имеет та точка параболы, которая имеет абсциссу $-\frac{b}{2a}$.

При $x=-\frac{b}{2a}$ множитель $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ обращается в нуль; поэтому наименьшая ордината имеет значение $-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Итак, точка C, в которой ось симметрии параболы пересекает ось абсцисс, имеет абсциссу $-\frac{b}{2a}$, а точка параболы M, принадлежащая этой оси симметрии и имеющая ординату $-\frac{b^2-4ac}{4a}$, есть та точка, в которой ординаты точек параболы переходят от убывания к возрастанию и которой, следовательно, соответствует наименьшая ордината.

Эта точка M с координатами $\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ называется вершиной параболы; она лежит на оси симметрии параболы и является общей точкой ее ветвей, из которой они расходятся в обе стороны от оси симметрии.

Пример 1. Вершина параболы

$$y=2x^2+4x-1$$

имеет координаты (—1; —3).

Пример 2. Вершина параболы

$$y=(m-1)x^2-2mx+(m+1),\ \text{где}\ m>1,$$

имеет координаты $\left(\frac{m}{m-1},\ -\frac{1}{m-1}\right)$.

Примечание. Если в трехчлене $ax^2 + bx + c$ коэффициент b есть число четное, то, полагая $b = 2b'$, можем представить координаты вершины параболы, изображающей изменение этого трехчлена, в виде

$$-\frac{b'}{a}, \quad -\frac{b'^2 - ac}{a}.$$

Теперь рассмотрим ход изменения параболы, соответствующей уравнению

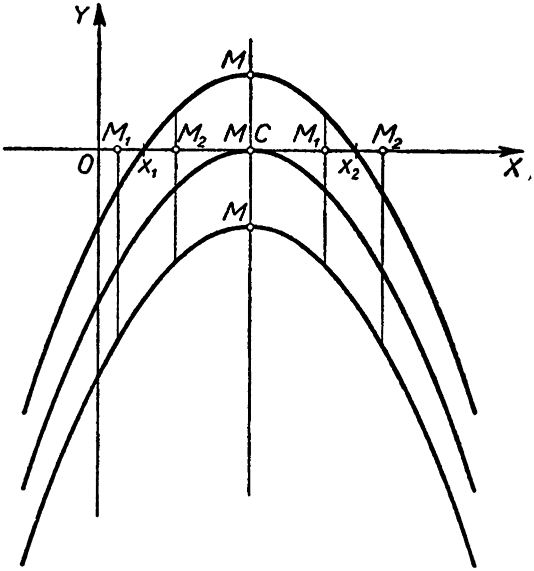
$$(1) \qquad y = ax^2 + bx + c,$$

при условии $a < 0$.

Так как эта парабола симметрична параболе, соответствующей уравнению

$$(2) \qquad y = -ax^2 - bx - c,$$

где $a<0$ и, следовательно, $-a>0$, то мы можем сделать следующие заключения (черт. 28):



Черт. 28

1) вершина параболы (1) симметрична вершине параболы (2), т. е. имеет координаты:

$$x = -\frac{b}{2a}, \quad y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

определяемые по тем же формулам, по которым эти координаты находились в случае $a > 0$;

2) каждой паре точек оси абсцисс, равноотстоящих от точки C с

абсциссой $-\frac{b}{2a}$, соответствуют на параболе (1) точки, имеющие равные ординаты;

3) если точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ расположены влево от точки C и при этом $x_2>x_1$, то $y_2>y_1$, т.е. в промежутке от $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$ ординаты точек параболы (1) возрастают; если же точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ расположены вправо от точки C и при этом $x_2>x_1$, то $y_2<y_1$, т. е. в промежутке от $-\frac{b}{2a}$ до ∞ ординаты точек параболы (1) убывают;

4) точка C есть та точка, которой соответствует наибольшая ордината, причем в этой точке ординаты переходят от возрастания к убыванию.

Итак, трехчлен

$$ax^2+bx+c$$

имеет при условии $a>0$ наименьшее значение, а при условии $a<0$ — наибольшее значение; эти значения трехчлена соответствуют значению $-\frac{b}{2a}$ переменной x; их можно найти либо подстановкой значения $-\frac{b}{2a}$ в трехчлен, либо вычислением выражения $-\frac{b^2-4ac}{4a}$, т. е. выражения $c-\frac{b^2}{4a}$.

Пара чисел $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ представляет собой координаты вершины параболы, служащей графиком трехчлена.

Пример 3. Вершина параболы

$$y=-2x^2-4x+1$$

имеет координаты $(-1{,}3)$. (черт. 26).

Пример 4. Вершина параболы

$$y=(m-1)x^2-2mx+(m+1)$$

имеет координаты $\left(\frac{m}{m-1};\ -\frac{1}{m-1}\right)$ как при $m>1$, так и при $m<1$.

Пример 5. Указать ход изменения трехчлена $3x^2-8x+7$ при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$.

Решение. Изменение этого трехчлена представляется параболой

$$y=3x^2-8x+7,$$

имеющей вершину в точке $x=\frac{4}{3}$, $y=\frac{5}{3}$. Принимая во внимание, что $3>0$, заключаем, что данный трехчлен в промежутке

$\left(-\infty \ldots \frac{4}{3}\right)$ убывает, в точке $\frac{4}{3}$ имеет наименьшее значение $\frac{5}{3}$, в промежутке $\left(\frac{4}{3} \ldots \infty\right)$ возрастает.

Пример 6. Найти коэффициенты трехчлена $ax^2 + bx + c$, зная, что он имеет корень 3 и при $x = 2$ принимает наименьшее значение, равное — 3.

Решение. Условие задачи позволяет составить следующую систему уравнений:

$$9a + 3b + c = 0, \quad -\frac{b}{2a} = 2, \quad -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -3.$$

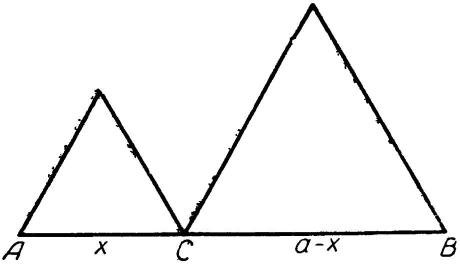
Приводим ее к виду:

$$9a + 3b + c = 0, \quad b = -4a, \quad b^2 - 4ac = 12a.$$

Из двух первых уравнений находим, что $c = 3a$, после чего из последнего уравнения узнаем, что $a = 3$; поэтому $a = 3$, $b = -12$, $c = 9$.

Пример 7. На отрезке AB, имеющем длину a, взята точка C и на каждом из отрезков AC и CB построен равносторонний треугольник.

Исследовать ход изменения суммы площадей этих треугольников при перемещении точки C из положения A в положение B.



Черт. 29

Решение. Обозначая длину отрезка AC (черт. 29) через x и длину отрезка CB через $a - x$, а сумму площадей равносторонних треугольников, построенных на этих отрезках, через y, составляем уравнение:

$$y = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} + \frac{(a-x)^2\sqrt{3}}{4}.$$

Приведя его к виду

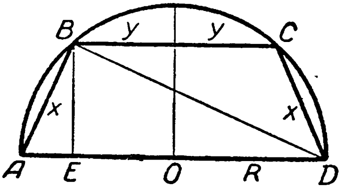
$$y = (2x^2 - 2ax + a^2)\frac{\sqrt{3}}{4},$$

исследуем ход изменения трехчлена $2x^2 - 2ax + a^2$ в промежутке от $x = 0$ до $x = a$.

Этот трехчлен при $x = 0$ имеет значение a^2, в промежутке $\left(0 \ldots \frac{a}{2}\right)$ убывает, при $x = \frac{a}{2}$ принимает наименьшее значение $\frac{a^2}{2}$, в промежутке $\left(\frac{a}{2} \ldots a\right)$ возрастает, при $x = a$ имеет значение a^2. Следовательно, рассматриваемая сумма площадей изменяется следующим образом*:

x	0	$0 \ldots \frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} \ldots a$	a
y	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	↘	$\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$	↗	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Пример 8. В полуокружность радиуса R вписана трапеция, большим основанием которой служит диаметр. Исследовать ход изменения периметра этой трапеции при изменении боковой стороны ее в возможных пределах.



Черт. 30

Решение. Обозначив боковую сторону и меньшее основание равнобедренной трапеции $ABCD$ (черт. 30) соответственно через x и $2y$, находим, что ее полупериметр p есть $x + y + R$. Но из прямоугольного треугольника ABD, где BE есть перпендикуляр, опущенный на гипотенузу, получаем:

$$x^2 = 2R(R - y), \quad y = \frac{2R^2 - x^2}{2R}.$$

Следовательно,

$$p = x + y + R = x + \frac{2R^2 - x^2}{2R} + R = \frac{-x^2 + 2Rx + 2R^2}{2R} + R.$$

Задача свелась к исследованию хода изменения трехчлена $-x^2 + 2Rx + 2R^2$. Принимая во внимание, что боковая сторона трапеции x может изменяться в промежутке от 0 до $R\sqrt{2}$ и что коэффициент при x^2 есть -1, укажем ход изменения трехчлена в этом промежутке:

---

* Стрелки указывают убывание или возрастание трехчлена y.

x	0	$0 \dots R$	R	$R \dots R\sqrt{2}$	$R\sqrt{2}$
трехчлен	$2R^2$	↗	$3R^2$	↘	$2R^2\sqrt{2}$

Следовательно, ход изменения периметра $2p$ трапеции может быть представлен в виде:

x	0	$0 \dots R$	R	$R \dots R\sqrt{2}$	$R\sqrt{2}$
$2p$	$4R$	↗	$5R$	↘	$2R(\sqrt{2}+1)$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить параболу $y = \frac{3}{4}x^2$, принимая за единицу масштаба сантиметр.

2. Построить ту же кривую, принимая за единицу масштаба дециметр для оси OX и миллиметр для оси OY.

3. Построить параболу $y = x^2$ и прямую $y = 2x + 3$, принимая за единицу масштаба сантиметр, измерить абсциссы их общих точек и показать, что они равны корням уравнения

$$x^2 = 2x + 3.$$

4. Решить ту же задачу для параболы $y = \frac{1}{5}x^2$ и прямой $y = 2x + 10$, принимая за единицу масштаба миллиметр.

5. Решить ту же задачу для параболы $y = \frac{1}{4}x^2$ и прямой $y = 2x + 15$, принимая за единицу масштаба миллиметр.

6. Решить задачи 4 и 5, пользуясь клетчатой бумагой и принимая за единицу масштаба сторону клетки.

7. Построить параболу $y = \frac{3}{5}x^2$, принимая за единицу масштаба сантиметр.

8. Построить ту же кривую, принимая за единицы масштаба дециметр и миллиметр.

9. Построить параболы $y = 2x^2 - 5x + 3$ и $y = -2x^2 + 5x - 3$, принимая за единицу масштаба сантиметр, вычислить абсциссы точек пересечения этих кривых с осью OX и проверить результат вычислений измерением.

10. Решить ту же задачу для парабол

$$y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{4}x - 1 \text{ и } y = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{4}x + 1,$$

принимая за единицу масштаба сантиметр.

11. Найти наибольшее или наименьшее значение выражения

$$(x-2)^2 + (2x-1)^2.$$

Ответ. 1,8.

12. Указать ход изменения трехчленов:

а) $3x^2-5x+4$; б) $8x-5x^2+2$; в) $5x^2-12x+16$.

13. Указать ход изменения выражения: $7-(2x+3)^2$.

14. Найти, при каких значениях коэффициентов p и q трехчлен x^2+px+q имеет наименьшее значение, равное 1, и при $x=\frac{1}{2}$ принимает значение $\frac{5}{4}$.

Ответ. $p_1=-2$, $q_1=2$; $p_2=0$, $q_2=1$.

15. В треугольник ABC с основанием b и высотой h вписан прямоугольник $KLMN$, основание которого KL лежит на основании AC треугольника, а вершины M и N соответственно на боковых сторонах BC и AB. Исследовать ход изменения площади вписанного прямоугольника при перемещении точки N из положения A в положение B.

Ответ. Если высота вписанного прямоугольника равна x, то в промежутке $\left(0\ldots\frac{h}{2}\right)$ площадь возрастает от 0 до $\frac{bh}{4}$, при $x=\frac{h}{2}$ достигает наибольшего значения $\frac{bh}{4}$, в промежутке $\left(\frac{h}{2}\ldots h\right)$ убывает от $\frac{bh}{4}$ до 0.

§ 4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Общее понятие.

Определение. Уравнение, одна или обе части которого представляют собой выражения, иррациональные по отношению к некоторой неизвестной x, называется иррациональным уравнением с одной неизвестной x.

Например, уравнения

$$x+\sqrt{2x-3}=4,\quad \sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7,$$

$$\sqrt{3x-a}+2x=a,\quad \sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$$

представляют собой иррациональные уравнения, содержащие квадратные радикалы.

Уравнения

$$\sqrt[3]{x-a}+\sqrt[3]{x-b}=0,\quad \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}+\sqrt[4]{\frac{a+x}{a}}=\sqrt[4]{\frac{x}{b}}$$

являются иррациональными уравнениями, содержащими радикалы соответственно третьей и четвертой степени.

2. Постановка вопроса. В курсе элементарной алгебры иррациональные уравнения обычно решают при том условии, что под значением каждого из входящих в его состав радикалов четной степени понимают его арифметическое значение*. При этом условии уравнение

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{5+x}=1$$

---

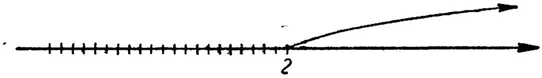
* По-видимому, так поступают, имея в виду рассмотреть вопрос в его наиболее простой — «однозначной» форме. Однако больший теоретический интерес представило бы решение иррациональных уравнений, выполняемое при отсутствии этого ограничительного условия.

не имеет корней, а уравнение

$$-\sqrt{3+x}+\sqrt{5+x}=1$$

имеет корень $-2\frac{3}{4}$.

3. Область допустимых значений неизвестной иррационального уравнения. Если иррациональное уравнение содержит радикалы четной степени, то, как известно, эти радикалы имеют* определенные числовые значения только в том случае, если находящиеся под знаком радикала выражения имеют неотрицательные значения.



Черт. 31

Так, радикалы, входящие в состав уравнения

$$\sqrt{3x-6}+\sqrt{1+x}=2, \tag{1}$$

имеют определенные числовые значения только при условиях

$$3x-6 \geqslant 0 \text{ и } 1+x \geqslant 0,$$

которые могут быть сведены в одно условие

$$x \geqslant 2. \tag{2}$$

Поэтому корнями уравнения (1) могут служить только те числа, которые удовлетворяют соотношению (2); совокупность чисел, удовлетворяющих соотношению (2), состоит из числа 2 и всех чисел, превосходящих число 2; точки, изображающие на числовой оси эти числа, заполняют луч, исходящий из точки 2 и имеющий положительное направление (черт. 31).

Корнями уравнения

$$\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2} \tag{3}$$

могут служить только те числа, которые удовлетворяют требованиям

$$x-1 \geqslant 0, \quad 3-x \geqslant 0, \quad x+2 \geqslant 0,$$

т. е. требованию

$$1 \leqslant x \leqslant 3. \tag{4}$$

Совокупность чисел, удовлетворяющих соотношению (4), состоит из чисел 1 и 3 и всех чисел, больших, чем число 1, но меньших, чем число 3, или, как говорят, из чисел, принадлежащих числовому промежутку [1, 3]; точки, изображающие на числовой оси эти числа, заполняют отрезок оси, определяемый точками 1 и 3 (черт. 32).

---

* В области действительных чисел.

Совокупность чисел, определяемых каким-либо общим свойством их, называется числовой областью. Так, совокупность чисел, удовлетворяющих соотношению (2), есть числовая область; точно так же совокупность чисел, удовлетворяющих соотношению (4), есть числовая область.

Черт. 32

Корни уравнения (1) необходимо должны принадлежать числовой области, определяемой соотношением (2), а корни уравнения (3) — числовой области, определяемой соотношением (4). Иначе говоря, если какое-либо число не удовлетворяет соотношению (2) или соотношению (4), то оно заведомо не служит корнем соответственно уравнения (1) или уравнения (2).

Таким образом, соотношения (2) и (4) выражают условия, необходимые для того, чтобы какое-либо число служило корнем соответственно уравнений (1) и (3).

Числовая область, которой необходимо должны принадлежать корни данного иррационального уравнения, называется областью допустимых значений для неизвестной данного уравнения.

4. Теорема о возведении обеих частей уравнения в квадрат.

Теорема 1. Если обе части уравнения

$$f(x) = g(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — выражения, содержащие неизвестную x, мы возведем в квадрат, то мы получим уравнение

$$f^2(x) = g^2(x), \tag{2}$$

которое удовлетворяется как всеми корнями данного уравнения (1), так и всеми корнями уравнения

$$f(x) = -g(x), \tag{3}$$

сопряженного с данным уравнением (1), и только этими числами*.

Доказательство. Уравнение (2) равносильно уравнению

$$[f(x) - g(x)]\,[f(x) + g(x)] = 0, \tag{2a}$$

---

* Вообще условимся уравнение $A = -B$ называть уравнением, сопряженным с уравнением $A = B$.

левая часть которого представляет собой произведение выражений

$$f(x) - g(x) \text{ и } f(x) + g(x),$$

содержащих неизвестную x.

Для того чтобы решить уравнение (2а), необходимо решить каждое из уравнений:

$$(1а) \qquad f(x) - g(x) = 0$$

и

$$(3а) \qquad f(x) + g(x) = 0.$$

Так как корни уравнения (1а), т. е. числа, обращающие в нуль сомножитель $f(x) - g(x)$, не лишают числового смысла каждое из выражений $f(x)$ и $g(x)$ и, следовательно, другой сомножитель $f(x) + g(x)$, то эти корни служат вместе с тем корнями уравнения (2а); точно так же корни уравнения (3а), т. е. числа, обращающие в нуль сомножитель $f(x) + g(x)$, не лишают числового смысла каждое из выражений $f(x)$ и $g(x)$ и, следовательно, другой сомножитель $f(x) - g(x)$ и поэтому служат вместе с тем корнями уравнения (2а). Корней, отличных от корней уравнений (1а) и (3а), уравнение (2а) иметь не может. Таким образом, уравнение (2а) удовлетворяется всеми корнями уравнения (1а) и всеми корнями уравнения (3а) и только этими корнями. Но уравнения (1а) и (3а) соответственно равносильны уравнениям (1) и (3), ввиду чего теорема доказана.

Пример 1. Если обе части уравнения

$$3x = 6$$

мы возведем в квадрат, то получим уравнение

$$9x^2 = 36,$$

которое может быть заменено равносильным ему уравнением

$$(3x - 6)(3x + 6) = 0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$3x - 6 = 0 \text{ и } 3x + 6 = 0,$$

из которых первое равносильно данному уравнению $3x = 6$, а второе — уравнению $3x = -6$, сопряженному с данным.

Уравнение, полученное путем возведения обеих частей данного уравнения в квадрат, удовлетворяется как корнем 2 данного уравнения, так и корнем (-2) сопряженного с ним уравнения.

Пример 2. Если обе части иррационального уравнения

$$\sqrt{x+2} = x$$

мы возведем в квадрат, то получим уравнение

$$x + 2 = x^2,$$

которое может быть заменено равносильным ему уравнением

$$(\sqrt{x+2} - x)(\sqrt{x+2} + x) = 0.$$

Это уравнение распадается на уравнения

$$\sqrt{x+2}-x=0 \text{ и } \sqrt{x+2}+x=0,$$

из которых первое равносильно данному уравнению $\sqrt{x+2}=x$, а второе — уравнению $\sqrt{x+2}=-x$, сопряженному с данным.

Уравнение, полученное путем возведения обеих частей данного уравнения в квадрат, удовлетворяется как корнем 2 данного уравнения, так и корнем (—1) сопряженного с ним уравнения.

Следствия. 1. Каждый корень уравнения (2), полученного из данного уравнения (1) путем возведения обеих частей его в квадрат, есть корень либо данного уравнения (1), либо сопряженного с ним уравнения (3).

2. Если уравнение (3), сопряженное с данным уравнением (1), не имеет корней, то уравнение (2), полученное из данного уравнения (1) путем возведения обеих частей его в квадрат, равносильно данному уравнению (1).

Оба эти утверждения следуют из того, что уравнение (2) никаких корней, отличных от корней уравнений (1) и (3), не имеет.

Пример 3. Возводя в квадрат обе части уравнения

$$\sqrt{x-1}=3,$$

мы получаем уравнение

$$x-1=9,$$

имеющее единственный корень 10. То же число 10 служит корнем данного уравнения. Уравнение $x-1=9$ оказалось равносильным данному уравнению. Это произошло по той причине, что уравнение

$$\sqrt{x-1}=-3,$$

сопряженное с данным уравнением, корней не имеет, ибо выражение $\sqrt{x-1}$ не может иметь отрицательного значения (—3).

5. Решение иррациональных уравнений, содержащих один радикал второй степени. Если иррациональное уравнение содержит один радикал, то всегда можно перенести этот радикал в одну часть уравнения, а все другие члены уравнения — в другую его часть и представить уравнение в виде

$$(1) \qquad \sqrt[n]{f(x)}=g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные алгебраические выражения относительно неизвестной x. Приведение иррационального уравнения, содержащего один радикал, к виду (1), называется уединением радикала.

Пример 4. Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{x-1} = 3.$$

Решение. 1) Прежде всего установим область допустимых значений для неизвестной этого уравнения:

(1) $$x - 1 > 0\,^*.$$

2) Теперь возведем обе части данного уравнения в квадрат:

$$x - 1 = 9$$

и решим полученное уравнение:

$$x = 10.$$

3) Число 10 удовлетворяет требованию $x - 1 > 0$ и, следовательно, может быть корнем данного уравнения.

4) Подстановкой числа 10 в данное уравнение мы убеждаемся, что оно действительно служит корнем этого уравнения.

Мы решили данное уравнение, выполнив для этого шаги 1—4. Однако шаги 3 и 4 были лишними.

В самом деле, из равенства

$$x - 1 = 3^2$$

видно, что корень этого уравнения обращает его левую часть $x-1$ в положительное число 3^2, так что соотношение (1) выполняется, в силу этого равенства, и проверки 3 можно было не производить.

Далее, уравнение $\sqrt{x-1} = -3$, сопряженное с данным уравнением, заведомо корней не имеет; поэтому уравнение $x - 1 = 9$ равносильно данному уравнению, и в проверке 4 также не было необходимости.

Итак, для решения данного уравнения достаточно было выполнить только шаги 1 и 2.

Пример 5. Решить иррациональное уравнение

(1) $$\sqrt{2x-3} = 4 - x.$$

Решение. 1) Область допустимых значений для неизвестной того уравнения определяется соотношением

(2) $$2x - 3 > 0^{**}.$$

2) Возводим обе части данного уравнения в квадрат:

(3) $$2x - 3 = (4 - x)^2$$

и приводим полученное уравнение к виду:

(3а) $$x^2 - 10x + 19 = 0.$$

Это уравнение имеет корни:

$$x_{1,2} = 5 \mp \sqrt{6}.$$

---

* Равенство $x - 1 = 0$ невозможно.

** Равенство $2x - 3 = 0$ невозможно.

3) Эти числа служат вместе с тем корнями уравнения (3), так что

$$2x_{1,2} - 3 = (4 - x_{1,2})^2,$$

откуда следует, что

$$2x_{1,2} - 3 > 0,$$

т. е. что корни $x_{1,2}$ уравнения (3a) удовлетворяют требованию (2).

4) Корни $x_{1,2}$, удовлетворяющие уравнению (3a), полученному из данного уравнения (1) путем возведения обеих частей его в квадрат, удовлетворяют, согласно теореме 1, либо данному уравнению (1), либо уравнению

$$\text{(1a)} \qquad \sqrt{2x-3} = x - 4,$$

сопряженному с данным. Для решения вопроса о том, которому именно из уравнений (1) и (1a) удовлетворяют найденные корни $x_{1,2}$, можно было бы подставить эти корни в уравнение (1) или в уравнение (1a). Однако в этом нет необходимости; достаточно подставить эти корни только в правую часть одного из этих уравнений, чтобы установить знак того значения, которое принимает эта часть для значений $x_{1,2}$ неизвестной x.

Так как

$$4 - x_1 = 4 - (5 - \sqrt{6}) = -1 + \sqrt{6} > 0,$$

то, принимая во внимание, что

$$\sqrt{2x_1 - 3} > 0,$$

заключаем, что корень x_1 удовлетворяет уравнению (1) и не удовлетворяет уравнению (1a).

Напротив, из того, что

$$4 - x_2 = 4 - (5 + \sqrt{6}) = -1 - \sqrt{6} < 0$$

и что, следовательно,

$$x_2 - 4 > 0,$$

заключаем, что корень x_2 удовлетворяет уравнению (1a) и не удовлетворяет уравнению (1).

Итак, при решении уравнения (1) можно было вовсе не устанавливать области допустимых значений его неизвестной и для проверки корней $x_{1,2}$ уравнения (3), найденного путем возведения данного уравнения (1) в квадрат, достаточно было установить только знак того значения, которое принимает правая часть данного уравнения для значений $x_{1,2}$ неизвестной x; то из этих значений, которое сообщало правой части уравнения (1) положительное значение, и было признано корнем данного уравнения.

Общий вывод. Рассмотрение примеров 4 и 5 позволяет сделать следующий общий вывод.

Для решения иррационального уравнения

$$\text{(1)} \qquad \sqrt{f(x)} = g(x),$$

содержащего один радикал второй степени и приведенного к виду (1), достаточно:

1) возведя обе части его в квадрат, получить уравнение

$$(2) \qquad f(x) = [g(x)]^2$$

и найти его корни;

2) каждый из найденных корней уравнения (2) подставить в правую часть $g(x)$ уравнения (1); корни уравнения (2), которые будут удовлетворять соотношению

$$(3) \qquad g(x) \geqslant 0,$$

будут корнями данного уравнения (1).

При этом, как было выяснено на примерах 4 и 5, если α есть корень уравнения (2), то

$$f(\alpha) = [g(\alpha)]^2, \text{ т. е. } f(\alpha) \geqslant 0,$$

так что корень α принадлежит области допустимых значений для неизвестной x данного уравнения, определяемой соотношением

$$f(x) \geqslant 0.$$

Ввиду этого при решении уравнения вида (1) нет необходимости находить область допустимых значений его неизвестной и проверять принадлежность найденных корней уравнения (2) этой области.

Точно так же для отбора из числа корней уравнения (2) тех корней, которые удовлетворяют данному уравнению (1), а не сопряженному с ним уравнению

$$\sqrt{f(x)} = -g(x),$$

нет необходимости испытывать эти корни путем подстановки их в данное уравнение, а достаточно установить лишь знак того значения, которое принимает правая часть $g(x)$ данного уравнения (1) для испытуемых корней уравнения (2).

Из приведенного выше общего хода решения уравнения (1) следует, что решение уравнения (1) сводится к решению системы:

$$(1а) \qquad f(x) = [g(x)]^2, \quad g(x) \geqslant 0,$$

состоящей из уравнения (2), полученного из данного уравнения путем возведения обеих частей его в квадрат, и из соотношения (3), позволяющего отобрать из корней уравнения (2) те, при которых правая часть данного уравнения (1) имеет тот же знак, что и его левая часть.

Очевидно, что каждый корень уравнения (1) есть вместе с тем корень системы соотношений (1а) и, обратно, каждый корень системы (1а) есть вместе с тем корень уравнения (1). Поэтому уравнение (1) и система (1а) равносильны.

Решение иррационального уравнения (1) состоит в решении равносильной этому уравнению системы (1а).

6. Решение и исследование параметрических (буквенных) иррациональных уравнений.

Пример 6. Решить и исследовать уравнение

$$(1) \qquad \sqrt{x-1} = a.$$

Решение. Уравнение (1) имеет корни только при условии

$$a \geqslant 0,$$

которое мы и примем.

При этом условии уравнение (1) равносильно уравнению

$$(2) \qquad x - 1 = a^2,$$

которое имеет корень

$$1 + a^2.$$

Итак, если $a \geqslant 0$, то данное уравнение (1) имеет корень $1 + a^2$.

Пример 7. Решить и исследовать уравнение

$$\sqrt{x^2 - a^2} = 3a - 2x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$x^2 - a^2 = (3a - 2x)^2, \; 3a - 2x \geqslant 0,$$

т. е. системе:

$$3x^2 - 12ax + 10a^2 = 0, \qquad x \leqslant \frac{3a}{2}.$$

Решая уравнение этой системы, находим

$$x_{1,2} = \frac{6a \mp a\sqrt{6}}{3} = \frac{6 \mp \sqrt{6}}{3} \cdot a.$$

Эти корни должны быть подчинены требованию

$$\frac{6 \mp \sqrt{6}}{3} \cdot a \leqslant \frac{3a}{2},$$

которое может быть приведено к виду:

$$(3 \mp 2\sqrt{6})\, a \leqslant 0.$$

Очевидно, что данное уравнение имеет:

1) при условии $a > 0$ — корень $\frac{6 - \sqrt{6}}{3} \cdot a$;

2) при условии $a < 0$ — корень $\frac{6 + \sqrt{6}}{3} \cdot a$;

3) при условии $a = 0$ двойной корень: $x_{1,2} = 0$.

7. Иррациональные уравнения, содержащие два радикала второй степени.

Пример 8. Решить уравнение

$$(1) \qquad \sqrt{2x + 8} + \sqrt{x + 5} = 7.$$

Решение. 1) Область допустимых значений для неизвестной x данного уравнения (1) определяется системой соотношений:

$$2x+8\geqslant 0,\quad x+5\geqslant 0,$$

которая сводится к соотношению $x\geqslant -4$.

2) Возводя обе части уравнения (1) в квадрат, мы получаем уравнение

$$(2)\qquad 3x+13+2\sqrt{2x+8}\cdot\sqrt{x+5}=49,$$

которое равносильно уравнению (1), так как уравнение

$$\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=-7,$$

сопряженное с данным уравнением (1), корней не имеет (сумма двух неотрицательных чисел не может быть равной отрицательному числу).

3) Заменяя произведение радикалов

$$\sqrt{2x+8}\cdot\sqrt{x+5}$$

радикалом $\sqrt{(2x+8)(x+5)}$, мы расширяем область допустимых значений неизвестной, так как соотношение

$$(2x+8)(x+5)\geqslant 0$$

имеет место не только при условии $x\geqslant -4$, но и при условии $x\leqslant -5$.

Поэтому уравнение (2) равносильно системе:

$$(3)\qquad 3x+13+2\sqrt{(2x+8)(x+5)}=49,\ x\geqslant -4;$$

подчинение корней уравнения этой системы ограничению $x\geqslant -4$ вызвано тем, что среди этих корней могут — в силу расширения области допустимых значений неизвестной — оказаться такие, которые выходят за пределы прежней области.

4) Заменив уравнение системы (3), содержащей один радикал, уравнением

$$2\sqrt{(2x+8)(x+5)}=36-3x,$$

мы сведем его к системе:

$$4(2x+8)(x+5)=(36-3x)^2,\ 36-3x\geqslant 0$$

и, следовательно, систему (3) — к системе:

$$4(2x+8)(x+5)=(36-3x)^2,$$
$$36-3x\geqslant 0,\ x\geqslant -4,$$

которая может быть приведена к виду:

$$x^2-288x+1136=0,\ -4\leqslant x\leqslant 12.$$

Уравнение этой системы имеет корни:

$$x_1=4,\qquad x_2=284.$$

Из них только корень 4 заключается между числами -4 и 12 и, следовательно, служит корнем данного уравнения (1).

Корень 284 удовлетворяет уравнению

$$\sqrt{2x+8}-\sqrt{x+5}=7.$$

8. Графическое решение и исследование иррациональных уравнений.

Пример 2 (продолжение).

Для графического решения уравнения

$$\sqrt{x+2}=x$$

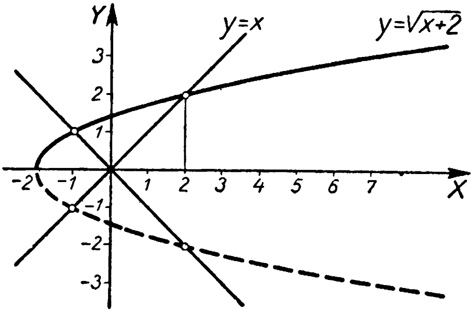
построим графики уравнений

$$y=\sqrt{x+2} \text{ и } y=x;$$

из них первый есть ветвь параболы

$$x=y^2-2,$$

осью которой служит ось x-ов и которая расположена над этой осью, а второй — прямая, проходящая через начало координат и служащая биссектрисой первого и третьего координатных углов (черт. 33).



Черт. 33

Парабола рассматривается только для $x \geqslant -2$.

Графики пересекаются в точке (2; 2):

$$x=2.$$

Сопряженное уравнение

$$\sqrt{x+2}=-x$$

удовлетворяется абсциссой — 1 точки пересечения той же ветви параболы с прямой

$$y=-x;$$

тот же корень имеет сопряженное уравнение

$$-\sqrt{x+2} = x,$$

так как ветвь параболы

$$x = y^2 - 2,$$

расположенная под осью x-ов, и прямая

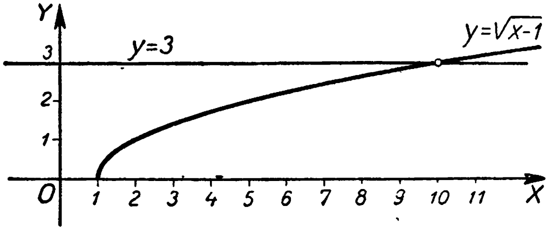
$$y = x$$

пересекаются в точке $(-1; -1)$.

Пример 4 (окончание). Для графического решения и исследования уравнения

$$\sqrt{x-1} = 3$$

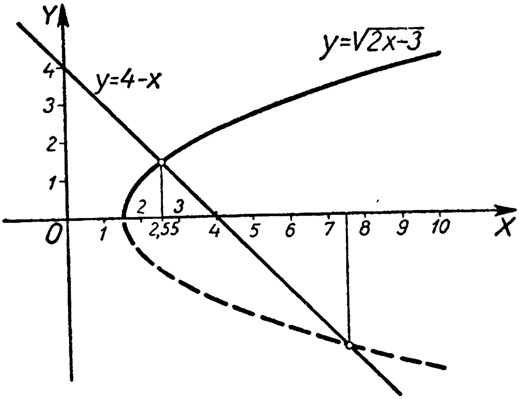
ищем точку пересечения ветви параболы $y = \sqrt{x-1}$ с прямой $y = 3$ (черт. 34).



Черт. 34

Парабола рассматривается только для $x \geqslant 1$. По чертежу найдем, что $x \approx 10$.

Пример 5 (продолжение). Ветвь параболы $y = \sqrt{2x-3}$ и прямая $y = 4 - x$ (черт. 35) пересекаются в единственной точке,



Черт. 35

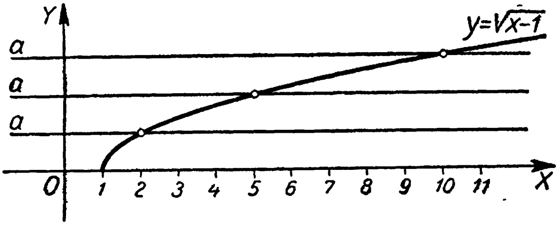
абсцисса которой равна числу 2,55, являющемуся приближением числа $5 - \sqrt{6}$.

Парабола рассматривается только для $x \geqslant \frac{3}{2}$.

Пример 6 (продолжение). Для графического решения и исследования уравнения

$$\sqrt{x-1} = a,$$

где $a \geqslant 0$, строим ветвь параболы $y = \sqrt{x-1}$ и прямую $y = a$, где $a \geqslant 0$ (черт. 36).



Черт. 36

Каждому неотрицательному значению параметра a соответствует определенная прямая, пересекающая параболу в единственной точке, абсциссу которой можно приближенно установить из чертежа.

Пример 8 (продолжение). Для графического решения уравнения

$$\sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5} = 7$$

можно поступить двояко:

1) Строим графики уравнений

$$y = \sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5} \text{ и } y = 7$$

(черт. 37).

Замечая, что функция

$$\sqrt{2x+8} + \sqrt{x+5}$$

определенна (имеет определенное значение) только при $x \geqslant -4$ и что она монотонно возрастает, мы легко представляем себе вид ее графика*. Строим его для абсцисс x, равных -4, -2, $-1, 4, 11, \ldots$, для которых один из радикалов имеет рациональное значение, а другой легко вычисляется (по таблицам) с приближением.

Прямая $y = 7$ пересечет этот график в точке, абсцисса которой близка к числу 4.

Ясно, что других точек пересечения построенные графики не имеют и что построенную кривую пересекает всякая прямая $y = m$, если $m \geqslant 1$.

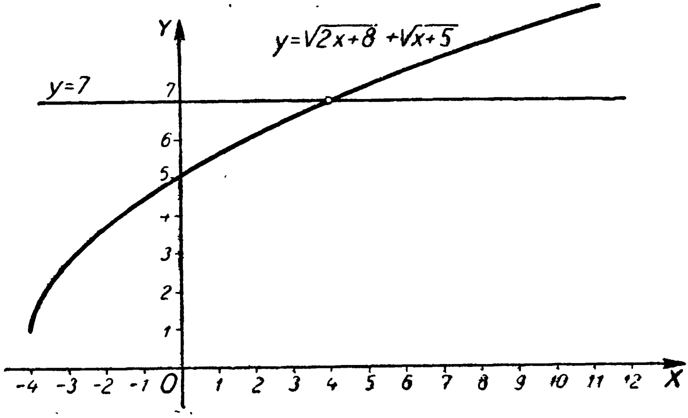
---

* Каждая ордината этого графика есть сумма ординат ветви параболы $y = \sqrt{2x+8}$ и ветви параболы $y = \sqrt{x+5}$, соответствующих одной и той же абсциссе; оси этих парабол совпадают с осью абсцисс, а вершинами их служат соответственно точки $(-4;\ 0)$ и $(-5;\ 0)$.

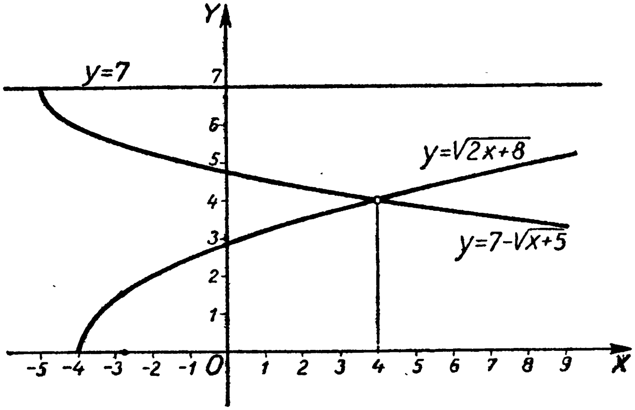
2) Строим графики уравнений

$$y = \sqrt{2x + 8} \quad \text{и}\ y = 7 - \sqrt{x + 5},$$

которые представляют собой ветвь параболы $x = \frac{1}{2}y^2 - 4$, соот-



Черт. 37



Черт. 38

ветствующую только неотрицательным значениям переменной y, и ветвь параболы $x = y^2 - 14y + 44$, соответствующую значениям переменной y, не превосходящим числа 7 (черт. 38)*.

---

* Кривая $y = 7 - \sqrt{x+5}$ есть ветвь параболы, которая может быть получена из ветви параболы $y = -\sqrt{x+5}$ параллельным перемещением ее вверх на 7 единиц.

9. Решение иррациональных уравнений способом введения вспомогательных неизвестных*.

Пример 2 (окончание). Для решения иррационального уравнения

$$\sqrt{x+2}=x$$

введем новую неизвестную y, связанную с неизвестной x равенством

$$y=\sqrt{x+2},$$

и заменим это уравнение системой:

$$y^2=x+2,\ y=x,\ y\geqslant 0.$$

Исключая из уравнений этой системы неизвестную x и присоединяя к полученному уравнению соотношение $y\geqslant 0$, приходим к системе:

$$y^2-y-2=0;\ y\geqslant 0.$$

Уравнение $y^2-y-2=0$ имеет корни -1 и 2, из которых требованию $y\geqslant 0$ удовлетворяет только корень 2.

Следовательно, $y=2$ и $x=2$.

Пример 5 (окончание). Для решения уравнения

(1) $$\sqrt{2x-3}=4-x$$

полагаем:

$$\sqrt{2x-3}=y,$$

откуда находим, что

$$2x-3=y^2,\ x=\frac{y^2+3}{2}.$$

Уравнение (1) может быть заменено системой:

$$y=4-\frac{y^2+3}{2},\ y\geqslant 0,$$

т. е. системой:

(2) $$y^2+2y-5=0,\ y\geqslant 0.$$

Уравнение системы (2) имеет корни $-1\mp\sqrt{6}$, из которых требованию $y\geqslant 0$ удовлетворяет только корень $\sqrt{6}-1$.

Следовательно, $y=\sqrt{6}-1$, $x=5-\sqrt{6}$.

Пример 8 (окончание). Для решения уравнения

(1) $$\sqrt{2x+8}+\sqrt{x+5}=7$$

полагаем:

$$\sqrt{2x+8}=u,\ \sqrt{x+5}=v$$

---

* Этот способ удобно применять тогда, когда под радикалом находится линейная функция.

и заменяем это уравнение системой:

$$(2)\quad u^2 = 2x + 8,\ v^2 = x + 5,\ u + v = 7,\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0.$$

Исключая из первых двух уравнений системы (2) неизвестную x и присоединяя к полученному уравнению остальные соотношения той же системы, приходим к системе:

$$(3)\quad u^2 - 2v^2 = -2,\ u + v = 7,\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0.$$

Решаем ее:

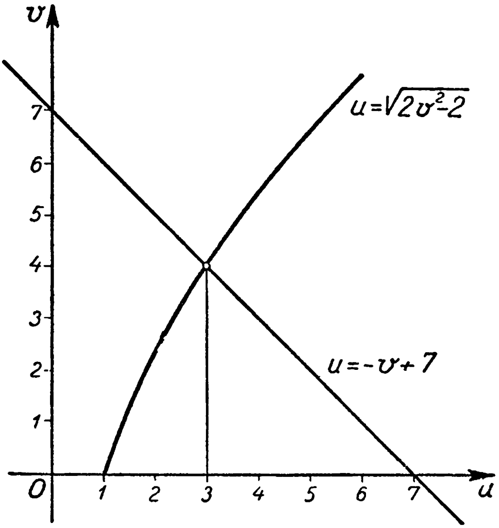
$$v = 7 - u;\ u^2 - 28u + 96 = 0;$$
$$u_{1,2} = 14 \mp 10;\ v_{1,2} = -7 \pm 10.$$

Оба корня 4 и 24 удовлетворяют требованию $u \geqslant 0$, но только корень 3 удовлетворяет требованию $v \geqslant 0$. Поэтому

$$x = v^2 - 5 = 4.$$

Примечание. Для графического решения задачи можно также заменить уравнение (1) системой (3) и построить ветвь гиперболы $u = \sqrt{2v^2 - 2}$ для $v \geqslant 1$ и прямую $u = -v + 7$ (черт. 39).

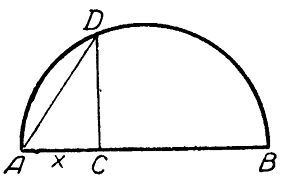
Эти графики имеют единственную точку пересечения (3; 4).



Черт. 39

10. Решение иррациональных уравнений комбинированием способов.

Задача. На диаметре AB (черт. 40) полуокружности радиуса R найти точку C, обладающую тем свойством, что если из этой точки восставить перпендикуляр CD до пересечения его с полуокружностью в точке D и точку D соединить с точкой A, то сумма отрезков $AD + BC$ будет иметь данную длину a.



Черт. 40

Решение. Обозначив расстояние искомой точки C от начала A диаметра AB через x и заметив, что $AD^2 = AB \cdot AC$, составляем уравнение:

$$(1)\quad \sqrt{2Rx} + 2R - x = a$$

1) Из геометрических соображений принимаем:

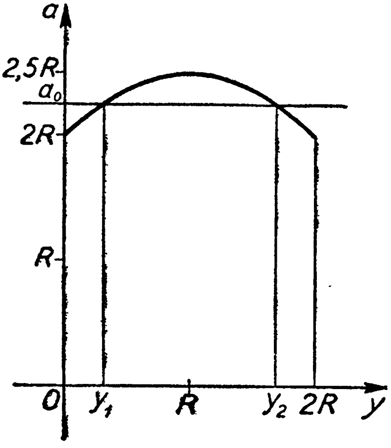
$$R>0,\ a\geqslant 2R.$$

2) Вводим вспомогательную неизвестную:

$$\sqrt{2Rx}=y$$

и последовательно находим:

$$y^2=2Rx,\ x=\frac{1}{2R}\cdot y^2.$$



Черт. 41

Теперь уравнение (1) можно заменить системой:

$$y+2R-\frac{1}{2R}\cdot y^2=a,\ y\geqslant 0.$$

Кроме того, так как y есть длина отрезка AD, то к этой системе присоединяем требование

$$y\leqslant 2R.$$

Окончательно приходим к системе:

$$(2)\ y^2-2Ry+2Ra-4R^2=0,$$
$$0\leqslant y\leqslant 2R.$$

Уравнение этой системы имеет корни:

$$y_{1,2}=R\mp\sqrt{R(5R-2a)},$$

где

$$a\leqslant 2{,}5R.$$

Так как $a\geqslant 2R$, то

$$2Ra-4R^2=2R(a-2R)\geqslant 0;$$

кроме того, $2R>0$; поэтому из уравнения системы (2) следует, что $y_{1,2}\geqslant 0$.

Для того чтобы исследовать, подчиняются ли эти корни требованию $y\leqslant 2R$, построим график изменения параметра a, рассматриваемого как функция независимой переменной y. Эта функция определяется найденным выше равенством:

$$a=-\frac{1}{2R}\cdot y^2+y+2R.$$

Ее график есть парабола (черт. 41) с вершиной, расположенной в точке (R; $2{,}5R$), что находится в соответствии с соотношением $a\leqslant 2{,}5R$. Этот график показывает, что каждому значению a_0 параметра a, принадлежащему промежутку $[2R;\ 2{,}5R]$, соответствуют два неотрицательных значения y_1 и y_2 независимой переменной y.

УПРАЖНЕНИЯ

1. **Решить уравнения:**

1) $x-\sqrt{144+x^2}=10$; 2) $x+\sqrt{100+x^2}=25$.

3) $x-\sqrt{144-x^2}=10$; 4) $x+\sqrt{100-x^2}=25$;

5) $x-\sqrt{3x-7}=12$.

6) $3x-17=\sqrt{7x^2-50x+79}$; 7) $7x-1=\sqrt{x^2+7x+10}$.

8) $\sqrt{21+x}+1=\sqrt{28+2x}$; 9) $\sqrt{3x-5}=1+\sqrt{2x-5}$.

2. Решить и исследовать уравнение

$$4x-\sqrt{4x^2-a^2}=4a,$$

Ответ. Если $a \gtrless 0$, то соответственно $x=\frac{8\pm\sqrt{13}}{6}\cdot a$; если $a=0$, то $x=0$.

11. Более сложные примеры.

Пример 9. Решить уравнение

$$(1) \qquad 1-\frac{1}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{7}{x^2}}}.$$

Решение. 1) Область допустимых значений неизвестной определяется сперва соотношением:

$$(2) \qquad \frac{1}{x}<1;$$

равенство невозможно.

2) Возводя обе части уравнения (1) в квадрат, получаем уравнение:

$$(3) \qquad \frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{7}{x^2}}.$$

3) Для того чтобы обе части уравнения (3) имели одинаковые знаки, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$(4) \qquad \left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x}>0.$$

4) Возводя обе части уравнения (3) в квадрат, мы приходим к уравнению

$$\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}=\frac{4}{x^2}-\frac{7}{x^4},$$

которое после упрощений принимает вид:

$$(5) \qquad \frac{8}{x^4}-\frac{4}{x^3}=0.$$

5) Уравнение (5) имеет корень 2.

6) Так как число 2 удовлетворяет соотношениям (2) и (4), то оно служит корнем данного уравнения (1).

Пример 10. Решить уравнение

$$(1)\qquad \sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Решение.

1) Область допустимых значений неизвестной определяется системой соотношений:

$$x>0, \qquad x>\sqrt{x}\ *,$$

которая сводится к соотношению

$$(2)\qquad x>1.$$

2) Освобождаем уравнение (1) от дробного члена:

$$2(x+\sqrt{x})-2\sqrt{x^2-x}=3\sqrt{x}.$$

3) Уединяем радикалы:

$$(3)\qquad 2\sqrt{x^2-x}=2x-\sqrt{x}.$$

4) При условии (2) обе части уравнения (3) имеют положительные значения. Поэтому, не налагая на неизвестную x новых ограничений, возводим обе части уравнения (3) в квадрат:

$$4x^2-4x=4x^2-4x\sqrt{x}+x.$$

5) Приведя это уравнение к виду:

$$5x-4x\sqrt{x}=0,$$

находим его корни:

$$x_1=0,\ x_2=\frac{25}{16}.$$

6) Число $\frac{25}{16}$, удовлетворяющее требованию (2), служит корнем данного уравнения.

Пример 11. Решить уравнение

$$(1)\qquad \sqrt{x-2a}-\sqrt{x-2b}=2.$$

Решение. Полагая

$$\sqrt{x-2a}=u,\ \sqrt{x-2b}=v,$$

заменяем уравнение (1) системой:

$$(2)\quad u^2=x-2a,\ v^2=x-2b,\ u-v=2,\ u\geqslant 0,\ v\geqslant 0.$$

Исключая из двух первых уравнений системы (2) неизвестную x, приходим к системе:

$$u^2-v^2=2(b-a),\ u-v=2;\ u\geqslant 0,\ v\geqslant 0.$$

---

* Равенство $x=\sqrt{x}$ возможно только при $x=1$, но число 1 не удовлетворяет уравнению (1).

Отсюда последовательно получаем:

$$u+v=b-a \qquad u-v=2;$$

$$u=\frac{b-a+2}{2},\ v=\frac{b-a-2}{2}.$$

Для того чтобы имели место неравенства $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$b-a \geqslant 2.$$

При этом условии данное уравнение имеет корень

$$x=u^2+2a=\frac{(b-a+2)^2+8a}{4}=\frac{(b-a)^2+4(b+a)+4}{4}.$$

12. Иррациональные уравнения, содержащие радикалы третьей степени. Эти уравнения могут быть решены двумя способами.

1°. *Способ введения вспомогательных неизвестных.*

Пример 12. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1.$$

Решение. Полагая

$$\sqrt[3]{x+45}=u, \qquad \sqrt[3]{x-16}=v,$$

заменяем уравнение (1) системой:

$$u^3=x+45, \quad v^3=x-16,\ u-v=1.$$

Исключая из двух первых уравнений системы неизвестную x, приходим к системе:

$$u^3-v^3=61;\ u-v=1.$$

Решаем ее:

$$(u-v)(u^2+uv+v^2)=61; \qquad u^2+uv+v^2=61;$$

$$u=v+1;\ (v+1)^2+(v+1)v+v^2=61;$$

$$3v^2+3v-60=0;\ v^2+v-20=0;$$

$$v_{1,2}=\frac{-1\mp\sqrt{1+80}}{2}=\frac{-1\mp 9}{2};\ v_1=-5,\ \ v_2=4;$$

$$x_1=v_1^3+16=-109;\ x_2=v_2^3+16=80.$$

Пример 13. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$$

Решение. Полагая

$$\sqrt[3]{2-x}=u, \qquad \sqrt{x-1}=v,$$

заменяем данное уравнение системой:

$$u^3=2-x,\ v^2=x-1,\ u+v=1,\ v\geqslant 0.$$

Исключая из двух первых уравнений этой системы неизвестную x, приходим к системе:

$$u^3 + v^2 = 1,\ u + v = 1,\ v \geqslant 0.$$

Решаем ее:

$$v = 1 - u;\ u^3 + u^2 - 2u = 0;$$

$$u_1 = 0,\ u_2 = -2,\ u_3 = 1;\ v_1 = 1;\ v_2 = 3;\ v_3 = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = 2 - u_1^3 = 2;\ x_2 = 2 - u_2^3 = 10;\ x_3 = 2 - u_3^3 = 1.$$

Никакой проверки не требуется.

2°. *Способ возведения обеих частей уравнения в куб.*

Этот способ основан на следующей теореме.

Теорема 2. Если обе части уравнения

$$f(x) = g(x), \tag{1}$$

де $f(x)$ и $g(x)$ — выражения, содержащие неизвестную x, мы возведем в куб, то получим уравнение

$$f^3(x) = g^3(x), \tag{2}$$

равносильное уравнению (1).

Доказательство. Уравнение (2) равносильно уравнению.

$$[f(x) - g(x)][f^2(x) + f(x)g(x) + g^2(x)] = 0,$$

Это уравнение распадается на уравнения:

$$f(x) - g(x) = 0,$$
$$f^2(x) + f(x)g(x) + g^2(x) = 0.$$

Первое уравнение совпадает с уравнением (1). Второе уравнение может быть представлено в виде

$$\left[f(x) + \frac{\Gamma}{2}g(x)\right]^2 + \frac{3}{4}g^2(x) = 0;$$

так как его левая часть есть сумма квадратов двух выражений, зависящих от переменной x, то она может иметь значение нуль только при том значении переменной x, при котором одновременно имеют место равенства

$$f(x) = 0 \text{ и } g(x) = 0.$$

Поэтому второе уравнение либо вовсе не имеет корней, либо имеет корни, которые вместе с тем служат корнями первого уравнения.

В силу этих соображений уравнение (2) равносильно уравнению (1).

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}. \tag{1}$$

Решение. Возводя обе части этого уравнения в куб*, получаем равносильное уравнение

$$2x + 3\sqrt[3]{x^2-1}\,(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}) = 5x. \tag{2}$$

Заменяя выражение, заключенное в скобки, выражением $\sqrt[3]{5x}$, приходим к уравнению:

$$\sqrt[3]{x^2-1}\cdot\sqrt[3]{5x} = x.$$

---

* Пользуемся формулой $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b)$, где одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки.

Возводя обе части этого уравнения в куб, получаем равносильное уравнение:

$$5x(x^2-1)=x^3,$$

Решаем его:

$$x(4x^2-5)=0;\ x_1=0,\ \ x_{2,3}=\mp\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Никакой проверки не требуется*.

Этим же способом могут быть решены примеры 12 и 13.

Пример 15. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=-1.$$

Решение.

1) Область допустимых значений неизвестной определяется соотношением

$$x>0.$$

2) Возводя обе части этого уравнения в куб, получаем равносильное уравнение

$$2+3\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}\right)=-1.$$

3) Заменяя выражение, заключенное в скобки, числом — 1, приходим к уравнению:

$$\sqrt[3]{1-x}=1.$$

4) Возводя обе части этого уравнения в куб, получаем равносильное уравнение

$$1-x=1,$$

откуда находим, что $x=0$.

Однако проверка показывает, что если брать действительные значения кубических радикалов, входящих в данное уравнение, то левая его часть не принимает значения — 1. Если же для первого радикала взять значение $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, а для второго $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, то левая часть уравнения примет значение — 1.

§ 5. БИКВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Общее понятие.

Определение. Уравнение вида

$$(1)\qquad ax^4+bx^2+c=0,\ \text{где}\ a\neq0,$$

называется биквадратным уравнением.

Если это уравнение представить в форме

$$a(x^2)^2+b\,(x^2)+c=0,\ \ \text{где}\ a\neq0,$$

---

* Впрочем, ввиду произведенной нами замены в уравнении (2) выражения, заключенного в скобки, выражением $\sqrt[3]{5x}$, которое равно заменяемому выражению неизвестно при каких (действительных или мнимых) значениях кубических радикалов, быть уверенными в том, что найденные значения неизвестной x удовлетворяют данному уравнению при действительных значениях кубических радикалов, мы не можем. Это, если угодно, должно быть проверено (ср. пример 15).

то станет ясно, что оно является уравнением 2-й степени по отношению к неизвестной x^2. Отсюда и его название — биквадратное, что буквально значит «дважды (bis) квадратное».

Биквадратное уравнение есть частный случай уравнения вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

где $a \neq 0$ и n — натуральное число; это уравнение называется трехчленным; очевидно, что оно представляет собой уравнение 2-й степени по отношению к неизвестной x^n.

Очевидно, что в еще более общем смысле можно было бы назвать трехчленным уравнение вида

$$a\,[f(x)]^2 + b\,[f(x)] + c = 0,$$

где $a \neq 0$ и $f(x)$ есть какое угодно алгебраическое или тригонометрическое выражение, содержащее неизвестную x.

Биквадратное уравнение может рассматриваться как неполное уравнение 4-й степени, а именно как вид полного квадратного уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

который оно принимает в случае, когда коэффициенты b и d при нечетных степенях неизвестной x равны нулю: $b = 0$, $d = 0$.

2. Решение биквадратного уравнения. Так как $a \neq 0$, то уравнение (1) равносильно уравнению

$$x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a} = 0,$$

указывающему, что корни биквадратного уравнения (1), если они существуют, вполне определяются отношениями $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ его коэффициентов. Обозначая эти отношения соответственно через p и q, придем к приведенной форме

$$x^4 + px^2 + q = 0 \tag{2}$$

биквадратного уравнения.

Положив в этом уравнении $x^2 = y$, мы сведем его к квадратному уравнению

$$y^2 + py + q = 0, \tag{2a}$$

которое в науке называется резольвентой биквадратного уравнения, а мы будем называть просто вспомогательным уравнением.

Теперь последовательно рассмотрим следующие случаи:

I. Если $q < 0$, то квадратное уравнение (2а) имеет один отрицательный корень y_1 и один положительный корень y_2. Следовательно, уравнение (2) имеет 2 корня:

$$x_{1,2} = \mp\sqrt{y_2},$$

являющиеся противоположными числами.

II. Если $q>0$, то могут представиться 2 случая:

1) Если $q>0$ и $p\geqslant 0$, то квадратное уравнение (2а) либо не имеет корней, либо имеет 2 отрицательных корня y_1 и y_2. Следовательно, в этом случае уравнение (2) не имеет корней.

К этому заключению можно прийти непосредственно из рассмотрения уравнения (2); в самом деле, если $q>0$ и $p\geqslant 0$, то при любом значении неизвестной x левая часть уравнения (2) представляет собой сумму двух неотрицательных чисел x^4 и px^2 и положительного числа q, т. е. положительное число, и, следовательно, не обращается в нуль.

2) Если $q>0$ и $p<0$, то для суждения о корнях уравнения (2) необходимо найти дискриминант D, имеющий значение p^2-4q.

Если $q>0$, $p<0$, $D>0$, то уравнение (2а) имеет 2 положительных корня y_1 и y_2. Следовательно, в этом случае уравнение (2) имеет 4 корня:

$$x_{1,2}=\mp\sqrt{y_1},\quad x_{3,4}=\mp\sqrt{y_2}.$$

Если $q>0$, $p<0$, $D<0$, то уравнение (2а) не имеет корней и, следовательно, данное уравнение (2) также не имеет корней.

Если $q>0$, $p<0$, $D=0$, то уравнение (2а) имеет 2 равных положительных корня y_1 и y_2. Следовательно, в этом случае уравнение (2) имеет 4 корня:

$$x_{1,2}=\mp\sqrt{y_1},\qquad x_{3,4}=\mp\sqrt{y_2},$$

попарно равных между собой: $x_1=x_3$, $x_2=x_4$.

III. Если $q=0$, то уравнение (2) принимает вид

$$x^4+px^2=0$$

и распадается на уравнения (сводится к совокупности уравнений):

$$x^2=0 \text{ и } x^2+p=0;$$

первое из них имеет 2 равных корня: $x_{1,2}=0$, а второе:

1) при $p>0$ не имеет корней;

2) при $p<0$ имеет 2 равных корня:

$$x_{3,4}=\mp\sqrt{-p};$$

3) при $p=0$ имеет 2 корня, равных нулю:

$$x_{3,4}=0.$$

Найденные результаты могут быть сведены в таблицу (см. табл. на стр. 182).

Обратим внимание на следующее:

1) Если $q>0$ и $p\geqslant 0$, то для суждения о наличии или отсутствии корней уравнения (2) дискриминанта D составлять не надо.

2) Биквадратное уравнение может иметь только четное число (4, 2, 0) корней. Это можно было предвидеть, так как, если $x_1^4+px_1^2+q=0$, то и $(-x_1)^4+p(-x_1)^2+q=0$, т. е. каж-

Если			то	и
$q<0$			$y_1<0,\ y_2>0$	$x_{1,2}=\mp\sqrt{y_2}$
$q>0$	$p\geqslant 0$		$y_1<0,\ y_2<0$	нет корней
	$p<0$	$D>0$	$y_1>0,\ y_2>0$	$x_{1,2}=\mp\sqrt{y_1},\ x_{3,4}=\mp\sqrt{y_2}$
		$D<0$		нет корней
		$D=0$	$y_1=y_2;\ y_1>0,\ y_2>0$	$x_{1,2}=\mp\sqrt{y_1},\ x_{3,4}=\mp\sqrt{y_2}$ $x_1=x_3,\ x_2=x_4$
$q=0$	$p>0$		$y_1=0,\ y_2<0$	$x_{1,2}=0$
	$p<0$		$y_1=0,\ y_2>0$	$x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\mp\sqrt{y_2}$
	$p=0$		$y_1=0,\ y_2=0$	$x_{1,2,3,4}=0.$

дому корню x_1 биквадратного уравнения соответствует корень $(-x_1)$ этого уравнения.

3. **Свойства корней биквадратного уравнения.** В высшей алгебре доказывается, что если уравнение четвертой степени

$$(1)\qquad x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

имеет корни x_1, x_2, x_3, x_4, то они связаны с его коэффициентами b, c, d, e следующими равенствами:

$$(2)\qquad \begin{gathered} x_1+x_2+x_3+x_4=-b;\quad x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=c; \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-d;\quad x_1x_2x_3x_4=e. \end{gathered}$$

Выражения, составляющие левые части этих равенств, соответственно представляют собой: сумму корней уравнения, сумму произведений пар корней, сумму произведений троек корней; произведение всех корней; однако надо заметить, что пары и тройки составлялись так, что они отличаются одна от другой не порядком сомножителей, а составом; таких пар и троек, которые отличаются одна от другой только порядком сомножителей, мы не берем. Еще точнее: для того чтобы составить сумму произведений пар или троек корней

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,$$

надо каждый корень (в случае пар) или каждую пару (в случае троек) умножать только на следующие корни или пары (по правилу: «гляди вперед и не оборачивайся», если для наглядности позволить себе такую шутку); в самом деле, легко проследить, что так составлена сумма произведений:

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4;$$

а теперь по указанному правилу из каждой пары, не оканчивающейся корнем x_4 (за которым уже не следуют корни), составим возможные тройки корней и найдем сумму их произведений:

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4.$$

Теперь вернемся к уравнению (1). Если мы в нем положим:

$$b = 0,\ c = p,\ d = 0,\ e = q,$$

то оно примет вид

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

т. е. сделается биквадратным. Допустим, что оно имеет корни x_1, x_2, x_3, x_4.

Согласно приведенной выше общей теореме из высшей алгебры, должны иметь место равенства (2):

$$1)\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ 2)\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + $$
$$+ x_3x_4 = p,\ 3)\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0;\ 4)\ x_1x_2x_3x_4 = q.$$

Докажем, что это имеет место.

Так как

$$x_2 = -x_1,\quad x_4 = -x_3,$$

то

$$1)\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_1 + x_3 - x_3 = 0;$$

$$2)\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -x_1^2 + x_1x_3 -$$
$$-x_1x_3 - x_1x_3 + x_1x_3 - x_3^2 = -(x_1^2 + x_3^2).$$

Из вспомогательного уравнения следует, что $y_1 + y_2 = -p$; но $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_3^2$; поэтому $-(x_1^2 + x_3^2) = p$.

$$3)\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -x_1^2x_3 + x_1^2x_3 - x_1x_3^2 +$$
$$+ x_1x_3^2 = 0;$$

$$4)\qquad x_1x_2x_3x_4 = x_1^2x_3^2.$$

Из вспомогательного уравнения следует, что $y_1y_2 = q$; но $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_3^2$; поэтому $x_1^2x_3^2 = q$.

4. Разложение биквадратного трехчлена на линейные множители. Если y_1 и y_2 — корни вспомогательного уравнения

$$y^2 + py + q = 0,$$

то, как мы знаем, имеет место тождество:

$$y^2 + py + q = (y - y_1)(y - y_2).$$

Поэтому, принимая во внимание, что $y = x^2$, $x_1^2 = y_1$, $x_3^2 = y_2$, приходим к тождеству:

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 - x_1^2)(x^2 - x_3^2) =$$
$$= (x - x_1)(x + x_1)(x - x_3)(x + x_3) =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Учителю остается обобщить уже известную учащимся формулировку тождества, выведенного для уравнения второй степени (гл. III, § 3, п. 3).

5. График зависимости $y = x^4 + px^2 + q$. Для построения этого графика, который будет выполнен по точкам, необходимо все же принять во внимание следующее:

1) Как уже указывалось выше, многочлен

$$x^4 + px^2 + q$$

может иметь 4, 2, 0 корней, причем они попарно являются противоположными числами, так что если

$$x_1{}^4 + px_1^2 + q = 0,$$

то и

$$(-x_1)^4 + p(-x_1)^2 + q = 0.$$

Поэтому для графика рассматриваемой зависимости ось ординат является осью симметрии: каждой точке $[x_1;\ y_1]$ этого графика соответствует точка $[(-x_1);\ y_1]$ того же графика, симметрично расположенная с ней относительно оси ординат.

Отсюда следует, что в таблицу соответствующих значений переменных x и y мы будет включать каждое значение x_1 переменной x в виде $\mp x_1$, причем обоим этим значениям будет соответствовать одно и то же значение y_1 переменной y.

2) Делая в биквадратном трехчлене

$$(1)\qquad x^4 + px^2 + q$$

замену $x^2 = y$, мы получаем квадратный трехчлен

$$(1а)\qquad y^2 + py + q.$$

Как мы знаем (гл. III, § 3 п. 6), этот трехчлен имеет при $y_0 = -\frac{p}{2}$ наименьшее значение.

Следовательно, если $p < 0$, то трехчлен (1) имеет наименьшее значение при $x_0 = -\sqrt{-\frac{p}{2}}$ в промежутке $(-\infty;\ 0)$ и при $x_0 = +\sqrt{-\frac{p}{2}}$ в промежутке $(0,\ +\infty)$.

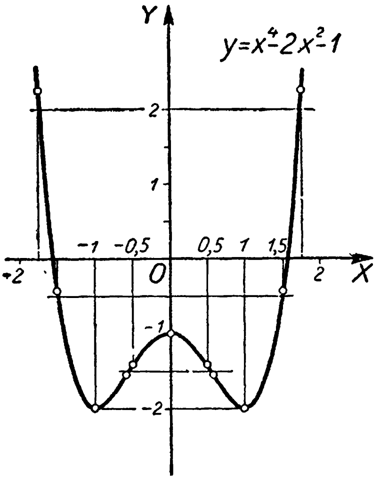
Если же $p \geqslant 0$, то, принимая во внимание, что сумма $x^4 + px$ для всех значений переменной x принимает только неотрицательные значения, а при $x = 0$ — наименьшее значение нуль, приходим к заключению, что при $p \geqslant 0$ трехчлен (1) также имеет наименьшее значение, а именно значение q.

3) Факты, указанные в пунктах 1) и 2), позволяют легче построить график зависимости

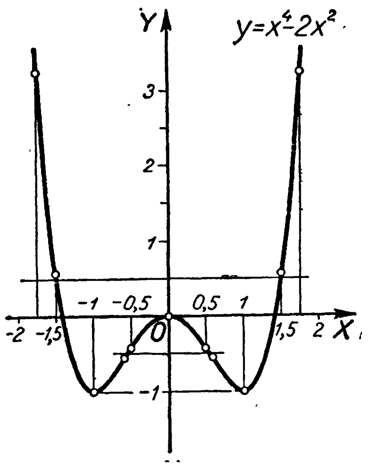
$$y = x^4 + px^2 + q.$$

Именно: 1) строим точку $(0;\ q)$; 2) при $p<0$ строим точку $\left(\sqrt{-\frac{p}{2}};\ \frac{4q-p^2}{4}\right)$; 3) по 3—4 точкам строим правую часть графика; 4) отразив ее в оси ординат, получаем левую часть графика (черт. 42 а, б, в, г); 5) при $p>0$ после 1) применяем построения 3 и 4 (черт. 42 д, е).

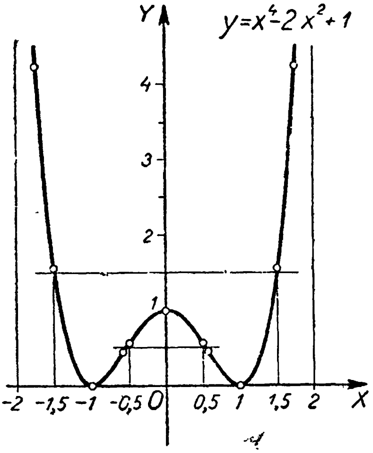
На чертежах 42 а—г представлены графики уравнений: $y = x^4 - 2x^2 - 1$, $y = x^4 - 2x^2$, $y = x^4 - 2x^2 + 1$, $y = x^4 - 2x^2 + 2$, а на чертежах 42 д, е — графики уравнений $y = x^4 + 2x^2$, $y = x^4 + 2x^2 - 1$.



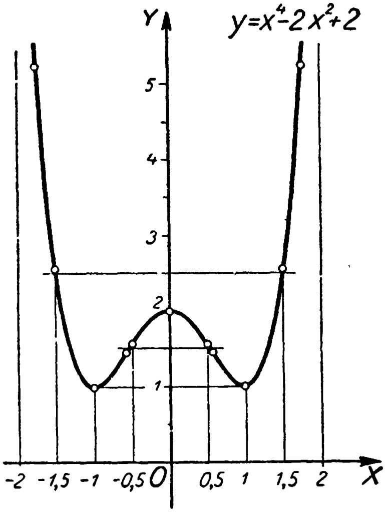
Черт. 42 а



Черт. 42 б



Черт. 42 в



Черт. 42 г.

6) Легко представить себе, посредством какого преобразования можно из графика функции

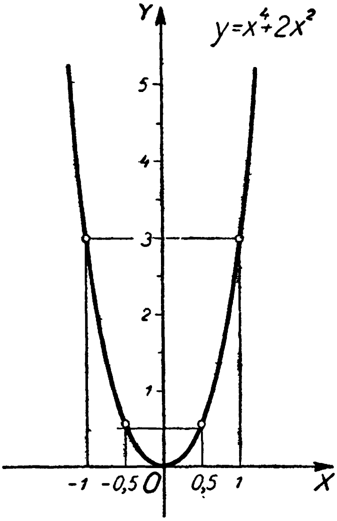
(1) $$y = x^2 + px + q$$

получить график функции

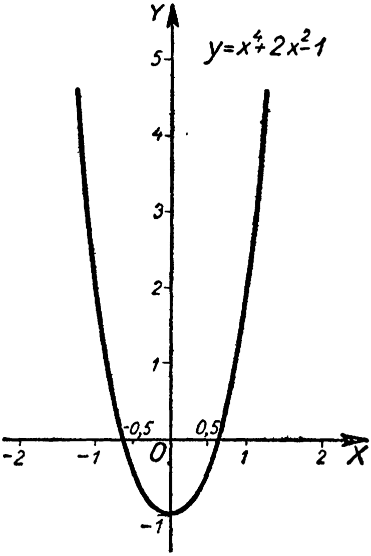
$$(2) \qquad y = x^4 + px^2 + q$$

для промежутка $(0;\ +\infty)$.

Именно, ясно, что каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика (1) соответетствует точка $(\sqrt{x_0};\ y_0)$ графика (2), имеющая ту же ординату y_0, что и первая точка, и, обратно, каждой точке $(x_0;\ y_0)$ графика (2)



Черт. 42 д



Черт. 42 е

соответствует точка $(x_0^2;\ y_0)$ графика (1). Таким образом, график (2) получается в результате преобразования оси абсцисс, состоящего в том, что каждая точка x_0 этой оси заменяется точкой $\sqrt{x_0}$, которая при $0 < x_0 < 1$ приближается к точке 1 слева, а при $x_0 > 1$ приближается к точке 1 справа, так что ординаты точек графика (1) приближаются слева и справа к ординате, соответствующей абсциссе 1.

6. Общий случай. До сих пор мы рассматривали биквадратное уравнение вида

$$(1) \qquad x^4 + px^2 + q = 0.$$

К этому виду приводится биквадратное уравнение общего вида

$$(2) \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

так как, полагая $a \neq 0$ и даже $a > 0$, что мы вправе сделать, мы можем заменить уравнение (2) равносильным ему уравнением

$$x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a} = 0$$

вида (1).

Следовательно, все предыдущие рассуждения остаются в полной силе, если в них под коэффициентом p подразумевать коэффициент $\frac{b}{a}$, а под коэффициентом q — коэффициент $\frac{c}{a}$.

Однако важно заметить, что если $a>0$, то знаки коэффициентов p и q соответственно совпадают со знаками коэффициентов b и c. Поэтому в таблице, которая схематически представляет результаты исследования корней биквадратного уравнения (1) (стр. 182), можно всюду коэффициенты p и q заменить коэффициентами b и c.

Объяснив это, учитель проведет исследование корней на примере 2—3 числовых биквадратных уравнений общего вида (2).

При построении графика зависимости

$$y = ax^4 + bx^2 + c \tag{3}$$

надо иметь в виду, что все изложенное выше относительно графика зависимости

$$y = x^4 + px^2 + q \tag{4}$$

относится и к случаю (3), если $a > 0$.

Для применения опыта построения графика (4) к построению графика (3) при $a > 0$ достаточно коэффициент a вынести за скобки:

$$y = a\left(x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}\right)$$

и рассматривать отношение $\frac{b}{a}$ как коэффициент p, а отношение $\frac{c}{a}$ как коэффициент q. Те значения переменной x, при которых биквадратный трехчлен, заключенный в скобки, имеет наименьшие значения, являются вместе с тем значениями, при которых и трехчлен, получающийся в результате раскрытия скобок, имеет наименьшие значения. Но значения трехчленов, соответствующие каждому из найденных значений переменной x, будут, конечно, находиться в отношении $a : 1$.

Если же $a < 0$, то соответствующий график получается из графика зависимости

$$y = -ax^4 - bx^2 - c \tag{5}$$

посредством отражения его в оси абсцисс. Впрочем, учащийся может построить требуемый график (при $a < 0$) и непосредственно по точкам. Но лучше, если учащийся сможет воспользоваться сделанными выше указаниями о построении графика (3) при $a > 0$.

Построение графика (3) может быть перенесено в раздел «Функции и пределы», изучаемый в XI классе. В IX классе можно ограничиться рассмотрением графиков, начерченных на специально изготовленных плакатах. Но важно, чтобы учащиеся усвоили: 1) идею введения резольвенты, 2) связь резольвенты с основным уравнением, 3) некоторые приемы элементарного исследования функций: нахождение точек пересечения ее графика с осями и, если возможно, точек, в которых функция имеет экстремум, и установление ее четности.

7. Примеры.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^4-10x^2+9=0.$$

Решение. Полагая $x^2=y$, получаем вспомогательное уравнение

$$y^2-10y+9=0.$$

Решаем его:

$$y_{1,2}=5\mp\sqrt{16}=5\mp 4;\ y_1=1,\ y_2=9.$$

Следовательно,

$$1)\ x^2=1;\ x_{1,2}=\mp 1;\qquad 2)\ x^2=9;\ x_{3,4}=\mp 3.$$

Пример 1 соответствует случаю: $q>0$, $p<0$, $D>0$, в котором уравнение имеет 4 корня, представляющих собой попарно противоположные числа.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4+x^2-12=0.$$

Решение. Составив вспомогательное уравнение

$$y^2+y-12=0,$$

находим его корни:

$$y_{1,2}=\frac{-1\mp 49}{2}=\frac{-1\mp 7}{2};\ y_1=-4,\ y_2=3.$$

Отсюда

$$x^2=3;\ x_{1,2}=\mp\sqrt{3}.$$

Пример 2 соответствует случаю: $q<0$, в котором уравнение имеет 2 корня, представляющие собой противоположные числа.

Пример 3. Решить уравнение

$$x^4+x^2+1=0.$$

Решение. Вспомогательное уравнение

$$y^2+y+1=0$$

не имеет корней. Следовательно, и данное уравнение не имеет корней.

Пример 3 соответствует случаю: $q>0$, $p>0$, в котором уравнение не имеет корней.

Пример 4. Решить уравнение

$$9x^4+5x^2-4=0.$$

Решение. Вспомогательное уравнение

$$9y^2 + 5y - 4 = 0$$

имеет корни -1 и $\frac{4}{9}$. Следовательно,

$$x^2 = \frac{4}{9};\quad x_{1,2} = \mp\frac{2}{3}.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$5x^4 + 8x^2 + 1 = 0.$$

Уравнение корней не имеет, так как левая часть при всех значениях неизвестной x сохраняет положительное значение.

Пример 6. Решить уравнение

$$2x^4 - 19x^2 + 9 = 0.$$

Решение. Вспомогательное уравнение

$$2y^2 - 19y + 9 = 0$$

имеет корни $\frac{1}{2}$ и 9. Следовательно,

$$1)\ x^2 = \frac{1}{2};\ x_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad 2)\ x^2 = 9;\ x_{3,4} = \mp 3.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$7x^4 - 2x^2 + 3 = 0.$$

Решение. Вспомогательное уравнение

$$7y^2 - 2y + 3 = 0$$

не имеет корней. Следовательно, и данное уравнение не имеет корней.

Пример 8. Решить уравнение

$$81x^4 - 18x^2 + 1 = 0.$$

Решение. Вспомогательное уравнение

$$81y^2 - 18y + 1 = 0$$

имеет двойной корень $\frac{1}{9}$. Следовательно, данное уравнение имеет 2 двойных корня:

$$x_{1,2} = \mp\frac{1}{3};\quad x_{3,4} = \mp\frac{1}{3}.$$

Пример 9. Решить и исследовать уравнение

$$(1)\qquad x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m + 1 = 0.$$

Решение. Вспомогательное уравнение

$$(2)\qquad y^2 - 2(m-1)y + 2m + 1 = 0$$

имеет корни:

$$y_{1,2}=m-1\mp\sqrt{m(m-4)}.$$

Согласно таблице, помещенной на странице 182, рассмотрим следующие случаи:

1) если

$$2m+1<0,\ \text{т. е.}\ m<-\frac{1}{2},$$

то $$y_1<0,\quad y_2>0;\quad x_{1,2}=\mp\sqrt{y_2};$$

2) если

$$2m+1>0,\ m-1\leqslant 0,\ \text{т. е.}\ -\frac{1}{2}<m\leqslant 1,$$

то уравнение (2) и уравнение (1) не имеют корней;

3) если

$$2m+1>0,\ m-1>0,\ m(m-4)>0,\ \text{т. е.}\ m>4,$$

то $$y_1>0,\quad y_2>0;\quad x_{1,2}=\mp\sqrt{y_1},\ x_{3,4}=\mp\sqrt{y_2};$$

4) если

$$2m+1>0,\ m-1>0,\ m(m-4)<0,\ \text{т. е.}\ 1<m<4,$$

то уравнение (2) и уравнение (1) не имеют корней;

5) если

$$2m+1>0,\ m-1>0,\ m(m-4)=0,\ \text{т. е.}\ m=4,$$

то $$x_1=x_3=-\sqrt{3},\ x_2=x_4=\sqrt{3};$$

6) если

$$2m+1=0,\ m-1<0,\ \text{т. е.}\ m=-\frac{1}{2},$$

то $x_{1,2}=0$.

Найденные результаты могут быть сведены в следующую таблицу:

Если	то уравнение (1) имеет:
$-\infty<m<-\frac{1}{2}$,	2 корня;
$m=-\frac{1}{2}$,	1 двойной корень, равный нулю;
$-\frac{1}{2}<m<4$,	0 корней;
$m=4$,	2 двойных корня: $x_{1,3}=-\sqrt{3}$, $x_{2,4}=\sqrt{3}$;
$4<m<\infty$,	4 корня.

Пример 10. Решить уравнение

$$x^4 - 2px^2 + r^2 = 0 \tag{1}$$

посредством выделения из его левой части полного квадрата.

Решение. Так как $r^2 > 0$, то при $p < 0$ уравнение не имеет решений. Поэтому допустим, что $p > 0$. Будем считать, что $r > 0$.

1-й способ. Представив левую часть в виде

$$(x^2 + r)^2 - 2rx^2 - 2px^2 = (x^2 + r)^2 - 2(r + p)x^2,$$

разлагаем ее на множители и сводим данное уравнение к совокупности двух уравнений:

$$1)\ x^2 - \sqrt{2(r+p)}\,x + r = 0, \quad 2)\ x^2 + \sqrt{2(r+p)}\,x + r = 0.$$

Если $p - r \geqslant 0$, то первое уравнение имеет 2 положительных корня $x_{1,2}$, а второе — 2 отрицательных корня $x_{3,4}$, отличающихся от них только знаками:

$$x_3 = -x_2,\ x_4 = -x_1.$$

2-й способ. Представив левую часть в виде

$$(x^2 - r)^2 + 2rx^2 - 2px^2 = (x^2 - r)^2 - 2(p - r)x^2,$$

при условии $p - r \geqslant 0$ разлагаем ее на множители и сводим данное уравнение к совокупности двух уравнений:

$$1)\ x^2 - \sqrt{2(p-r)}\,x - r = 0, \quad 2)\ x^2 + \sqrt{2(p-r)}\,x - r = 0.$$

Из них первое имеет один отрицательный корень x_1 и один положительный корень x_2, а второе — один отрицательный корень x_3 и один положительный корень x_4, причем

$$x_4 = -x_1,\ x_3 = -x_2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $x^4 - 12x^2 - 64 = 0$. 2. $x^4 + 9y^2 - 400 = 0$.
3. $x^4 + 18x^2 + 1 = 0$. 4. $x^4 + 1 = 0$.
5. $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$. 6. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
7. $x^4 - 4x^2 + 5 = 0$. 8. $x^4 - x^2 + 1 = 0$;
9. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.

10. $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$.
11. $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$.
12. $(x + 4)^4 - 6(x + 4)^2 + 8 = 0$.
13. $a^4 + b^4 + x^4 = 2a^2b^2 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2$.

Ответ. $\mp(a+b)$; $\mp(a-b)$.

14. $x^4-4(a+b)x^2+3(a+b)^2=0$.

Ответ. $\mp\sqrt{3(a+b)}, \mp\sqrt{a+b}$, где $a+b\geqslant 0$.

15. $x^4-4(a^2+b^2)x^2+4a^2b^2=0$.

Ответ. $\mp 2a$, $\mp 2b$.

16. $x^4-a(a+b)x^2+a^3b=0$.

Ответ. $\mp a$ и $\mp\sqrt{ab}$, если $ab\geqslant 0$.

17. $\dfrac{(x+3)^4}{x^4}-\dfrac{61(x+3)^2}{x^2}+900=0$.

Ответ. $\mp\dfrac{3}{5}$; ∓ 34.

Указание. Положить $\dfrac{x+3}{x}=u$.

18. $x^4(x+1)^4-40x^2(x+1)^2+144=0$.

Ответ. $1, -2, 2, -3$;

Указание. Положить $x(x+1)=u$.

19. $(x+5)^4-13(x+5)^2x^2+36x^4=0$.

Ответ. $-\dfrac{5}{3}$; 5; $-\dfrac{5}{4}$; $\dfrac{5}{2}$.

Указание. Разделить все члены уравнения на x^4 и положить $\dfrac{x+5}{x}=u$.

20. $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=\dfrac{10}{9}$.

Ответ. $\mp\dfrac{1}{2}$.

21. Зная, что α и β — корни уравнения

$$x^2+px+q=0,$$

найти биквадратное уравнение, имеющее корни $-\alpha$, $-\beta$, α, β.

Ответ. $x^4-(p^2-2q)x^2+q^2=0$.

22. Решить уравнения посредством выделения из левой части полного квадрата:

1) $x^4-20x^2+64=0$; 2) $x^4-13x^2+36=0$;
3) $x^4-4x^2+1=0$; 4) $x^4-2x^2+1=0$.

23. Построить графики функций

$$y=x^2-2x+2 \text{ и } y=x^4-2x^2+2$$

и ответить на вопросы:

1) Какие общие точки имеют эти графики?

2) В каких точках каждый из графиков имеет наименьшее значение?

3) В какой зависимости находятся абсциссы точек того и другого графика, имеющих равные ординаты?

Ответы.

1) $(0;2)$; $(1;1)$; $(-2;\ 10)$.

2) Первый — в точке $(1;1)$; второй — в точках $(1;\ 1)$ и $(-1;\ 1)$.

3) Так как

$$x^2 - 2x + 2 = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 2, \text{ где } x \geqslant 0,$$

то равные ординаты эти графики имеют соответственно в точках x и x', связанных зависимостью $x' = \sqrt{x}$.

ГЛАВА IV

ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

§ 1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

1. **Понятие о функции.** Когда мы наблюдаем какое-либо естественно протекающее явление природы или следим за ходом созданного человеком в его деятельности процесса (опыта, эксперимента), мы всякий раз замечаем, что одни из величин, связанных с этим явлением или процессом, не изменяются, сохраняют одно и то же значение, а другие, наоборот, изменяются, принимают различные значения.

Например, при свободном падении твердого тела изменяются с течением времени путь, пройденный падающим телом, и его скорость, но остается без изменения его масса. При нагревании некоторого количества воды в открытом сосуде изменяются с течением времени ее температура и объем, но не изменяется ее масса (если пренебречь незначительным испарением); при наступлении же кипения начнет изменяться и масса воды (в силу испарения).

Величины, которые в течение некоторого явления или процесса остаются без изменения, сохраняют одно и то же значение, называются постоянными (величинами); величины же, которые в течение некоторого процесса изменяются, принимают различные значения, называются переменными (величинами).

Величины, изменяющиеся в течение некоторого явления или процесса, часто находятся в определенной зависимости друг от друга, так что изменение одних из них влечет за собой определенное изменение других. Так, путь, пройденный падающим телом, и его скорость зависят от времени, в течение которого оно падало; удлинение металлического стержня, подвергаемого нагреванию, определяется его температурой; объем данного газа при определенной температуре зависит от давления, под которым находится этот газ, и т. п. При этом зависимость величин, о которой говорится в приведенных примерах, имеет, очевидно, тот смысл, что каждое значение одной величины вполне определяется значением другой величины, т. е. каждому значению одной величины соответствует вполне определенное значение другой величины.

Определение. Если две переменные x и y находятся между собой в такой зависимости, что каждому значению переменной x соответствует вполне определенное значение переменной y, то эту зависимость называют функциональной зависимостью; переменную x называют независимой переменной или аргументом, а переменную y — зависимой переменной или функцией от независимой переменной.

Так, площадь круга есть функция его радиуса; скорость падающего тела — функция высоты падения; объем массы газа (при данной температуре) — функция производимого на него давления.

2. Способы задания функции. Из определения понятия функции следует, что, для того чтобы задать функцию, необходимо указать, по какому правилу (закону) для каждого значения независимой переменной находится соответствующее ему значение функции.

Для ряда величин такое правило состоит в использовании некоторой таблицы, в которой значения независимой переменной и соответствующие им значения функции расположены в два параллельных столбца.

Например, измеряя температуру воздуха каждый час и записывая ее, мы могли получить следующую таблицу суточного изменения температуры:

Время (в часах)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Температура по Цельсию (в градусах)	2,0	1,5	0,6	−0,3	−1,6	−1,7	−0,9	0,3	2,1	4,1	6,3	7,4	8,2
Время (в часах)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
Температура по Цельсию (в градусах)	8,1	8,7	9,8	9,9	9,5	8,4	6,8	4,2	3,2	1,6	0,2	−0,9	

По такой таблице можно узнать температуру только в определенные моменты времени, и, для того чтобы узнать температуру, соответствующую моментам, не вписанным в таблицу, приходится на основе ряда предположений вычислять приближенные средние значения между теми, которые находятся в таблице.

Во всех справочниках можно найти таблицы для нахождения длины окружности и площади круга по заданному радиусу. Вот часть такой таблицы:

Радиус (в сантиметрах)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Площадь (в квадратных сантиметрах)	0	0,126	0,503	1,151	2,011	3,142	4,524	6,158	8,042	10,179	12,566

Приведенные примеры существенно отличаются один от другого. Температуру мы получаем только путем измерения; закон изменения температуры в зависимости от времени еще не может быть выражен с помощью какой-либо формулы. Напротив, площадь круга Q, как известно, выражается формулой:

$$Q = \pi r^2,$$

где r — радиус круга; давая радиусу любые значения, мы можем вычислить соответствующие значения площади.

Таким образом, табличное задание функции выгодно тем, что оно дает возможность значения функции, соответствующие помещенным в таблицу значениям аргумента, находить без всяких вычислений.

Однако этот способ имеет весьма существенный недостаток: не задавая функции полностью (имеются такие значения, которые не помещены в таблицу), он не позволяет изучить весь ход ее изменения, найти все ее свойства и особенности. В тех случаях, как это часто имеет место в прикладных науках, когда табличное задание служит единственным возможным средством для записи изучаемой функциональной зависимости, приходится ограничиваться составлением соответствующих таблиц. Но во многих случаях науке удается найти для выражения исследуемой функциональной зависимости математическую формулу (равенство), указывающую правило, по которому можно для каждого значения независимой переменной вычислить соответствующее значение функции.

Приведём несколько примеров формул:

1) Если тяжёлое тело при свободном падении проходит за t секунд s метров, то

$$s = 4{,}9t^2.$$

2) Если маятник (состоящий из тонкой нити с тяжелым шариком на конце) совершает полное колебание за T секунд, а длина маятника равна l метрам, то

$$T = 2\sqrt{l}.$$

3) Площадь F вписанного в окружность с радиусом, равным 1, правильного n-угольника выражается формулой:

$$F = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Каждая из этих и других формул дает возможность найти значение функции с помощью выполнения над значением независимой переменной определенной совокупности действий, т. е. с помощью вычисления. Способ задания функции с помощью формул называется аналитическим способом.

В приведенных примерах формулы выражают вполне определенную зависимость между конкретными величинами (путем и временем; периодом колебания маятника и его длиной; площадью правильного вписанного в окружность многоугольника и числом его сторон). Но математика занимается изучением видов, свойств и особенностей функциональных зависимостей, которые могут встретиться между величинами, отвлекаясь от конкретного смысла этих величин и рассматривая отвлеченные (математические) величины.

Понимая под буквой x какую угодно независимую переменную величину, а под буквой y — ее функцию, математика занимается изучением функциональных зависимостей, задаваемых различными формулами, которыми можно связать величины x и y, например формулами:

$$1)\ y=\frac{1}{2}x^3,\quad 2)\ y=\frac{x}{1-x^2},\quad 3)\ y=\sqrt{1-x^2},\quad 4)\ y=\sin x \quad \text{и т. п.;}$$

при этом величины x и y не имеют конкретного смысла; под буквами x и y можно подразумевать любые две величины, связанные рассматриваемой формулой.

При изучении функции, заданной с помощью формулы, предварительно устанавливают, для каких значений независимой переменной эта функция имеет вполне определенное (действительное) значение, или, как говорят, может определяться рассматриваемой формулой.

Так, функции 1) и 4) могут быть определены для всех действительных значений независимой переменной x; функция 2) — для всех значений независимой переменной x, отличных от -1 и $+1$, а функция 3)—для всех значений независимой переменной x, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Если же при исследовании функциональной зависимости между величинами принимается во внимание и конкретный смысл этих величин, то совокупность значений независимой переменной, для которых определяется функция, устанавливается в соответствии со смыслом величин.

Так, в приведенных примерах (стр. 196) время падения t тела и длина l маятника могут выражаться только положительными числами, а число сторон n правильного многоугольника—только целыми положительными числами*.

Определение. Совокупность (множество) тех значений независимой переменной, для которых задается (определяется) функция, называется областью определения функции.

При аналитическом задании функции необходимо указать область ее определения.

В силу этого данное выше (стр. 195) определение понятия о функции должно быть дополнено.

---

* Мало того, как учит физика, время падения t (в секундах) тела не может превосходить времени $\sqrt{\frac{h}{4,9}}$ (в секундах), необходимого телу для того, чтобы упасть с высоты h метров.

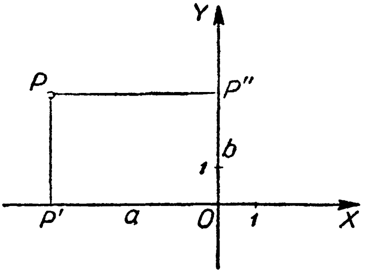
Определение. Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторому множеству чисел, соответствует вполне определенное значение переменной y, то переменная y называется функцией переменной x.

§ 2. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

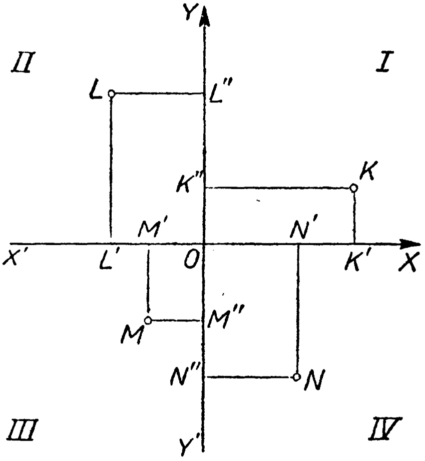
В гл. I, § 3 было установлено понятие об абсциссе точки, принадлежащей числовой оси, как о числе, вполне определяющем положение этой точки на числовой оси.

Для определения положения точки на плоскости наносят на эту плоскость две взаимно перпендикулярные оси, точка пересечения которых O принимается за начало на каждой из этих осей (черт. 43а).

За единицу измерения на той и другой оси выбирается обычно один и тот же отрезок.



Черт. 43 а



Черт. 43 б

Плоскость, на которую нанесена описанная система двух осей, называется ориентированной.

Подобно тому, как положение каждой точки оси вполне определяется некоторым действительным числом, положение каждой точки ориентированной плоскости вполне определяется двумя действительными числами, заданными в известном порядке. Эти числа находятся следующим образом.

Пусть P есть некоторая точка, принадлежащая ориентированной плоскости. Построим проекции P' и P'' точки P на каждую из двух осей системы (черт. 43 а). Точки P' и P'' окажутся расположенными на осях, ввиду чего точка P' имеет некоторую абсциссу a, являющуюся алгебраическим значением направленного отрезка OP', а точка P''— некоторую абсциссу b, являющуюся алгебраическим значением направленного отрезка OP'', так что

$$\overline{OP'} = a, \quad \overline{OP''} = b.$$

Для того чтобы различать две оси системы, ориентирующие плоскость, условились одну из этих осей называть осью абсцисс, а другую — осью ординат и в соответствии с этим абсциссу проекции P' точки P плоскости на одну из осей (обычно — горизонтальную) называют абсциссой точки P, а абсциссу проекции P'' точки P плоскости на другую ось (обычно — вертикальную) называют ординатой точки P. Таким образом, числа a и b суть соответственно абсцисса и ордината точки P (черт. 43 а).

Абсцисса и ордината точки, принадлежащей ориентированной плоскости, называются координатами точки плоскости, а ось абсцисс и ось ординат — осями координат. Точка пересечения O осей координат называется началом координат.

Две координатные оси образуют при своем пересечении четыре прямых угла, определяющие на плоскости четыре четверти; они перенумерованы на чертеже (в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки) римскими цифрами: I, II, III, IV (черт. 43 б).

На основании чертежа 43 б можно составить следующую таблицу, указывающую, какие знаки имеют координаты точки в зависимости от ее положения:

Четверть	Знак абсциссы	Знак ординаты
I	+	+
Луч OX	+	0
II	—	+
Луч OY	0	+
III	—	—
Луч OX'	—	0
IV	+	—
Луч OY'	0	—

Вместе с тем замечаем, что с изменением положения точки изменяется ее расстояние от обеих осей или по крайней мере от одной из них.

Принимая во внимание изменение координат точки в зависимости от изменения ее положения, приходим к выводу, что каждой точке ориентированной плоскости соответствует одна и только одна пара действительных чисел, из которых первое есть ее абсцисса, а второе — ордината.

Обратно, каждой паре действительных чисел a, b соответствует одна и только одна точка на ориентированной плоскости. В самом деле, найдя на оси абсцисс точку P', определяющую направленный отрезок OP', для которого

$$\overline{OP'} = a,$$

и на оси ординат точку P'', определяющую направленный отрезок OP'', для которого

$$\overline{OP''} = b,$$

восставляем из точек P' и P'' перпендикуляры до взаимного пересечения в точке P. Очевидно, что точка P имеет абсциссу a и ординату b, т. е. P есть та единственная точка ориентированной плоскости, которая соответствует паре чисел a, b.

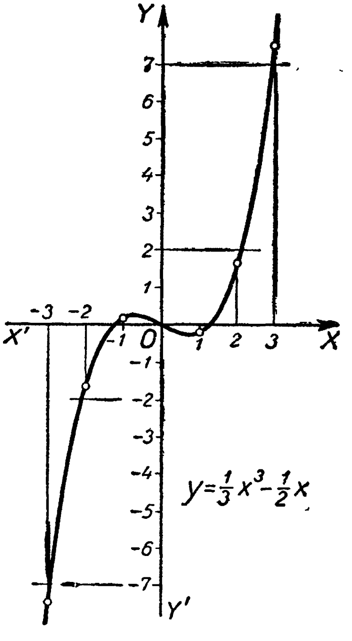
Тот факт, что каждой точке ориентированной плоскости соответствует одна и только одна пара действительных чисел и что, обратно, каждой паре действительных чисел соответствует одна и только одна точка ориентированной плоскости, выражают кратко, говоря, что между множеством всех точек ориентированной плоскости и множеством всех пар действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

1. Прямая задача. Возьмем уравнение с двумя неизвестными x и y

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x, \tag{1}$$

решенное относительно неизвестной y, и найдем несколько его решений:



Черт. 44

x	y
0	0
1	$-\frac{1}{6} \approx -0{,}16$
2	$1\frac{2}{3} \approx 1{,}67$
3	$7\frac{1}{2} \approx 7{,}5$
-1	$\frac{1}{6} \approx 0{,}16$
-2	$-1\frac{2}{3} \approx -1{,}67$
-3	$-7\frac{1}{2} \approx -7{,}5$

Каждое решение x_0, y_0 уравнения (1) представляет собой пару чисел; рассматривая значение x_0 неизвестной x как абсциссу, а значение y_0 неизвестной y как ординату некоторой точки, построим эту точку (черт. 44). Эта точка и будет служить геометрическим изображением решения x_0, y_0 уравнения (1).

Уравнение (1) имеет бесконечное множество решений; но каждое решение состоит из двух чисел x_0, y_0, связанных определенной зависимостью:

$$y_0 = \frac{1}{3} x_0^3 - \frac{1}{2} x_0;$$

наличие этой зависимости вносит упорядоченность в расположение точек, служащих геометрическими изображениями решений данного уравнения (1). Именно, чем большее число этих изображений мы будем наносить на плоскость, тем явственнее выделится на плоскости очертание той плавной линии (кривой), которой можно соединить все точки, изображающие решения уравнения (1).

Каждой точке x_0 оси $X'OX$ соответствует на этой линии одна и только одна точка, изображающая решение x_0, y_0 уравнения (1), так что она содержит все точки, изображающие решения уравнения (1), и только эти точки и поэтому является геометрическим местом точек, изображающих решения уравнения (1).

Определение. Геометрическое место точек, изображающих решения уравнения с двумя неизвестными, называется графиком этого уравнения.

Так как каждое уравнение с двумя неизвестными x и y, решенное относительно неизвестной y, можно рассматривать как формулу, с помощью которой задается функция y переменной x, то график этого уравнения называется также графиком определяемой им функции.

2. Обратная задача. Ту связь, которая существует между парами чисел и точками плоскости, мы использовали для построения кривой по данному уравнению. Но может быть поставлена и решена обратная задача: зная общее геометрическое свойство, которым обладают все точки некоторой кривой, найти уравнение этой кривой, т. е. то уравнение, для которого эта кривая служит графиком.

Пример 1. Найти уравнение окружности, описанной из начала координат данным радиусом.

Решение. Пусть окружность (черт. 45) имеет радиус a. Возьмем на ней любую точку P и обозначим ее координаты буквами x и y:

$$\overline{OP'} = x, \quad \overline{OP''} = y.$$

Из прямоугольного треугольника OPP' находим, что

$$OP'^2 + P'P^2 = OP^2.$$

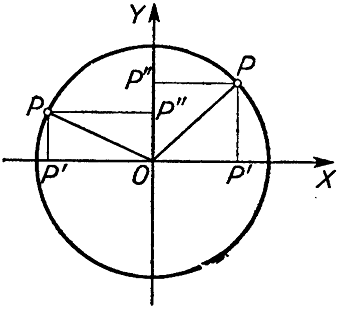
Но $OP'^2 = \overline{OP'}^2$, $P'P^2 = \overline{OP''}^2$, $OP = a$.
Следовательно,

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{1}$$

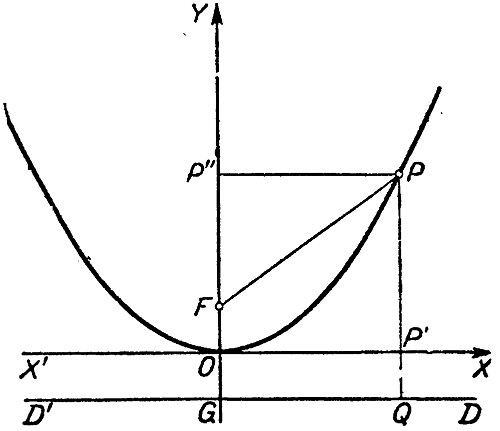
Обратно, если какая-либо точка P_0 имеет координаты x_0, y_0, удовлетворяющие уравнению (1), так что

$$x_0^2+y_0^2=a^2,$$

то расстояние OP_0 этой точки P_0 от начала координат равно $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, т. е. a, а это значит, что точка P_0 принадлежит окружности с центром O и радиусом a.



Черт. 45



Черт. 46

Мы доказали, что уравнение (1) есть искомое уравнение окружности с центром O и радиусом a. Оно равносильно совокупности двух уравнений:

$$y=+\sqrt{a^2-x^2}, \qquad y=-\sqrt{a^2-x^2},$$

из которых первое служит уравнением верхней полуокружности а второе — уравнением нижней полуокружности.

Пример 2. Найти уравнение кривой, обладающей тем свойством, что каждая точка ее находится на одном и том же расстоянии от данной точки F и от данной прямой $D'D$ (черт. 46).

Решение. Пусть F и $D'D$ будут точка и прямая, на одном и том же расстоянии от которых находится каждая точка данной кривой. Очевидно, что одной из точек кривой должна служить середина O перпендикуляра FG, опущенного из точки F на прямую $D'D$. Примем эту точку O за начало координат, прямую $X'OX$, параллельную прямой $D'D$, — за ось абсцисс, а прямую OY, перпендикулярную к прямой $X'OX$, — за ось ординат.

Пусть P будет некоторая точка, принадлежащая заданной кривой; обозначим ее координаты через x и y:

$$\overline{OP'}=x, \qquad \overline{OP''}=y.$$

По условию $PF=PQ$. Полагая

$$OF=OG=a,$$

находим:

$$PF^2=FP''^2+P''P^2=(y-a)^2+x^2;$$

$$PQ^2=(y+a)^2.$$

Следовательно,

$$(y-a)^2+x^2=(y+a)^2;$$

отсюда

$$4ay=x^2,\quad y=\frac{1}{4a}x^2. \tag{2}$$

Обратно, если точка P плоскости имеет координаты x_0, y_0, удовлетворяющие уравнению (2), то найдем, что

$$PF^2=(y_0-a)^2+x_0^2,\qquad PQ^2=(y_0+a)^2;$$

$$PF^2-PQ^2=x_0^2-4ay_0=x_0^2-x_0^2=0,$$

т. е. что

$$PF=PQ.$$

Таким образом, заданная указанным геометрическим свойством кривая имеет уравнение (2).

Эта кривая называется параболой. Точка F и прямая $D'D$, на одном и том же расстоянии от которых находится каждая точка параболы, называются фокусом и директрисой параболы.

§ 4. ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

1 Общее понятие. Если зависимость между функцией y и независимой переменной x выражается равенством

$$y=ax, \tag{1}$$

где a есть определенное число, т. е. если каждому значению x_0 независимой переменной x соответствует такое значение y_0 функции y, которое получается из значения x_0 путем умножения его на число a, то эту зависимость называют прямой пропорциональной зависимостью или, просто, прямой пропорциональностью.

Это название объясняется следующим свойством переменных x и y, находящихся между собой в указанной зависимости.

Если x_0 и x_1 — два любых значения переменной x, а y_0 и y_1 — два соответствующих им значения функции y, заданной равенством (1), то

$$y_0=ax_0,\quad y_1=ax_1,$$

а потому при $a\neq 0$

$$\frac{y_1}{y_0}=\frac{x_1}{x_0}, \tag{2}$$

т. е. отношение двух любых значений одной из переменных величин, связанных равенством (1), при $a \neq 0$ равно отношению соответствующих значений другой переменной величины, а это значит, что эти величины пропорциональны.

Обратно, если две переменные величины x и y пропорциональны, т. е. если отношение двух любых значений x_1 и x_0 величины x равно отношению двух соответствующих им значений y_1 и y_0 величины y, то имеет место пропорция (2) и, следовательно, пропорция

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_0}{x_0}, \tag{3}$$

а это означает, что каждые два соответствующих одно другому значения пропорциональных величин x и y находятся в одном и том же отношении; поэтому, если $\frac{y_0}{x_0} = a$, то и $\frac{y_1}{x_1} = a$ и, вообще, $\frac{y}{x} = a$, так что

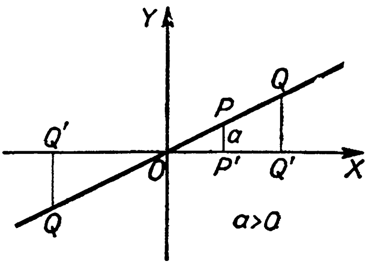
$$y = ax.$$

Таким образом, для того чтобы две переменные величины x и y находились в прямой пропорциональной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы отношение двух любых значений одной величины было равно отношению соответствующих значений другой величины.

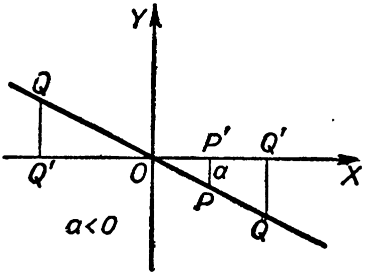
2. График прямой пропорциональной зависимости. Для того чтобы построить график прямой пропорциональной зависимости, т. е. зависимости, выражаемой уравнением

$$y = ax, \tag{1}$$

заметим прежде всего, что точка O с координатами (0;0) и точка P с координатами (1; a) принадлежат этому графику (черт. 47 и 48).



Черт. 47



Черт. 48

При этом в случае, если $a > 0$ (черт. 47), точка P расположена в 1-й четверти, а в случае $a < 0$ (черт. 48) точка P расположена в 4-й четверти. В обоих случаях

$$\overline{OP'} = 1, \quad \overline{P'P} = a.$$

Пусть теперь Q будет какая-либо точка, координаты которой x_1 и y_1 удовлетворяют уравнению (1), так что

$$y_1=ax_1,$$

где

$$x_1=\overline{OQ'}, \quad y_1=\overline{Q'Q}.$$

Легко видеть, что прямоугольные треугольники $OP'P$ и $OQ'Q$ подобны. В самом деле, если $a>0$, то

$$\frac{P'P}{OP'}=\frac{\overline{P'P}}{\overline{OP'}}=\frac{a}{1}; \; \frac{Q'Q}{OQ'}=\frac{\overline{Q'Q}}{\overline{OQ'}}=\frac{y_1}{x_1}=a;$$

если $a<0$, то

$$\frac{P'P}{OP'}=\frac{-\overline{P'P}}{\overline{OP'}}=\frac{-a}{1}; \quad \frac{Q'Q}{OQ}=\frac{-\overline{Q'Q}}{\overline{OQ'}}=\frac{-y_1}{x_1}=-a;$$

поэтому

$$\frac{P'P}{OP'}=\frac{Q'Q}{OQ'},$$

т. е. катеты прямоугольных треугольников $OP'P$ и $OQ'Q$ пропорциональны; отсюда следует, что эти треугольники подобны.

Из подобия треугольников $OP'P$ и $OQ'Q$ можно заключить, что

$$\angle QOQ'=\angle POP'$$

и что прямые OQ и OP совпадают.

Мы пришли к выводу, что каждая точка Q, координаты которой x_1 и y_1 удовлетворяют уравнению (1), принадлежит прямой OP, соединяющей начало координат O с точкой P, имеющей координаты (1; a). Таким образом, все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), расположены на одной и той же прямой OP.

Теперь докажем, что на прямой OP расположены только такие точки.

В самом деле, если некоторая точка R, имеющая координаты (x_2; y_2), принадлежит прямой OP, то, построив ее проекцию R' на ось OX, из подобия треугольников $OR'R$ и $OP'P$ найдем, что

$$\frac{R'R}{OR'}=\frac{P'P}{OP'}$$

и что, следовательно,

$$\frac{\overline{R'R}}{\overline{OR'}}=\frac{\overline{P'P}}{\overline{OP'}}.$$

Но

$$\overline{R'R}=y_2, \quad \overline{OR'}=x_2; \quad \overline{P'P}=a; \quad \overline{OP'}=1.$$

Поэтому

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{a}{1}, \quad y_2 = ax_2,$$

т. е. координаты (x_2; y_2) точки R удовлетворяют уравнению (1).

Итак, прямой OP принадлежат все те и только те точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (1); иначе говоря, прямая OP представляет собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), т. е. график функции, задаваемой этим уравнением.

Прямая OP определяется точками O (0; 0) и P (1; a). Поэтому для ее построения достаточно построить эти точки и через них провести прямую. Но так как прямой OP принадлежит любая точка с координатами, удовлетворяющими уравнению $y=ax$, то точку P можно заменить точкой с координатами x_1 и ax_1, x_2 и ax_2 и т. д.

Например, для построения графика функции $y=3x$ достаточно провести прямую через начало координат и любую из точек:

$$(1;\ 3),\ (2,\ 6),\ (3,\ 9),\ldots,\left(\frac{1}{3};\ 1\right)\ \left(\frac{2}{3};\ 2\right),\ldots\ .$$

Очевидно, что и начало координат можно заменить любой из этих точек, так как все они принадлежат прямой OP.

Обратим внимание на геометрический смысл коэффициента a при переменной x в уравнении $y=ax$. Этот коэффициент есть значение функции y, соответствующее значению 1 независимой переменной x, т. е. ордината, соответствующая абсциссе 1. Каждому действительному значению коэффициента a ($a>0$, $a=0$, $a<0$) соответствует одна и только одна точка P с координатами (1; a) и одна и только одна прямая OP, образующая с осью OX угол POP' (черт. 47 и 48); таким образом, коэффициентом a вполне определяется угол POP', образуемый прямой OP с осью OX.

Ввиду этого коэффициент a при неизвестной x в уравнении $y=ax$ называется угловым коэффициентом прямой, графически представляющей это уравнение.

Если $a\geqslant 0$, то, принимая во внимание, что

$$\frac{P'P}{OP'} = \frac{a}{1} = a,$$

заключаем, что a есть не что иное, как тангенс угла $P'OP$, т. е. угла, образуемого прямой OP, проходящей через начало координат, с осью OX. Если этот угол имеет значение α, то

$$a = \operatorname{tg} \alpha.$$

Поэтому достаточно знать угол α, чтобы написать уравнение соответствующей прямой.

Так, прямые, проходящие через начало координат и образующие с осью OX углы в 30°, 45°, 60°, имеют соответственно уравнения:

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad y=x, \quad y=\sqrt{3}\,x.$$

Обратно, если коэффициент a при переменной x в уравнении $y=ax$ имеет положительное значение, то по этому коэффициенту можно найти угол α, образуемый прямой, графически представляющей это уравнение, с осью OX.

Пользуясь таблицами значений тангенса в пределах от 0° до 90°, найдем, что если

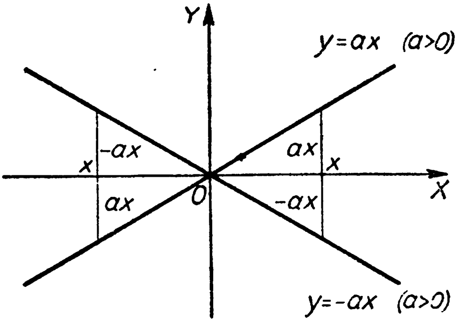
$$\begin{array}{lll} a=\frac{1}{2}, & \text{то} & \alpha\approx 27^\circ; \\ a=1, & \text{то} & \alpha=45^\circ; \\ a=2, & \text{то} & \alpha\approx 63^\circ; \\ a=10, & \text{то} & \alpha\approx 84^\circ; \\ a=100, & \text{то} & \alpha\approx 89^\circ \end{array}$$

Коэффициент a изменяется так, как тангенс угла α; из этого следует, что при возрастании угла α и неограниченном приближении его к прямому углу коэффициент a также будет возрастать и притом неограниченно возрастать, т. е. принимать сколь угодно большие положительные значения.

Так как функции

$$y=ax \quad \text{и} \quad y=-ax$$

принимают для каждого значения переменной x противоположные (т. е. равные по абсолютному значению, но отличающиеся знаками) значения, то графики этих функций представляют собой прямые, симметричные по отношению к оси OX (черт. 49).



Черт. 49

Поэтому для построения графика функции $y=-ax$, где $a>0$, достаточно построить график функции $y=ax$ и отразить его в оси OX.

§ 5. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Общее понятие.

Определение. Если зависимость между функцией y и независимой переменной x выражается равенством

$$y = ax + b, \tag{1}$$

где $ax+b$ есть двучлен первой степени относительно переменной x с коэффициентами a и b, то эта функция называется линейной функцией переменной x.

Линейная функция обладает следующим свойством, вполне ее определяющим, т. е. отличающим ее от всех других функций: приращения линейной функции пропорциональны приращениям независимой переменной.

В самом деле, если x_0 и x — определенное и произвольное другое значение независимой переменной, а y_0 и y — соответствующие им значения функции, то

$$y = ax + b; \quad y_0 = ax_0 + b; \quad y - y_0 = a(x - x_0),$$

т. е. приращения $y - y_0$ функции пропорциональны приращениям $x - x_0$ независимой переменной (§ 4).

Обратно, если относительно какой-либо функции y известно, что ее приращения $y - y_0$ пропорциональны приращениям $x - x_0$ независимой переменной, т. е. что имеет место равенство

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где k есть некоторое определенное число, то

$$y = kx + y_0 - kx_0;$$

обозначая число $y_0 - kx_0$ через l, приходим к выводу, что

$$y = kx + l,$$

т. е. что y есть линейная функция от переменной x.

Таким образом, линейная функция и только линейная функция обладает тем свойством, что ее приращения пропорциональны вызвавшим их приращениям независимой переменной; ввиду этого отношение приращения линейной функции к вызвавшему его приращению независимой переменной сохраняет постоянное значение:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a,$$

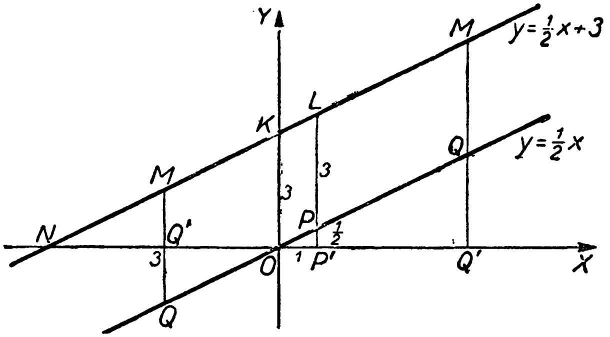
не зависящее от начальной абсциссы x_0, которой сообщается приращение*.

2. График линейной функции. Для построения графика линейной функции $y = \frac{1}{2}x + 3$ предварительно построим график функции $y = \frac{1}{2}x$.

---

* Если в двучлене $ax + b$ мы положим $a = 0$, то он обратится в постоянную b. Функция $y = b$ уже не является линейной.

Этот график представляет собой прямую OP (черт. 50), проходящую через начало координат O с координатами (0; 0) и точку P с координатами $(1; \frac{1}{2})$. Тем же абсциссам 0 и 1 соответствуют на графике функции $y=\frac{1}{2}x+3$ точки K и L с ординатами 3 и $3\frac{1}{2}$.



Черт. 50

Проведем через эти точки прямую KL. Так как отрезки OK и PL параллельны и равны ($OK=3$, $PL=P'L-P'P=3\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=3$), то прямая KL параллельна прямой OP.

Докажем, что прямая KL есть график функции

$$y=\frac{1}{2}x+3.$$

Пусть $\left(x_1;\ \frac{1}{2}x_1+3\right)$ будет решение уравнения

$$y=\frac{1}{2}x+3. \tag{1}$$

Возьмем на прямой OP точку Q, имеющую абсциссу x_1, и, следовательно, ординату $\frac{1}{2}x_1$. Если мы продолжим перпендикуляр $Q'Q$, на котором лежит точка Q, до пересечения с прямой KL в точке M, то построим отрезок QM, равный отрезку OK, т. е. имеющий длину 3 (отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми, равны), и убедимся, что точка M прямой KL имеет координаты x_1 и $\frac{1}{2}x_1+3$. Таким образом, каждому решению уравнения (1) соответствует на прямой KL некоторая точка, изображающая это решение.

Обратно, если M есть **любая** точка прямой KL, то на одном с ней перпендикуляре к оси OX находится точка Q прямой OP с координатами $x_1, \frac{1}{2}x_1$, так что точка M имеет координаты $x_1, \frac{1}{2}x_1+3$, т. е. служит изображением решения уравнения (1).

Таким образом, прямая KL есть геометрическое место точек, изображающих решения уравнения (1), т. е. график этого уравнения.

Прямая KL, служащая графиком уравнения

$$y=\frac{1}{2}x+3,$$

1) пересекает ось ординат в точке K, имеющей ординату 3, так что $\overline{OK}=3$;

2) параллельна прямой OP, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент $\frac{1}{2}$, и, следовательно, образует с осью OX тот же угол, что и прямая OP:

$$\angle MNQ'=\angle QOQ'.$$

Поэтому прямая KL может быть получена путем параллельного перенесения прямой OP на направленный отрезок OK, равный 3. Угол α, который прямая KL образует с осью OX, определяется коэффициентом $\frac{1}{2}$ при переменной x $\left(\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\right)$, называемым **угловым коэффициентом** прямой KL.

Следовательно, для построения графика линейной функции $y=\frac{1}{2}x+3$ достаточно провести прямую, пересекающую ось ординат в точке (0; 3) и имеющую угловой коэффициент $\frac{1}{2}$.

Но так как прямая вполне определяется каждыми своими двумя точками, то для построения этого графика можно провести прямую через две точки, изображающие два любых решения уравнения $y=\frac{1}{2}x+3$.

Особенно удобно взять для этого, кроме точки K с координатами (0; 3), в которой искомый график пересекает ось OY, точку N, в которой этот график пересекает ось OX; для точки N имеем: $\frac{1}{2}x+3=0$, т. е. $x=-6$. Прямая KN и будет искомым графиком.

Все рассуждения, с помощью которых мы нашли способы построения графика функции

$$y=\frac{1}{2}x+3,$$

остаются в силе и по отношению к каждой из функций:

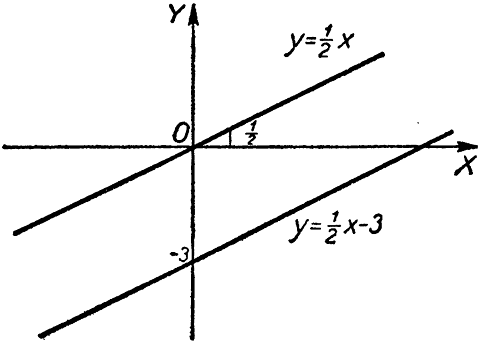
$$y=\frac{1}{2}x-3,\quad y=-\frac{1}{2}x+3,\quad y=-\frac{1}{2}x-3;$$

в этом можно убедиться из чертежей 51 а, б.

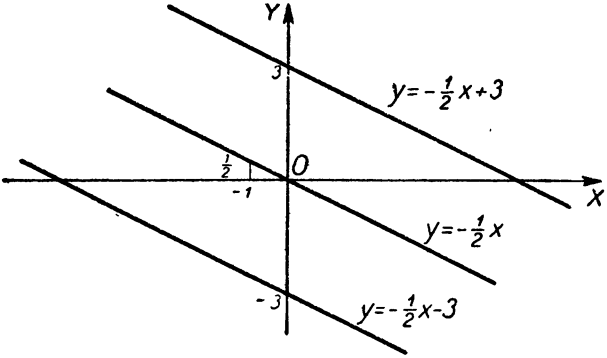
Обобщая все случаи, приходим к выводу, что график линейной функции

$$y=ax+b$$

есть прямая, имеющая угловой коэффициент a и отсекающая от оси ординат направленный отрезок b.



Черт. 51 а



Черт. 51 б

Для построения этого графика достаточно построить точки с координатами $(0;\ b)$ и $\left(-\frac{b}{a};0\right)$, в которых искомый график пересекает ось OY и ось OX, и провести через эти точки прямую линию.

Как известно из геометрии, прямая, расположенная на плоскости, определяется двумя точками этой плоскости. Но если прямая расположена на координатной плоскости, то одно из этих заданий может быть заменено: 1) угловым коэффициентом прямой, 2) отрезком, отсекаемым прямой на оси ординат, 3) отрезком, отсекаемым прямой на оси абсцисс. В связи с этим возникают и могут быть решены следующие задачи:

Задача 1. Найти уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент a и проходящей через точку $(x_1;\ y_1,)$.

Решение. Пусть прямая отсекает на оси ординат направленный отрезок b. Тогда ее уравнение может быть записано в виде:

$$y = ax + b.$$

Но эта прямая проходит через точку $(x_1;\ y_1)$.

Следовательно,

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Отсюда находим, что

$$b = y_1 - ax_1.$$

Подставляя, получаем искомое уравнение:

$$y = ax + y_1 - ax_1,$$

или

$$y - y_1 = a(x - x_1).$$

Задача 2. Найти уравнение прямой, отсекающей от оси ординат отрезок b и проходящей через точку $(x_1;\ y_1)$, не принадлежащую оси ординат $(x_1 \neq 0)$.

Решение. Пусть прямая имеет угловой коэффициент a. Тогда ее уравнение может быть записано в виде:

$$y = ax + b.$$

Но эта прямая проходит через точку $(x_1;\ y_1)$.

Следовательно,

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Отсюда находим, что

$$a = \frac{y_1 - b}{x_1}.$$

Подставляя, получаем искомое уравнение:

$$y = \frac{y_1 - b}{x_1}x + b, \text{ или } \frac{y - b}{y_1 - b} = \frac{x}{x_1},$$

где $x_1 \neq 0$ и, следовательно, $y_1 \neq b$.

Задача 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$, где $x_2 \neq x_1$ и $y_2 \neq y_1$.

Решение. Пусть прямая имеет угловой коэффициент a и отсекает от оси ординат отрезок b. Тогда ее уравнение может быть записано в виде:

$$y = ax + b.$$

Но эта прямая проходит через точки $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Следовательно,

$$y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = ax_2 + b.$$

Отсюда последовательно находим:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1); \quad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad b = y_1 - ax_1.$$

Подставляя, придаем искомому уравнению сначала вид:

$$y = ax + y_1 - ax_1; \quad y - y_1 = a(x - x_1),$$

а затем вид:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

В этом последнем виде уравнение прямой, проходящей через две данные точки (x_1; y_1) и (x_2; y_2), легко запоминается.

§ 6. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Определение. Если зависимость между функцией и независимой переменной x выражается равенством

$$(1) \qquad y = ax^2 + bx + c,$$

где $ax^2 + bx + c$ есть трехчлен второй степени относительно переменной x с коэффициентами a, b, c, то эта функция называется квадратичной функцией переменной x.

2. Ход изменения квадратичной функции. Для исследования хода изменения квадратичной функции представим уравнение (1) в виде

$$(2) \qquad y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

как мы это делали в гл. III, § 1.

1°. Правая часть уравнения есть сумма двух слагаемых, из которых первое зависит от переменной x, а второе не зависит от нее и имеет постоянное значение.

Так как выражение $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ может принимать только положительные значения $\left(\text{при } x \neq -\frac{b}{2a}\right)$ или значение 0 $\left(\text{при } x = -\frac{b}{2a}\right)$, то возможны два случая:

1) Если $a > 0$, то слагаемое $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ может принимать только положительные значения или значение 0, так что при этом ус-

ловии правая часть уравнения (2) и, следовательно, функция y имеет некоторое наименьшее значение.

2) Если $a < 0$, то слагаемое $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ может принимать только отрицательные значения или значение 0, так что при этом условии правая часть уравнения (2) и, следовательно, функция y имеет некоторое наибольшее значение.

Так как при $x = -\frac{b}{2a}$ функция y имеет значение $\frac{4ac-b^2}{4a}$, то наименьшее значение, которое функция y принимает при условии $a > 0$, и наибольшее значение, которое она принимает при условии $a < 0$, есть $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2°. Представляя выражение $x+\frac{b}{2a}$ в виде разности

$$x-\left(-\frac{b}{2a}\right), \tag{3}$$

заключаем, что

если $x < -\frac{b}{2a}$, то разность (3) имеет отрицательное значение;

если $x > -\frac{b}{2a}$, то разность (3) имеет положительное значение.

Поэтому если переменная x возрастает, но остается меньше, чем число $-\frac{b}{2a}$, то разность (3) возрастает, но квадрат этой разности

$$\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2, \tag{4}$$

как квадрат возрастающей отрицательной переменной, убывает (гл. II, § 1, п. 9). Иначе говоря, при возрастании переменной x от $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$ выражение (4) убывает.

Если же переменная x возрастает и при этом превосходит число $-\frac{b}{2a}$, то разность (3) возрастает и ее квадрат (4), как квадрат возрастающей положительной переменной, также возрастает. Иначе говоря, при возрастании переменной x от $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$ выражение (4) возрастает.

Отсюда заключаем, что

3) если $a > 0$, то при возрастании переменной x от $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$ произведение

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \tag{5}$$

и, следовательно, функция y убывает;

4) если $a < 0$, то при возрастании переменной x от $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$ произведение (5) и, следовательно, функция y убывает.

5) Каждым двум значениям переменной x

$$-\frac{b}{2a}-h \text{ и } -\frac{b}{2a}+h,$$

симметрично расположенным на оси OX по отношению к значению $-\frac{b}{2a}$, соответствуют равные значения функции y:

$$a\left(-h\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \text{ и } a\left(+h\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Поэтому график функции y симметричен относительно прямой, проходящей через точку оси OX с абсциссой $-\frac{b}{2a}$ и перпендикулярной к оси OX.

6) При возрастании переменной x от значения $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$ положительная разность $x-\left(-\frac{b}{2a}\right)$ и, следовательно, ее квадрат возрастает неограниченно (гл. II, § 1, п. 6 и 9). Поэтому при $a > 0$ функция y в промежутке от $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$ возрастает от своего наименьшего значения до $+\infty$, а при $a < 0$ функция y в том же промежутке убывает от своего наибольшего значения до $-\infty$.

Так как график функции y симметричен относительно прямой, проходящей через точку оси OX с абсциссой $-\frac{b}{2a}$ и перпендикулярной к оси OX, то при $a > 0$ функция y в промежутке от $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$ убывает от $+\infty$ до своего наименьшего значения, а при $a < 0$ функция y в том же промежутке возрастает от $-\infty$ до своего наибольшего значения.

К выводам 1—6 мы пришли в гл. III, § 3, п. 5 из рассмотрения графика трехчлена ax^2+bx+c, т. е. графика квадратичной функции. Теперь мы установили ход изменения этой функции посредством рассмотрения ее уравнения (2). Но из уравнения (2) можно сделать еще и следующие выводы:

7а) Если $a > 0$ и $b^2-4ac < 0$, то наименьшее значение $-\frac{b^2-4ac}{4a}$, принимаемое функцией y, есть число положительное. В этом случае при изменении переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ функция y принимает только положительные значения и, следовательно, ни для одного значения переменной x не обращается в нуль. Поэтому при условиях

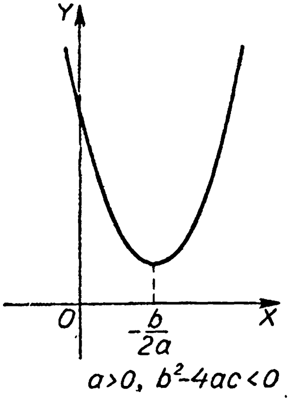
$$a > 0,\ b^2-4ac < 0$$

парабола, изображающая функцию y, обращена ветвями вверх и вся расположена над осью OX (черт. 52).

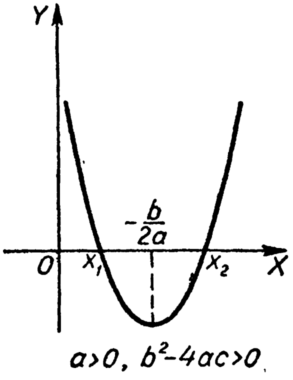
7б) Если $a > 0$ и $b^2 - 4ac > 0$, то наименьшее значение $-\frac{b^2-4ac}{4a}$, принимаемое функцией y, есть число отрицательное. В этом случае функция y в промежутке от $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$ убывает от $+\infty$ до этого отрицательного наименьшего значения, а в промежутке от $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$ возрастает от этого отрицательного наименьшего значения до $+\infty$ и, следовательно, в каждом из этих промежутков один раз обращается в нуль. Поэтому при условиях

$$a > 0, \quad b^2 - 4ac > 0$$

парабола, изображающая функцию y, обращена ветвями вверх и пересекается осью OX в двух точках, симметрично расположенных относительно точки $-\frac{b}{2a}$ (черт. 53).



Черт. 52



Черт. 53

Абсциссы x_1 и x_2 этих точек обращают функцию y и, следовательно, трехчлен $ax^2 + bx + c$ в нуль, т. е. служат корнями уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

так что

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Равенства

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

подтверждают, что числа x_1 и x_2 симметрично расположены относительно числа $-\frac{b}{2a}$, так что число $-\frac{b}{2a}$ есть середина промежутка $(x_1 \dots x_2)$.

7в) Если $a > 0$ и $b^2 - 4ac = 0$, то

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

В этом случае функция y принимает при $x = -\frac{b}{2a}$ значение 0, а при всех других значениях переменной x — только положительные значения; при этом она в промежутке от $-\infty$ до $-\frac{b}{2a}$ убывает от $+\infty$ до 0, а в промежутке от $-\frac{b}{2a}$ до $+\infty$ возрастает от 0 до $+\infty$. Поэтому при условиях

$$a > 0,\ b^2 - 4ac = 0$$

парабола, изображающая функцию y, обращена ветвями вверх и, имея с осью OX только одну общую точку, расположена всеми другими своими точками над осью OX. Такое расположение кривой относительно прямой, когда она имеет с этой прямой общую точку и при этом слева и справа от этой общей точки расположена по одну и ту же сторону от прямой, есть один из видов касания кривой с прямой в их общей точке. В рассматриваемом случае парабола касается оси OX (черт. 54).

8) Применяя те же рассуждения, что и в случаях 7а,б,в, мы можем установить, как изменяется функция y при условиях:

а) $a < 0$ и $b^2 - 4ac < 0$;

б) $a < 0$ и $b^2 - 4ac > 0$;

в) $a < 0$ и $b^2 - 4ac = 0$.

Параболы, изображающие функцию y в этих случаях, представлены на чертежах 55, 56, 57. Эти параболы соответственно симметричны относительно оси OX параболам, изображающим функцию y в случаях 7а, б, в.

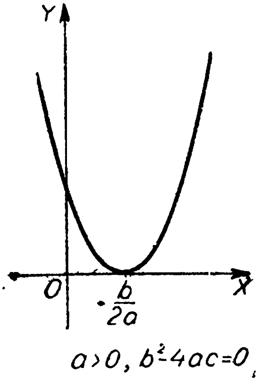
Выполненное исследование изменения функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

при изменении независимой переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ позволяет сделать два следующих практических вывода:

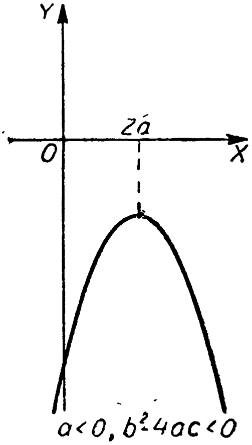
1°. Если $a > 0$ и функция y для какого-либо значения x_0 переменной x принимает отрицательное значение y_0, то имеет место случай 7 б, т. е. трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет 2 неравных корня. Если же $a < 0$ и функция y для какого-либо значения x_0 переменной x принимает положительное значение, то имеет место случай 8 б, т. е. трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет 2 неравных корня.

В этом можно убедиться, обратив внимание на то, что при $a > 0$ только одна из трех парабол, обращенных ветвями вверх (черт. 53), имеет точки с **отрицательными** ординатами, а при $a < 0$ только одна из трех парабол, обращенных ветвями вниз (черт. 56), имеет точки с **положительными** ординатами.



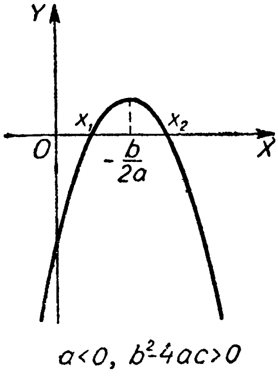
Y
O
$-\frac{b}{2a}$
X
$a>0,\ b^2-4ac=0$

Черт. 54



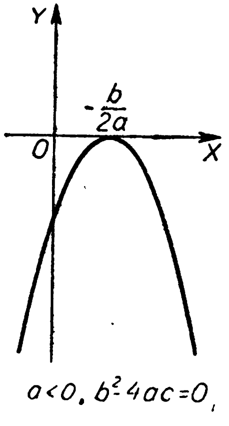
Y
2a
O
X
$a<0,\ b^2-4ac<0$

Черт. 55



Y
x_1
x_2
O
$-\frac{b}{2a}$
X
$a<0,\ b^2-4ac>0$

Черт. 56



Y
$-\frac{b}{2a}$
O
X
$a<0,\ b^2-4ac=0$

Черт. 57

Эти точки с отрицательными (при $a > 0$) и с положительными (при $a < 0$) ординатами соответствуют точкам оси OX, расположенным между точками пересечения параболы с осью OX.

2°. Если $a > 0$ и функция y для какого-либо значения x_0 переменной x принимает **положительное** значение, то установить, какой именно из случаев 7 а, б, в имеет место, можно лишь после того, как будет установлен знак дискриминанта $b^2 - 4ac$:

при $b^2 - 4ac < 0$ имеет место случай 7а (черт. 52);
при $b^2 - 4ac > 0$ имеет место случай 7б (черт. 53);
при $b^2 - 4ac = 0$ имеет место случай 7в (черт. 54).

Точно так же, если $a < 0$ и функция y для какого-либо значения x_0 переменной x принимает отрицательное значение, то установить, какой именно из случаев 8 а, б, в имеет место, можно лишь после того, как будет установлен знак дискриминанта $b^2 - 4\,ac$:

при $b^2 - 4ac < 0$ имеет место случай 8а (черт. 55);
при $b^2 - 4ac > 0$ имеет место случай 8б (черт. 56);
при $b^2 - 4ac = 0$ имеет место случай 8в (черт. 57).

Пример 1. Не решая уравнения $3x^2 - 26x + 16 = 0$, определить положение числа 1 по отношению к его корням.

Решение. Установим, какое положение занимает парабола, изображающая функцию

$$y = 3x^2 - 26x + 16.$$

Так как $3 > 0$ и $[3x^2 - 26x + 16]_{x=1} = -7 < 0$, то парабола пересекает ось OX в двух точках x_1 и x_2 и точка 1 расположена между этими точками пересечения.

Иначе говоря, данное уравнение имеет 2 неравных корня x_1 и x_2 и число 1 расположено между этими корнями:

$$x_1 < 1 < x_2.$$

Пример 2. Не решая уравнения $5x^2 - 7x + 1 = 0$, определить положение числа 2 по отношению к его корням.

Решение. Установим, какое положение занимает парабола, изображающая функцию

$$y = 5x^2 - 7x + 1.$$

Так как $5 > 0$ и $[5x^2 - 7x + 1]_{x=2} = 7 > 0$,

а дискриминант трехчлена $5x^2 - 7x + 1$ равен 29, т. е. имеет положительное значение, то парабола пересекает ось OX в двух точках x_1 и x_2 и точка 2 расположена вне промежутка $(x_1 \ldots x_2)$.

Для того чтобы узнать, с какой именно стороны промежутка $(x_1 \ldots x_2)$ расположено число 2, сравним его с полусуммой корней данного уравнения, т. е. с числом $\frac{7}{10}$, расположенным на середине промежутка $(x_1 \ldots x_2)$. Так как $\frac{7}{10} < 2$, то число 2 расположено справа от промежутка $(x_1 \ldots x_2)$, т. е. оно больше большего корня x_2 данного уравнения.

3. Скорость изменения квадратичной функции. Исследуем, какие приращения Δy квадратичной функции

$$y = x^2$$

соответствуют равным приращениям Δx ее независимой переменной x.

Если, например, $\Delta x=1$, то соответствующие приращения Δy этой функции на некотором участке могут быть представлены следующей таблицей.

Таблица 1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
Δy		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

Из этой таблицы видно, что при изменении переменной от 1 до 10 равным приращениям независимой переменной x ($\Delta x=1$) соответствуют неравные, все возрастающие приращения функции y:

$$\Delta y=3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19.$$

Точно так же, если $\Delta x=0{,}1$, то соответствующие приращения Δy функции y на некотором участке могут быть представлены следующей таблицей.

Таблица 2.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4,00
Δy		0,21	0,23	0,25	0,27	0,29	0,31	0,33	0,35	0,37	0,39

Опять мы видим, что равным приращениям независимой переменной x ($\Delta x=0{,}1$) соответствуют неравные, все возрастающие приращения функции y:

$$\Delta y = 0{,}21;\ 0{,}23;\ 0{,}27;\ 0{,}29;\ 0{,}31;\ 0{,}33;\ 0{,}35;\ 0{,}37;\ 0{,}39.$$

Вообще, если $\Delta x = h$, где $h > 0$, то значениям

$$a,\quad a+h,\quad a+2h,\quad a+3h,\ldots$$

независимой переменной x соответствуют значения

$$a^2, (a+h)^2,\quad (a+2h)^2,\quad (a+3h)^2,\ldots,$$

так что приращение Δy последовательно принимает значения:

$$2ah+h^2,\quad 2ah+3h^2,\quad 2ah+5h^2,\ldots,$$

т. е. каждое следующее значение приращения Δy больше предыдущего его значения на $2h^2$.

Рассмотрим, как этот факт неравномерного изменения приращения Δy функции x^2 влияет на ее график.

Пусть (черт. 58) положительным абсциссам x_1, x_2, x_3 соответствуют на параболе, изображающей функцию $y = x^2$ ($x > 0$), точки M_1, M_2, M_3. Проведем хорды $M_1 M_2$ и $M_2 M_3$ и отрезки M_1K и M_2L, параллельные оси OX, Так как приращению $x_2 - x_1$ абсциссы x соответствует приращение $x_2^2 - x_1^2$ ординаты, то

$$KM_2 = x_2^2 - x_1^2.$$

Точно так же

$$LM_3 = x_3^2 - x_2^2.$$

Если $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, то

$$\frac{LM_3}{KM_2} = \frac{x_3^2 - x_2^2}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{x_3 + x_2}{x_2 + x_1},$$

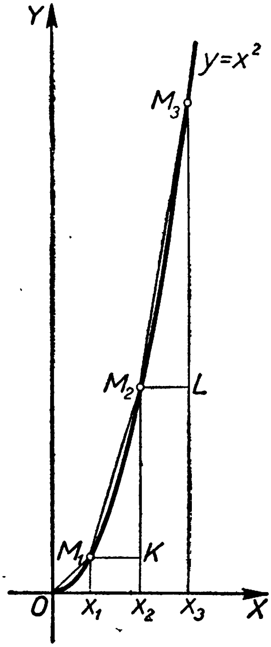
но $x_3 > x_2 > x_1$ и, следовательно, $x_3 + x_2 > x_2 + x_1$; поэтому $LM_3 > KM_2$, т. е. равным приращениям независимой переменной x соответствуют возрастающие приращения функции x^2.

Отсюда, принимая во внимание, что $M_2L = M_1K$, заключаем, что

$$\frac{M_3L}{M_2L} > \frac{M_2K}{M_1K},$$

т. е. что

$$\operatorname{tg} \angle M_3M_2L > \operatorname{tg} \angle M_2M_1K.$$



Черт. 58

Таким образом, хорды, которые стягивают дуги параболы, соответствующие равным отрезкам положительной части оси, имеют неравные наклоны по отношению к этой оси: эти наклоны возрастают по мере того, как возрастают абсциссы начал указанных хорд.

При возрастании независимой переменной x от значения x_1 до значения x_2, где $0 < x_1 < x_2$, квадратичная функция возрастает от значения x_1^2 до значения x_2^2, т. е. получает приращение $x_2^2 - x_1^2$, равное длине отрезка KM_2 (при выбранной единице масштаба).

Так, если $x_1 = 1$ и $x_2 = 11$, то (см. таблицу 1) $y_1 = 1$ и $y_2 = 121$, так что приращению 10 переменной x соответствует приращение 120 функции y. Это приращение, которое функция y приобрела на участке (1... 11), сложилось из приращений, которые функция y последовательно получала на участках (1...2), (2...3), (3...4), (4...5), (5...6), (6...7), (7...8), (8...9), (9...10), (10...11), каждый из которых составляет одну десятую часть всего участка (1...11). В самом деле,

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 24 \cdot 5 = 120.$$

Очевидно, что то же общее приращение 120 функция могла бы приобрести и тогда, если бы ее приращение на каждой десятой части участка (1...11) было равно среднему арифметическому всех приращений, приобретенных ею в действительности на этих участках, т. е. числу 12 (120 : 10 = 12). В этом случае отставание приращений на первых пяти участках компенсировалось бы превышением приращений на вторых пяти участках:

$$3 - 12 = -9,\ 5 - 12 = -7,\ 7 - 12 = -5,\ 9 - 12 = -3,\ 11 - 12 = -1;$$

$$21 - 12 = 9,\ 19 - 12 = 7,\ 17 - 12 = 5,\ 15 - 12 = 3,\ 13 - 12 = 1.$$

Так как, сравнивая приращения функции, соответствующие равным приращениям независимой переменной, можно получить представление о скорости изменения функции, то среднее арифметическое приращений, последовательно приобретаемых функцией на нескольких равных участках области изменения независимой переменной, называют средней скоростью изменения функции в рассматриваемой области.

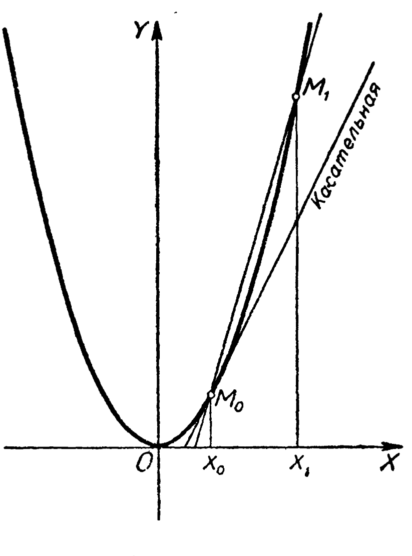
Из приведенного рассуждения следует, что средняя скорость изменения квадратичной функции y, соответствующего изменению независимой переменной x от значения x_1 до значения x_2, равна отношению

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1},$$

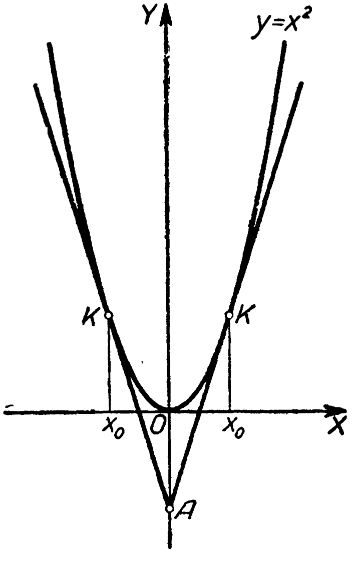
т. е. приращению, рассчитанному на единицу масштаба. Для квадратичной функции это отношение равно числу $x_2 + x_1$.

Но, с другой стороны, отношение $\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1}$ есть $\operatorname{tg} \angle M_2 M_1 K$ (черт. 58), т. е. наклон хорды $M_1 M_2$, которая определяется точками параболы, имеющими абсциссы x_1 и x_2. Следовательно, средняя скорость изменения квадратичной функции на каком-либо участке $(x_1 \ldots x_2)$, где $0 < x_1 < x_2$, равна наклону хорды параболы, соответствующей этому участку.

4. Касательная к параболе. Возьмем на параболе $y = x^2$ точки M_0 и M_1 с абсциссами x_0 и x_1 (черт. 59) и проведем через них прямую, или, как говорят, секущую $M_0 M_1$. Допустим, что точка M_0 остается неподвижной, т. е. сохраняет свое положение, а точка M_1, скользя по параболе, все больше приближается к точке M_0 и стремится к совпадению с ней. Тогда каждому новому положению точки M_1 будет соответствовать новое положение секущей $M_0 M_1$, а при совпадении точки M_1 с точкой M_0 секущая $M_0 M_1$ займет некоторое предельное положение. При этом и угловой коэффициент секущей $M_0 M_1$, т. е. наклон хорды $M_0 M_1$, который равен числу $x_0 + x_1$, будет изме-



Черт. 59



Черт. 60

няться и стремиться к предельному значению $x_0 + x_0$, т. е. к значению $2x_0$.

Прямая, проходящая через точку M_0 параболы с абсциссой x_0 и представляющая собой то предельное положение, которое займет секущая M_0M_1 параболы при совпадении точки M_1 с точкой M_0, называется **касательной** к параболе в точке M_0.

Мы пришли к выводу, что касательная к параболе $y = x^2$, проведенная в ее точке M_0 с абсциссой x_0, имеет угловой коэффициент $2x_0$.

Зная это, мы можем написать уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в ее точке M_0, имеющей абсциссу x_0 (черт. 60). Будем искать уравнение этой прямой в виде

$$y = ax + b.$$

Как мы только что установили, $a = 2x_0$. Для нахождения коэффициента b примем во внимание, что прямая проходит через точку M_0 с координатами $(x_0,\ x_0^2)$ и что, следовательно, эти координаты удовлетворяют ее уравнению, так что имеет место равенство

$$x_0^2 = ax_0 + b;$$

отсюда находим, что

$$b = x_0^2 - ax_0 = x_0^2 - 2x_0^2 = -x_0^2.$$

Итак, касательная имеет уравнение

$$y = 2x_0x - x_0^2.$$

При этом абсцисса x_0 точки касания и отрезок b, который эта касательная отсекает на оси OY, связаны равенством $b = -x_0^2$, которое позволяет по данной абсциссе x_0 находить отрезок b и, обратно, по данному отрезку b находить абсциссы точек касания тех **двух** касательных, которые можно провести к параболе из каждой точки оси OY с координатами $(0;\ b)$, где $b < 0$:

$$x_0 = \mp\sqrt{-b}.$$

Пример 1. Касательная к параболе $y = x^2$ в ее точке K с абсциссой 1,5 имеет уравнение

$$y = 3x - 2{,}25,$$

а в точке K' с абсциссой $-1{,}5$ имеет уравнение

$$y = -3x - 2{,}25.$$

Пример 2. Касательные к параболе $y = x^2$, проведенные из точки $(0; -4)$, имеют уравнения

$$y = -4x - 4,\quad y = 4x - 4,$$

так как

$$x_0 = \mp\sqrt{-(-4)} = \mp 2.$$

5. Графическое решение уравнений второй степени. Для решения уравнений второй степени можно применить **графический** способ, сущность которого разъясним на двух примерах.

Пример 1. Выполним графическое решение уравнения

$$x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Если мы представим данное уравнение в виде

$$(1)\qquad x^2 = 2x + 4,$$

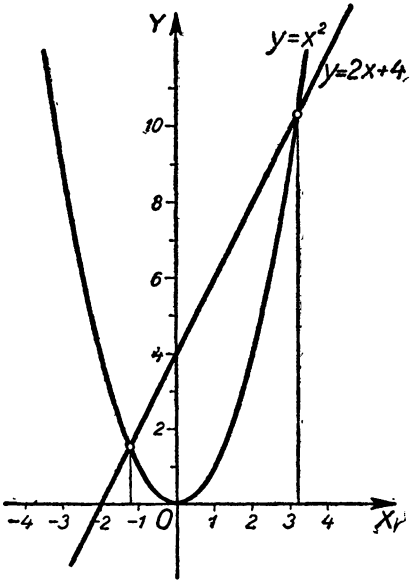
то увидим, что его корнями служат все те и только те значения неизвестной x, при которых выражения x^2 и $4x - 2$ имеют **равные** значения.

Очевидно, что для нахождения этих значений неизвестной x достаточно построить графики функций

$$(2) \qquad y = x^2 \text{ и } y = 2x + 4$$

и найти абсциссы точек пересечения этих графиков (черт. 61). В самом деле, каждая точка пересечения графиков есть их общая точка; если эта общая точка имеет координаты x_0, y_0, то они связаны каждым из равенств

$$y_0 = x_0^2 \text{ и } y_0 = 2x_0 + 4,$$



Черт. 61

откуда следует, что

$$x_0^2 = 2x_0 + 4,$$

т. е. что абсцисса x_0 точки пересечения графиков функций (2) есть корень уравнения (1).

По чертежу 61 можно прочесть, что данное уравнение имеет 2 корня: $x_1 \approx -1{,}2$ и $x_2 \approx 3{,}2$. Эти корни найдены с точностью до 0,1 (первый — с избытком, а второй — с недостатком); точными корнями данных уравнений служат числа $1 - \sqrt{5}$ и $1 + \sqrt{5}$.

Пример 2. Для решения уравнения

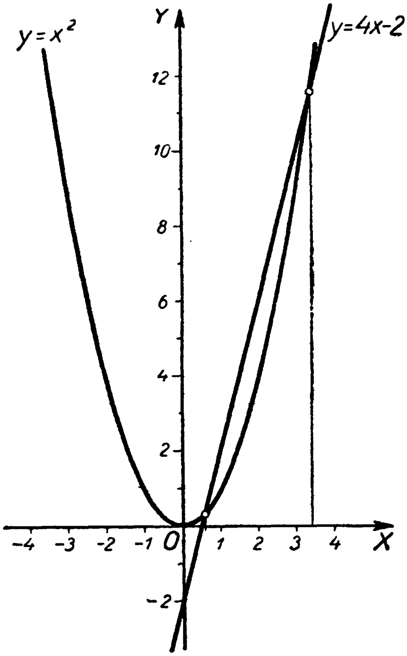
$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

строим графики функций

$$y = x^2 \text{ и } y = 4x - 2.$$

Графики (черт. 62) пересекаются в двух точках, имеющих абсциссы 0,6 и 3,4; эти числа и служат приближенными корнями данного уравнения:

$$x_1 \approx 0{,}6, \; x_2 \approx 3{,}4.$$



Черт. 62

Вообще для решения уравнения

$$(1) \qquad x^2 + px + q = 0$$

строим графики функций

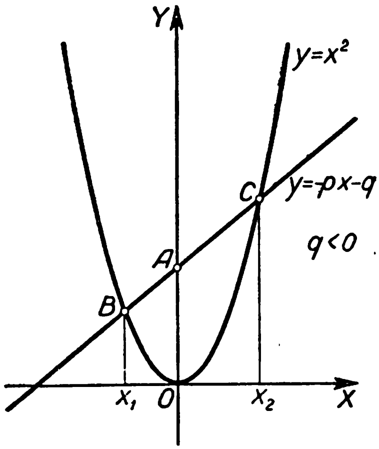
$$y = x^2 \text{ и } y = -px - q.$$

При этом могут представиться два случая:

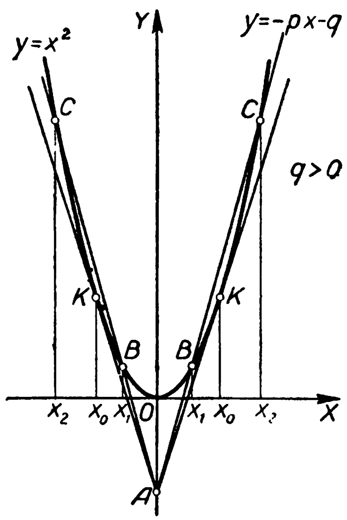
1°. Если $q < 0$, то $-q > 0$ и, следовательно, прямая $y = -px-q$ пересекает ось OY в точке A $(0; -q)$, принадлежащей положительной части оси OY (черт. 63).

В этом случае прямая пересекает параболу в двух точках B и C, принадлежащих соответственно левой и правой ветвям параболы и имеющих отрицательную абсциссу x_1 и положительную абсциссу x_2, так что уравнение (1) имеет 1 отрицательный корень x_1 и 1 положительный корень x_2.

2°. Если $q > 0$, то $-q < 0$ и, следовательно, прямая $y = -px - q$ пересекает ось OY в точке $A\ (0; -q)$, принадлежащей отрицательной части оси OY (черт. 64).



Черт. 63



Черт. 64

1) Если при этом $p < 0$, то $-p > 0$ (черт. 64) и прямая

a) либо пересекает правую ветвь параболы в двух точках B и C;

b) либо касается ее в некоторой точке K;

c) либо не пересекает параболы.

Очевидно, что случаи a), b) и c) будут иметь место в зависимости от того, будет ли угловой коэффициент $-p$ прямой соответственно больше, равен или меньше углового коэффициента касательной, проведенной из точки A $(0; -q)$ к правой ветви касательной. Но, как мы знаем (п. 4), угловой коэффициент этой касательной имеет значение $2\sqrt{q}$. Поэтому случаи a), b), c) будут иметь место соответственно при условиях:

$$\text{a) } -p > 2\sqrt{q}, \quad \text{b) } -p = 2\sqrt{q}, \quad \text{c) } -p < 2\sqrt{q},$$

которые ввиду того, что $-p > 0$, могут быть заменены условиями:

$$\text{a) } p^2 > 4q, \quad \text{b) } p^2 = 4q, \quad \text{c) } p^2 < 4q.$$

2) Если $p > 0$, то с помощью аналогичных рассуждений мы придем к выводу, что при тех же условиях

$$\text{a) } p^2 > 4q, \qquad \text{b) } p^2 = 4q, \qquad \text{c) } p^2 < 4q$$

прямая соответственно пересекает левую ветвь параболы в двух точках B и C, касается ее в некоторой точке K, не пересекает ее.

Мы пришли к следующим выводам:

a) Если $q > 0$ и $p^2 > 4q$, то прямая пересекает правую или левую ветвь параболы в двух точках B и C, имеющих соответственно положительные (при $p < 0$) или отрицательные (при $p > 0$) абсциссы x_1 и x_2, так что уравнение имеет 2 неравных положительных или отрицательных корня.

b) Если $q > 0$ и $p^2 = 4q$, то прямая касается правой или левой ветви параболы в некоторой точке K, имеющей абсциссу x_0 (положительную при $p < 0$ и отрицательную при $p > 0$), так что уравнение имеет 2 равных положительных или отрицательных корня.

c) Если $q > 0$ и $p^2 < 4q$, то прямая не пересекает ни правой, ни левой ветви параболы, так что уравнение не имеет корней.

Очевидно, что, решая уравнение $x^2 + px + q = 0$ графическим способом, мы вновь, но уже на основании геометрических соображений, провели исследование этого уравнения по его дискриминанту $p^2 - 4q$ и коэффициентам p и q. В самом деле, найденные выводы могут быть сведены в следующую таблицу

$q < 0$	$q > 0$					
$x_1<0,\ x_2>0$	$p<0$			$p>0$		
	$p^2-4q>0$ $x_1 \neq x_2$ $x_1>0,$ $x_2>0$	$p^2-4q=0$ $x_1=x_2$ $x_1>0,$ $x_2>0$	$p^2-4q<0$ нет корней	$p^2-4q>0$ $x_1 \neq x_2$ $x_1<0,$ $x_2<0$	$p^2-4q=0$ $x_1=x_2$ $x_1<0,$ $x_2<0$	$p^2-4q<0$ нет корней

§7. ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

1. Общее понятие. Если зависимость между функцией y и независимой переменной x выражается равенством

$$y = \frac{a}{x}, \tag{1}$$

где a есть определенное число, т. е. если каждому значению x_0 независимой переменной x соответствует такое значение y_0 функции y, которое получается из значения x_0 путем деления на него числа a, то эту зависимость называют обратной пропорциональной зависимостью или, просто, обратной пропорциональностью.

Это название объясняется следующим свойством переменных x и y, находящихся между собой в указанной зависимости.

Если x_0 и x_1 — два любых значения переменной x, а y_0 и y_1 — два соответствующих им значения функции y, заданной равенством (1), то

$$y_0 = \frac{a}{x_0}, \quad y_1 = \frac{a}{x_1},$$

а потому при $a \neq 0$

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{x_0}{x_1}, \tag{2}$$

т. е. отношение двух любых значений одной из переменных величин, связанных равенством (1), при $a \neq 0$ равно обратному отношению соответствующих значений другой переменной величины, так что эти величины обратно пропорциональны.

Обратно, если две переменные величины x и y обратно пропорциональны, т. е. если отношение двух любых значений x_1 и x_0 величины x равно обратному отношению двух соответствующих им значений y_1 и y_0 величины y, то имеет место пропорция (2) и, следовательно, равенство

$$y_1 = \frac{x_0 y_0}{x_1}; \tag{3}$$

поэтому, если

$$x_0 y_0 = a,$$

то $y_1 = \frac{a}{x_1}$ и, вообще, $y = \frac{a}{x}$.

Таким образом, для того чтобы две переменные величины x и y находились в обратной пропорциональной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы отношение двух любых значений одной величины было равно обратному отношению соответствующих значений другой величины.

2. График функции $y = \frac{a}{x}$ при $a > 0$. График обратной пропорциональной зависимости, т. е. график функции y, определяемой уравнением

$$y = \frac{a}{x},$$

в случае если $a = 1$, был рассмотрен в гл. II, § 2, п. 3.

Повторяя рассуждения, примененные там к исследованию хода изменения функции $y = \frac{1}{x}$, приходим к следующим выводам относительно функции $y = \frac{a}{x}$, где $a > 0$.

1) Функция y имеет определенное числовое значение при всех действительных значениях независимой переменной x, отличных от нуля.

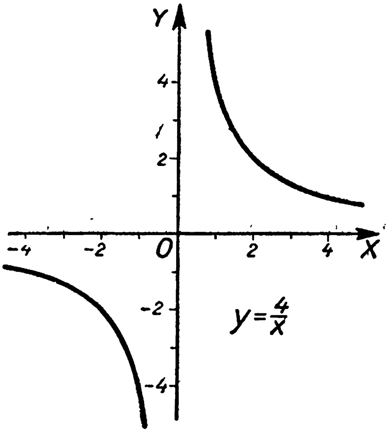
2) Так как $a > 0$, то при положительных значениях переменной x функция y принимает положительные значения, а при отрицательных значениях переменной x — отрицательные значения.

Следовательно, при $a > 0$ график функции y состоит из двух ветвей, из которых одна, соответствующая положительным значениям переменной x, расположена в первой четверти, а другая, соответствующая отрицательным значениям переменной x, расположена в третьей четверти.

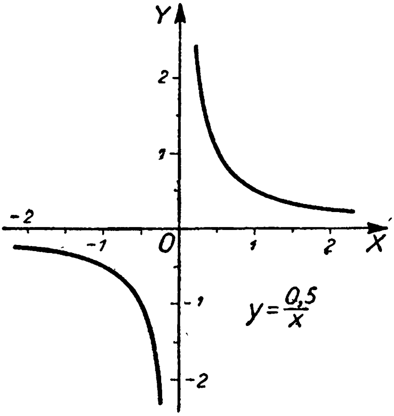
3) Так как

$$\frac{a}{(-x)} = -\frac{a}{x},$$

то значения функции y, соответствующие двум противоположным значениям переменной x, также являются противоположными числами; ввиду этого каждой точке M графика с положительными координатами x_0, y_0 соответствует точка M' графика с отрицательными координатами $-x_0$, $-y_0$, так что две ветви графика функции $y = \frac{a}{x}$, где $a > 0$, из которых он состоит, симметричны по отношению к началу координат O как центру симметрии.



Черт. 65



Черт. 66

Для примера построим графики функций

$$y = \frac{4}{x} \text{ (черт. 65) и } y = \frac{0,5}{x} \text{ (черт 66).}$$

4) Если переменная x, принимая положительные значения, возрастает, то функция y убывает. При этом точки графика функции y все больше (неограниченно) приближаются к оси OX и для достаточно больших значений переменной x становятся сколь угодно близкими к оси OX, или, как говорят, асимптотически приближаются к ней. Так, точки графика становятся ближе к оси OX чем на $\frac{1}{10}$ единицы масштаба с того момента, как значения переменной x, которым эти точки соответствуют, начинают удовлетворять неравенству

$$\frac{a}{x} < \frac{1}{10}, \text{ где } x > 0;$$

это будет выполняться при $x > 10a$.

Если переменная x будет принимать положительные значения, все больше (неограниченно) приближающиеся к нулю, например, такие:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

или такие:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots,$$

то функция y будет принимать все возрастающие значения:

$$2a,\ 4a,\ 8a,\ 16a, \ldots,\ 2^n a, \ldots$$

или

$$10a,\ 100a,\ 1000a, \ldots,\ 10^n a, \ldots .$$

При этом для достаточно малых положительных значений переменной x значения функции y становятся сколь угодно большими. Так, для того чтобы функция y приняла значение, превосходящее 10^6, достаточно, чтобы переменная x удовлетворяла неравенству

$$\frac{a}{x} > 10^6, \text{ где } x > 0;$$

это выполняется при $x < \frac{a}{10^6}$.

Вместе с тем, как бы положительное значение переменной x ни было близко к нулю, ему соответствует некоторая точка графика, находящаяся на этом именно расстоянии x от оси OY; поэтому, по мере того как переменная x, оставаясь положительной, будет приближаться к нулю, точки графика функции y будут все больше (неограниченно) приближаться к оси OY и для достаточно малых значений переменной x будут становиться сколь угодно близкими к оси OY, т. е. будут асимптотически приближаться к ней.

Определение. Прямая называется асимптотой бесконечной ветви кривой, если расстояние точки этой ветви от прямой неограниченно приближается к нулю, когда эта точка беспредельно удаляется по ветви.

Оси координат OX и OY служат асимптотами для ветви графика функции $y = \frac{a}{x}$, где $a > 0$, расположенной в первой четверти.

С помощью тех же рассуждений можно убедиться в том, что оси координат OX и OY служат асимптотами и для ветви графика той же функции, расположенной в третьей четверти. Впрочем, это следует уже из того, что ветвь графика, расположенная в третьей четверти, симметрична ветви графика, расположенной в первой четверти, относительно центра O. В самом деле, для построения ветви графика, расположенной в третьей четверти, достаточно ветвь графика, расположенную в первой четверти, вместе с положительными полуосями осей OX и OY повернуть около центра O на 180° до совпадения этих полуосей соответственно с отрицательными полуосями осей OX и OY; тогда ветвь графика, расположенная в первой четверти, совпадет с ветвью графика, расположенной в третьей четверти.

5) Из уравнения $y = \frac{a}{x}$ находим, что если $x = \sqrt{a}$, то и $y = \sqrt{a}$. Это значит, что на ветви графика, расположенной в первой четверти, имеется точка A, координаты которой равны. Точно так же, заметив, что если $x = -\sqrt{a}$, то и $y = -\sqrt{a}$, заключаем, что на ветви, расположенной в третьей четверти, имеется точка A', координаты которой равны. Но, как известно, если координаты какой-либо точки равны, то она принадлежит прямой $y = x$, делящей пополам первый и третий координатные углы. Поэтому точки $A(\sqrt{a}; \sqrt{a})$ и $A'(-\sqrt{a}; -\sqrt{a})$ графика функции $y = \frac{a}{x}$, где $a > 0$, принадлежат этой прямой; точки A и A' находятся на одном и том же расстоянии от центра, равном длине гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{a}$ и $\sqrt{a}$, т. е. числу $\sqrt{2a}$.

Прямая, делящая пополам первый и третий координатные углы, служит осью симметрии графика функции $y = \frac{a}{x}$, где $a > 0$. В самом деле, если этому графику принадлежит точка с координатами $x = m$, $y = n$, где $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то ему принадлежит также точка с координатами $x = n$, $y = m$, так как из равенства $m = \frac{a}{n}$ следует равенство $n = \frac{a}{m}$.

Пусть (черт. 67) координаты точек P и Q имеют следующие значения:

$$x = OR = m;\quad y = RP = n;\quad x = SQ = n,\quad y = OS = m.$$

Отсюда следует, что

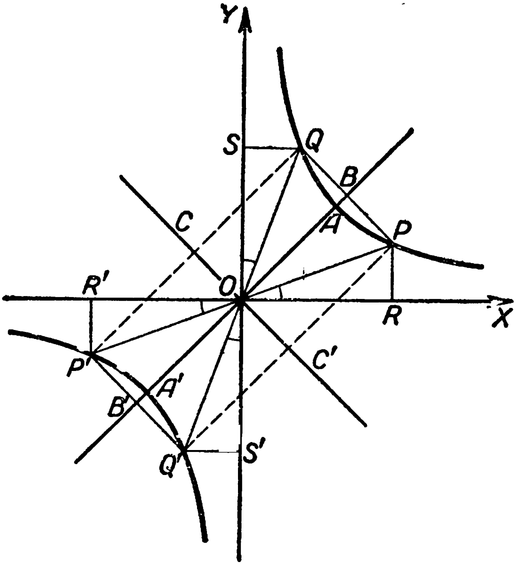
1) $OR = OS$; $RP = SQ$; $\triangle OSQ = \triangle ORP$; $OQ = OP$;
2) $\angle SOQ = \angle ROP$.

Если OB — биссектриса первого координатного угла, то, в силу равенства 2), имеет место также равенство $\angle QOB = \angle POB$, так что OB есть вместе с тем биссектриса угла QOP при вершине O равнобедренного треугольника QOP, так что $PQ \perp OB$ и $BP = BQ$, т. е. точки P и Q симметричны по отношению к биссектрисе OB первого координатного угла.

Точно так же можно доказать, что если координаты точек P' и Q' имеют значения:

$x = OR' = -m$, $y = R'P' = -n$; $x = S'Q' = -n$, $y = OS' = -m$, то точки P' и Q' симметричны по отношению к биссектрисе OB' третьего координатного угла.

Таким образом, прямая $B'B$, делящая пополам третий и первый координатные углы, служит осью симметрии графика функции $y = \frac{a}{x}$, где $a > 0$. При перегибании чертежа по прямой $B'B$ полуветвь AP совпадет с полуветвью AQ и полуветвь $A'Q'$ — с полуветвью $A'P'$.



Черт. 67

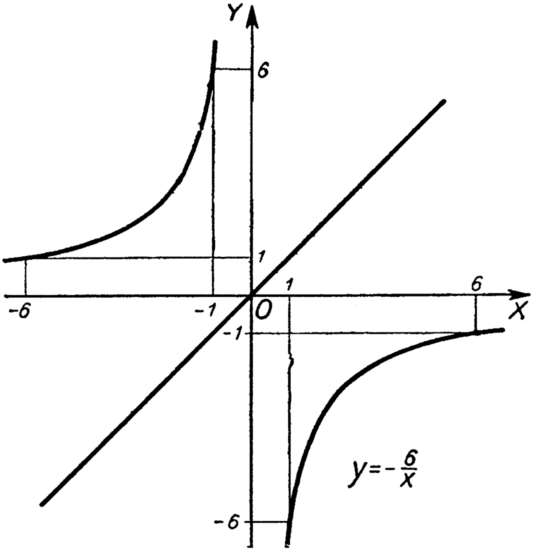
Наконец, обратим внимание на то, что график функции $y = \frac{a}{x}$ симметричен также по отношению к прямой $C'C$, проходящей через начало координат O и перпендикулярной к прямой $B'B$. Это следует из того, что при перегибании чертежа по прямой $C'C$ каждая точка P графика с координатами $(m; n)$ придет в совпадение с точкой Q' графика с координатами $(-m; -n)$, так как луч OC' служит биссектрисой равнобедренного треугольника $Q'OP$, а луч OC — биссектрисой равнобедренного треугольника $P'OQ$.

Итак, прямая $C'C$ также служит осью симметрии графика функции $y = \frac{a}{x}$, где $a > 0$.

3. График функции $y = \frac{a}{x}$ при $a < 0$. С помощью рассуждений, подобных тем, которые мы применили к исследованию хода изменения и графика функции $y=\frac{a}{x}$ при $a>0$, мы можем установить, что при $a<0$ эта функция обладает следующими свойствами:

1) Она имеет определенное числовое значение при всех действительных значениях независимой переменной x, отличных от нуля.

2) Так как при $a<0$ значения переменных x и y имеют различные знаки, то в этом случае график функции y состоит из двух ветвей, из которых одна, соответствующая положительным значениям переменной x, расположена в четвертой четверти, а другая, соответствующая отрицательным значениям переменной x, расположена во второй четверти (черт. 68).



Черт. 68

3) Эти ветви графика симметричны по отношению к началу координат O как центру симметрии.

4) Оси координат OX и OY служат асимптотами для каждой из ветвей графика функции $y=\frac{a}{x}$ при $a<0$.

5) Прямая, делящая пополам второй и четвертый координатные углы, и прямая, делящая пополам первый и третий координатные углы, служат осями симметрии графика функции $y=\frac{a}{x}$ при $a<0$.

Определение. Кривая, служащая графиком функции $y=\frac{a}{x}$, где $a \gtrless 0$, называется гиперболой.

Так как эта функция для значения 0 независимой переменной x не определена (не имеет числового значения, не существует), а, как говорят, в точке 0 претерпевает (испытывает) разрыв, то ее график состоит из двух отдельных ветвей, которые вместе (в совокупности) представляют собой геометрическое изображение функции $y=\frac{a}{x}\,(a \gtrless 0)$.

§ 8. ДРОБНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

1. ***Определение.*** Функция y, определяемая (задаваемая) равенством

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},$$

где $\frac{ax+b}{cx+d}$ есть дробь, числитель и знаменатель которой — двучлены первой степени (линейные) относительно независимой переменной x, называется дробной линейной функцией.

Очевидно, что если

1) $a=cm$ и $b=dm$, где $m \neq 0$ или 2) $c=0$, то дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ сводится: 1) к числу m или 2) к двучлену первой степени $\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что ни равенство 1), ни равенство 2) не имеют места.

2. **Частные случаи.** Сначала рассмотрим частные виды, которые может иметь дробная линейная функция.

1° Если $a=0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d=0$, то

$$y=\frac{b}{cx}.$$

Обозначая дробь $\frac{b}{c}$ через h, мы можем записать это равенство в виде

$$y=\frac{h}{x}.$$

Очевидно, в рассматриваемом случае дробная линейная функция представляет собой обратную пропорциональную зависимость. Ее графиком служит гипербола, асимптотами которой являются оси координат.

2° Если $a=0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$, то

$$y=\frac{b}{cx+d},$$

где $\frac{b}{cx+d}$ — правильная дробь.

Деля числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части, на c и обозначая дробь $\frac{b}{c}$ через h и дробь $\frac{d}{c}$ через k, мы можем записать это равенство в виде

$$y=\frac{h}{x+k}.$$

Пример 1. Если

$$y = \frac{3}{2x-4}, \tag{1}$$

то мы можем представить эту функцию с помощью равенства

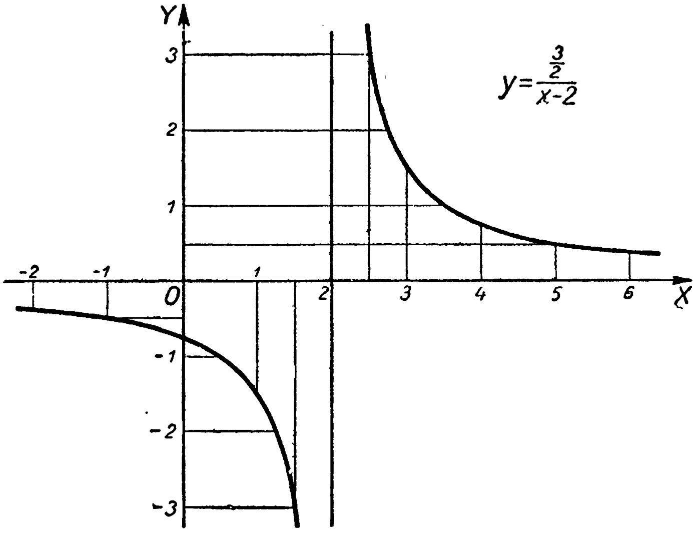
$$y = \frac{\frac{3}{2}}{x-2}, \tag{2}$$

Сравним эту функцию с функцией

$$y = \frac{\frac{3}{2}}{x}. \tag{3}$$

Очевидно, что функция (2) принимает все те и только те значения, что и функция (3), но то значение, которое функция (3) принимает при $x = x_0$, функция (2) принимает при $x = x_0 + 2$, т. е. все значения функции (2) как бы «запаздывают», отодвигаются вправо на 2 единицы масштаба, так что график функции (2) может быть получен простым смещением графика функции (3) вправо на 2 единицы масштаба (см. таблицу и черт. 69).

x	...	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	4	5	6	
$x-2$	...	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...
y	...	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{2}$	-3	$\mp\infty$	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	



Черт. 69

Функция (1) не определена и поэтому претерпевает разрыв при $x=2$. Ее графиком служит гипербола, асимптотами которой являются: 1) прямая, проходящая через точку (2; 0) и параллельная оси ординат OY, и 2) ось абсцисс OX (при смещении графика функции (3) на 2 единицы масштаба вправо на столько же единиц сместилась и его вертикальная асимптота).

Дробь $\frac{3}{2x-4}$ не обращается в 0 ни при каком значении переменной x, а при $x=0$ имеет значение $-\frac{3}{4}$, так что график функции (1) не пересекает оси OX, а от оси OY отсекает отрезок $-\frac{3}{4}$.

Решая неравенство $2x-4>0$, выражающее требование, чтобы дробь $\frac{3}{2x-4}$ имела положительное значение, находим, что это выполняется при $x>2$; этот вывод отчетливо виден на графике.

3°. Если $a \neq 0$ и $c \neq 0$, то

$$y=\frac{ax+b}{cx+d},$$

где $\frac{ax+b}{cx+d}$ — неправильная дробь. В этом случае для исследования дробной линейной функции и построения ее графика выполним следующие преобразования:

1) выделим из дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ целую часть:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}-\frac{\frac{ad}{c}-b}{cx+d};$$

2) разделим числитель и знаменатель получившейся (после выделения целой части) правильной дроби на коэффициент c при x в знаменателе:

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}-\frac{\frac{ad}{c^2}-\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}.$$

После этих преобразований случай 3° будет сведен к случаю 2°.

Пример 2. Если

(1) $$y=\frac{2x+3}{4x-1},$$

то, выполняя два указанных преобразования, получим:

(2) $$y=\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{2}}{(4x-1)}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{8}}{x-\frac{1}{4}}.$$

График функции

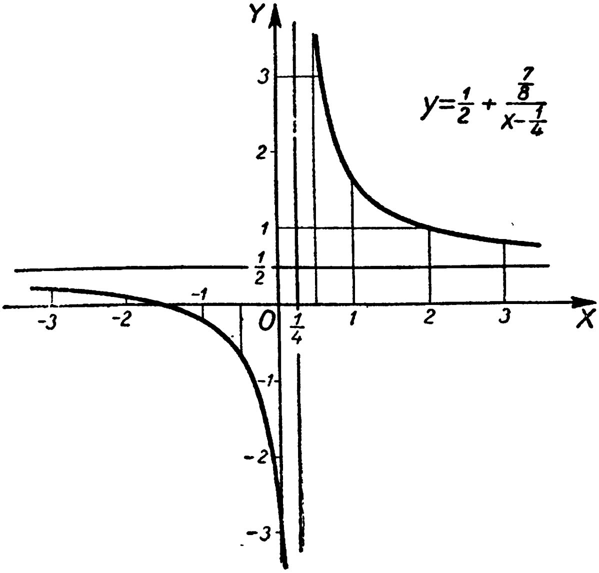
(3) $$y=\frac{\frac{7}{8}}{x-\frac{1}{4}}$$

может быть получен посредством смещения графика функции

$$y=\frac{\frac{7}{8}}{x}$$

на $\frac{1}{4}$ единицы масштаба вправо.

График же функции (2) может быть получен посредством смещения графика функции (3) вверх на $\frac{1}{2}$ единицы масштаба (черт. 70).



Черт. 70

Функция (1) имеет разрыв при $x=\frac{1}{4}$. Ее графиком служит гипербола, асимптотами которой являются: 1) прямая, проходящая через точку $\left(\frac{1}{4};\ 0\right)$ и параллельная оси OY, 2) прямая, проходящая через точку $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)$ и параллельная оси OX.

Дробь $\frac{2x+3}{4x-1}$ имеет значение 0 при $x=-\frac{3}{2}$, а при $x=0$ имеет значение —3, так что график функции (1) пересекает ось OX в точке $-\frac{3}{2}$ и отсекает от оси OY отрезок —3.

Решая неравенство

$$(2x+3)\ (4x-1)>0,$$

выражающее требование, чтобы дробь $\frac{2x+3}{4x-1}$ имела положительное значение, находим, что это выполняется при $x < -\frac{3}{2}$ и при $x > \frac{1}{4}$; этот вывод отчетливо виден на графике.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить гиперболу $y = \frac{2}{x}$, принимая за единицу масштаба 1 *см.*

2. Построить гиперболу $y = -\frac{35\,000}{x}$, принимая за единицу масштаба 0,1 *мм.*

3. Построить гиперболу $y = \frac{0{,}002}{x}$, принимая за единицу масштаба 1*м.*

4. Графически решить уравнения

1) $\frac{4{,}5}{x} = x - 2$; 2) $\frac{300}{x} = x + 25$.

За единицу масштаба принять 1 *см.*

5. Построить графики функций:

1) $y = \frac{3x+1}{x-4}$; 2) $y = \frac{x-2}{3x-1}$,

принимая за единицу масштаба 1 *см.*

6. Построить график функции $y = -\frac{300}{x-10}$, принимая за единицу масштаба 1*мм.*

§ 9. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Определение. Функция, определяемая (заданная) равенством

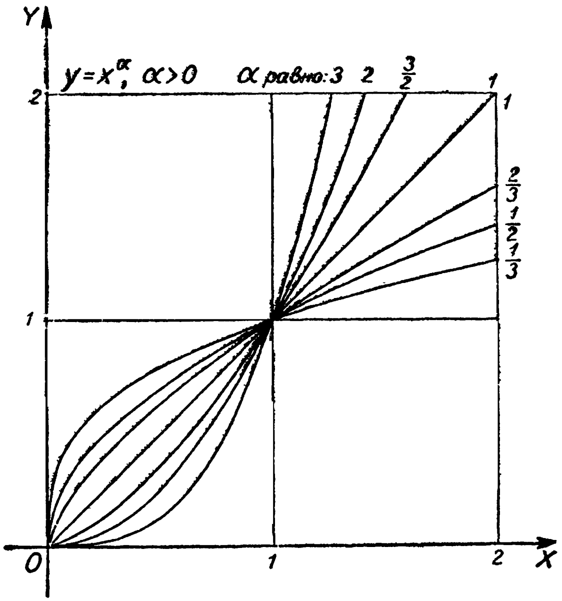
$$y = x^{\alpha},$$

где x — независимая переменная, а α — данное число, называется **степенной функцией.**

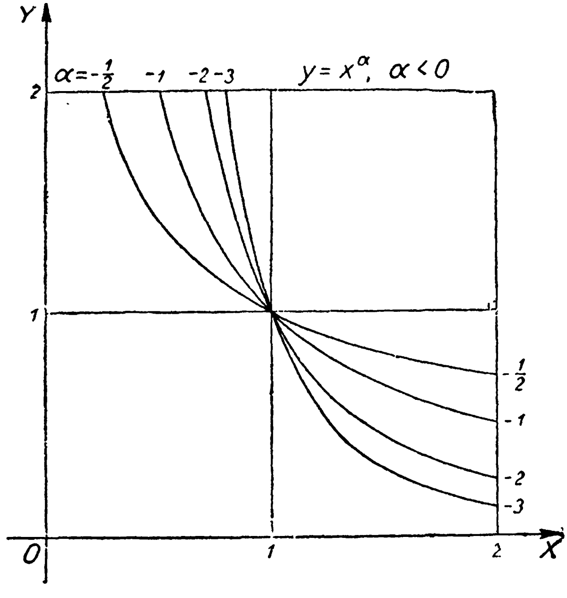
Очевидно, что каждая из рассмотренных нами функций 1) $y = x$, 2) $y = x^2$, 3) $y = x^3$, 4) $y = x^{-1}$, 5) $y = x^{-2}$, 6) $y = x^{\pm\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n}$ — положительное рациональное число, является видом степенной функции.

I. Если $\alpha > 0$, то степенная функция (черт. 71 а):

1) для всех положительных значений переменной x определена;
2) при $x = 0$ имеет значение 0, а при $x = 1$ — значение 1, так что ее график проходит через начало координат и через точку (1; 1);



Черт. 71 а.



Черт. 71 б.

3) в промежутке $(0 \ldots \infty)$ возрастает и притом неограниченно возрастает;

4) при $\alpha > 1$ в промежутке $(0 \ldots 1)$ имеет значения, меньшие, чем 1, а в промежутке $(1 \ldots \infty)$ — большие, чем 1, так что ее график в первом промежутке расположен под биссектрисой первого координатного угла, а во втором промежутке — над этой биссектрисой; при $0 < \alpha < 1$ имеет место обратная картина.

II. Если $\alpha < 0$, то степенная функция (черт. 71 б):

1) для всех положительных значений переменной x определена;

2) при $x = 0$ не определена, т. е. не имеет числового значения, а при $x = 1$ имеет значение 1, так что ее график не проходит через начало координат, но проходит через точку $(1; 1)$.

3) в промежутке $(0 \ldots \infty)$ убывает и притом неограниченно убывает, т. е. стремится к нулю, так что ось OX служит для ее графика асимптотой;

4) при неограниченном приближении переменной x к нулю неограниченно возрастает, причем ее график асимптотически приближается к оси OY, так что и ось OY служит для этого графика асимптотой.

ГЛАВА V

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ

Определение. Уравнение вида

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где a, b, c, d, e, f — данные числа, а x и y — неизвестные, называется уравнением второй степени с двумя неизвестными x и y.

Это уравнение носит такое название потому, что оно содержит члены ax^2, bxy, cy^2, имеющие по отношению к неизвестным x и y второе измерение.

Некоторые из коэффициентов a, b, c, d, e, f могут быть равны нулю, но один, по крайней мере, из коэффициентов a, b, c членов, имеющих по отношению к неизвестным x и y второе измерение, должен быть отличным от нуля.

Примеры. Уравнения:

1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 13 = 0$;
2) $3uv - 5u - 2 = 0$;
3) $y^2 + 6yz - 5z = 0$;
4) $2s^2 - 3st + 5t^2 = 0$

— являются уравнениями второй степени с двумя неизвестными.

Каждое уравнение с двумя неизвестными, которое может быть решено по отношению к одной из этих неизвестных, имеет бесконечное множество решений. Например, решив уравнение

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$$

по отношению к неизвестной y, мы получим:

$$y = -1 \mp \sqrt{3 - 2x - x^2}.$$

Каждому значению неизвестной x, при котором имеет место соотношение

$$3 - 2x - x^2 \geqslant 0,$$

соответствуют два значения неизвестной y. Например,

$$\begin{aligned}
&\text{если } x = -3, \text{ то } y_{1,2} = -1;\\
&\text{если } x = -2, \text{ то } y_{1,2} = -1 \mp \sqrt{3};\\
&\text{если } x = -1, \text{ то } y_{1,2} = -1 \mp 2;\\
&\text{если } x = 0, \text{ то } y_{1,2} = -1 \mp \sqrt{3},\\
&\text{если } x = 1, \text{ то } y_{1,2} = -1.
\end{aligned}$$

§ 2. СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

В курсе алгебры VII класса мы решали системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Для этого мы применяли два способа: 1) способ подстановки и 2) способ сложения уравнений. Эти же способы служат для решения системы двух уравнений (с двумя неизвестными), из которых одно или оба — уравнения второй степени.

1°. Способ подстановки основан на следующей теореме.

Теорема 1. Если данная система состоит из уравнений

$$(1) \qquad \begin{cases} y = f(x), \\ g(x,y) = 0, \end{cases}$$

из которых первое выражает неизвестную y в зависимости от неизвестной x, то, для того чтобы получить систему уравнений, равносильную данной, достаточно первое уравнение повторить, а второе заменить уравнением $g[x,f(x)] = 0$, получающимся из заменяемого уравнения посредством подстановки в него вместо неизвестной y выражения $f(x)$, так что система (1) равносильна системе

$$(2) \qquad \begin{cases} y = f(x), \\ g[x,f(x)] = 0. \end{cases}$$

Доказательство. 1) Допустим, что система (1) имеет решение (a,b), т. е. что выполняются равенства $b=f(a)$ и $g(a,b)=0$. Заменяя во втором равенстве число b равным ему, в силу первого равенства, числом $f(a)$, мы получим равенство $g[a,f(a)]=0$, указывающее, что число a удовлетворяет второму уравнению системы (2). Принимая во внимание, что первое уравнение системы (2) совпадает с первым уравнением системы (1), заключаем, что система (2) также имеет решение (a,b).

2) Теперь допустим, что система (2) имеет решение (a',b'), т. е. что верны равенства $b'=f(a')$ и $g[a',f(a')]=0$. Заменяя во втором равенстве число $f(a')$ равным ему, в силу первого равенства, числом b', мы получим равенство $g(a',b')=0$, указывающее, что (a',b') есть решение второго уравнения системы (1). Принимая во внимание, что первое уравнение системы (1) совпадает с первым уравнением системы (2), заключаем, что система (1) также имеет решение (a',b'). Теорема доказана.

Примечание. Само собой разумеется, что если бы первое уравнение имело вид $x=f(y)$, то мы точно так же доказали бы, что система

$$\begin{cases} x = f(y), \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

равносильна системе

$$\begin{cases} x = f(y), \\ g[f(y), y] = 0. \end{cases}$$

Пример 1. Система

$$(1) \qquad \begin{cases} y = x + 1, \\ 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0 \end{cases}$$

равносильна системе

$$(2) \qquad \begin{cases} y = x + 1, \\ 2x^2 - x(x+1) + 3(x+1)^2 - 7x - 12(x+1) + 1 = 0, \end{cases}$$

которая после приведения второго уравнения к нормальному виду сводится к системе

$$(3) \qquad \begin{cases} y = x + 1, \\ 2x^2 - 7x - 4 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы (3) имеет корни $-\frac{1}{2}$ и 4, в силу чего данная система имеет решения: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и $(4; 5)$.

Пример 2.
Система

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x + 5y = 20, \\ 2x^2 + 10xy + 17y^2 = 218 \end{cases}$$

равносильна системе

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{20 - 5y}{2}, \\ 2x^2 + 10xy + 17y^2 = 218, \end{cases}$$

а система (2) — системе

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{20 - 5y}{2}, \\ 2\left(\dfrac{20 - 5y}{2}\right)^2 + 10\left(\dfrac{20 - 5y}{2}\right)y + 17y^2 = 218, \end{cases}$$

которая после приведения второго уравнения к нормальному виду сводится к системе

$$(4) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{20 - 5y}{2}, \\ y^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Система (4) и, следовательно, данная система (1) имеют решения: (15;—2) и (5; 2).

2°. При решении системы двух уравнений первой степени способом сложения мы заменяли одно из уравнений системы новым уравнением, которое мы выводили посредством: 1) умножения обеих частей первого уравнения системы на некоторое число m, а обеих частей второго — на некоторое число n и 2) почленного сложения полученных уравнений. Этот прием может быть употреблен и при решении системы двух уравнений любой степени.

Определение. Если обе части одного из двух уравнений

$$(1) \qquad f(x,y)=0 \text{ и } g(x,y)=0$$

с двумя неизвестными x и y мы умножим на некоторое число m, а обе части второго — на некоторое число n и полученные уравнения почленно сложим, то уравнение

$$(2) \qquad mf(x,y)+ng(x,y)=0,$$

которое мы этим путем выведем, называется выводным уравнением или линейным сочетанием уравнений данной системы.

Способ сложения, употребляемый для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, основан на следующей теореме.

Теорема 2. Если из данной системы

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

двух уравнений с двумя неизвестными мы составим новую систему уравнений следующим образом: одно из уравнений данной системы повторим, а другое заменим выводным уравнением, составленным из уравнений данной системы, то при условии $n \neq 0$ новая система

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x,y)=0, \\ mf(x,y)+ng(x,y)=0 \end{cases}$$

будет равносильна данной.

Обратим внимание на то, что из двух множителей m и n, с помощью которых мы составляем выводное уравнение, отличным от нуля должен быть именно тот (в данном случае n), на который мы умножили обе части замененного уравнения $g(x,y)=0$; при условии же $n=0$ уравнение $g(x,y)=0$ исчезло бы из системы (2) и о равносильности систем (1) и (2) не могло бы быть и речи.

Доказательство.

1) Допустим, что система (1) имеет решение (a,b), т. е. что выполняются равенства $f(a,b)=0$ и $g(a,b)=0$. Очевидно, что в силу этих равенств верно также равенство $mf(a,b)+ng(a,b)=0$. Таким образом, решение (a,b) системы (1) оказывается вместе с тем и решением системы (2).

2) Теперь допустим, что система (2) имеет решение (a',b'), т. е. что верны равенства $f(a',b')=0$ и $mf(a',b')+ng(a',b')=0$.

Заменяя во втором равенстве число $f(a',b')$ нулем, мы найдем, что верно равенство $ng(a',b')=0$, которое в силу условия $n\neq 0$ влечет за собой равенство $g(a',b')=0$. Таким образом, при условии $n\neq 0$ решение (a',b') системы (2) оказывается вместе с тем решением системы (1). Теорема доказана.

Пример 3. Система уравнений

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{r|c|r} 6x^2+xy-y^2-3x-4y-15=0, & 1 & 1 \\ -3x^2+4xy-y^2+15x-7y-18=0 & 2 & -1 \end{array}\right.$$

равносильна каждой из систем:

$$(2)\qquad \begin{cases} 6x^2+xy-y^2-3x-4y-15=0, \\ 9xy-3y^2+27x-18y-51=0; \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} 6x^2+xy-y^2-3x-4y-15=0, \\ 9x^2-3xy-18x+3y+3=0, \end{cases}$$

которые состоят из одного уравнения данной системы и из выводного уравнения, полученного из уравнений данной системы путем умножения обеих частей каждого из них соответственно на множители, помещенные в столбиках справа от уравнений данной системы.

Система (2) имеет то преимущество перед системой (1), что в ее второе уравнение неизвестная x входит линейно (т е. в первой степени), а система (3) — то, что в ее второе уравнение неизвестная y входит линейно. Мы достигли этого, исключив в первый раз члены, содержащие x^2, а во второй раз — члены, содержащие y^2.

Теперь из системы (3) мы можем получить равносильную ей, но еще более простую систему, исключив члены, содержащие xy.

Для этого, предварительно разделив второе уравнение системы (3) на число 3, почленно сложим его с первым уравнением этой системы. Мы получим систему

$$(4)\qquad \begin{cases} 3x^2-xy-6x+y+1=0, \\ 9x^2-y^2-9x-3y-14=0. \end{cases}$$

Решение системы (4) может быть выполнено следующим путем:

1) Заметив, что в первое уравнение системы (4) неизвестная y входит линейно, представим его в виде:

$$(x-1)y=3x^2-6x+1.$$

2) Разделив обе части этого уравнения на $x-1$, мы получим уравнение

$$y=\frac{3x^2-6x+1}{x-1},$$

ему равносильное, так как значению 1 неизвестной x не соответствует никакого значения неизвестной y. Поэтому система (4) может быть заменена равносильной ей системой

$$(5)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{x - 1}, \\ 9x^2 - y^2 - 9x - 3y - 14 = 0. \end{cases}$$

В силу теоремы 1 система (5) равносильна системе

$$(6)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{x - 1}, \\ 9x^2 - 9x - 14 - \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{x - 1}\left(\dfrac{3x^2 - 6x + 1}{x - 1} + 3\right) = 0; \end{cases}$$

после надлежащих упрощений второе уравнение этой системы приводим сначала к виду:

$$(9x^2 - 9x - 14)(x^2 - 2x + 1) - (3x^2 - 6x + 1)(3x^2 - 3x - 2) = 0,$$

а затем к виду:

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Отсюда находим:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Из первого уравнения системы (6) получаем:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 5.$$

Итак, данная система (1) имеет 2 решения: (2; 1) и (3; 5).

§ 3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩАЯ ОДНО УРАВНЕНИЕ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ И ОДНО УРАВНЕНИЕ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

В случае, если система состоит из одного уравнения второй степени и одного уравнения первой степени, то для решения этой системы вообще применяют способ подстановки: 1) из уравнения первой степени одну из неизвестных определяют в зависимости от другой и найденное для этой неизвестной выражение подставляют вместо нее в данное уравнение второй степени; 2) в результате подстановки получают уравнение с одной неизвестной, которое решают; 3) пользуясь уравнением, служившим для подстановки, по найденным значениям одной неизвестной находят соответствующие им значения другой неизвестной.

Пример 4. Решить систему уравнений:

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2 - 4y^2 + x + 3y = 1, \\ 2x - y = 1. \end{cases}$$

Решение. Так как второе уравнение системы (1) равносильно уравнению $y = 2x - 1$, то, согласно теореме 1, система (1) равносильна системе

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2 - 4(2x-1)^2 + x + 3(2x-1) - 1 = 0, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$$

Приведя первое уравнение системы (2) к виду

$$15x^2 - 23x + 8 = 0,$$

находим, что $x_1 = \frac{8}{15}$, $x_2 = 1$, после чего из второго уравнения этой системы получаем, что $y_1 = \frac{1}{15}$, $y_2 = 1$.

Пример 5. Решить систему уравнений:

$$(3)\qquad \begin{cases} b^2x + 3a^2y = 4xy, \\ x - y = a^2 - b^2. \end{cases}$$

Решение. Система (3) равносильна системе:

$$(4)\qquad \begin{cases} b^2(y + a^2 - b^2) + 3a^2y = 4(y + a^2 - b^2)y, \\ x = y + (a^2 - b^2). \end{cases}$$

После упрощений первое уравнение системы (4) принимает вид:

$$4y^2 + (a^2 - 5b^2)y - b^2(a^2 - b^2) = 0.$$

Отсюда находим, что

$$y_{1,2} = \frac{-(a^2 - 5b^2) \mp (a^2 + 3b^2)}{8},$$

т. е. что

$$y_1 = -\frac{a^2 - b^2}{4}, \qquad y_2 = b^2.$$

Из второго уравнения системы (4) получаем, что

$$x_1 = \frac{3(a^2 - b^2)}{4}, \quad x_2 = a^2.$$

Итак, система (3) имеет 2 решения:

$$1)\ \left[\frac{3(a^2 - b^2)}{4}, -\frac{a^2 - b^2}{4}\right],\quad 2)\ [a^2, b^2].$$

§ 4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩАЯ ДВА УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

С такой системой мы имели дело в примере 3. Для решения данной в этом примере системы (1) мы, применяя способ сложения (теорема 2), сперва заменили систему (1) равносильной ей системой (3), второе уравнение которой не содержало члена y^2, а затем — систему (3), равносильной ей системой (4), второе уравнение которой не содержало члена xy. Уже второе уравнение системы (3) содержит неизвестную y линейно, т. е. в первой степени, так что позволяет выразить эту неизвестную в зависимости от неизвестной x, но первое уравнение системы (3) имеет 3 члена, содержащие неизвестную y, вместо которой пришлось бы подставлять найденное для нее выражение; поэтому была выполнена замена системы (3) системой (4), второе уравнение которой оказалось имеющим только два члена, содержащие неизвестную y.

После этого система (4) была решена по тому же плану, по которому решаются системы, содержащие одно уравнение второй степени и одно — первой степени.

Приведем еще примеры.

Пример 6. Решить систему уравнений:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ x^2+3y^2-xy-4y=-1. \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} -1 \\ \;\;1 \end{array}\right.$$

Решение. С помощью уравнивающих множителей — 1 и 1 заменяем систему (1) системой:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^2-4y^2-xy+5y=1, \\ \qquad 7y^2-9y=-2. \end{array}\right.$$

Из второго уравнения этой системы находим, что

$$y_1=\frac{2}{7},\ y_2=1.$$

Подставляя эти значения вместо неизвестной y в первое уравнение системы (2), мы получаем уравнение

$$49x^2-14x+5=0,$$

не имеющее действительных корней, и уравнение

$$x^2-x=0,$$

имеющее корни 0 и 1.

Таким образом, система (1) имеет 2 решения: (0; 1) и (1; 1).

Пример 7. Решить систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-y^2-ax+ay=0, \\ xy=a^2. \end{array}\right.$$

Решение. Заметив, что первое уравнение может быть представлено в виде:

$$(x-y)(x+y-a)=0,$$

заменяем данную систему уравнений совокупностью двух систем:

$$\left\{\begin{array}{l} x-y=0, \\ xy=a^2 \end{array}\right. \qquad \text{и} \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y-a=0, \\ xy=a^2. \end{array}\right.$$

Решаем первую систему:

$$x=y;\qquad y^2=a^2;\qquad y_{1,2}=\mp a;\qquad x_{1,2}=\mp a.$$

Решаем вторую систему:

$$x = a - y; \qquad ay - y^2 = a^2; \qquad y^2 - ay + a^2 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{a \mp \sqrt{-3a^2}}{2}.$$

При $a \neq 0$ уравнение корней не имеет.

При $a = 0$ получаем: $y_{3,4} = 0$, $x_{3,4} = 0$.

§ 5. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, РЕШАЕМЫЕ ОСОБЫМИ ПРИЕМАМИ

В тех случаях, когда неизвестные входят в уравнения данной системы только в каких-либо из следующих видов: в виде суммы или разности одинаковых степеней, в виде произведения или в виде отношения, — система уравнений второй (и более высокой) степени весьма удобно решается способом вспомогательных неизвестных. Этот способ состоит в том, что мы принимаем за неизвестные какие-либо два из следующих выражений: сумму, разность, произведение или отношение неизвестных, входящих в систему, и этим путем сводим данную систему к одной из так называемых элементарных систем.

1. Элементарные системы.

(1) $x + y = a$, $x - y = b$. Решается путем почленного сложения или вычитания уравнений.

(2) $x + y = a$, $xy = c$. Для решения этой системы достаточно решить квадратное уравнение

$$z^2 - az + c = 0,$$

у которого коэффициент при неизвестной во второй степени есть 1, коэффициент при неизвестной в первой степени есть сумма a искомых чисел x и y, взятая с обратным знаком, а свободный член есть произведение c искомых чисел x и y. В самом деле, корни z_1 и z_2 составленного уравнения связаны с коэффициентами этого уравнения равенствами:

$$z_1 + z_2 = a, \quad z_1 z_2 = c,$$

в силу чего можно положить:

$$x_1 = z_1, \ y_1 = z_2 \text{ или } x_2 = z_2, \ y_2 = z_1.$$

(3) $x - y = b$, $xy = c$. Эта система может быть представлена в виде: $x + (-y) = b$, $x(-y) = -c$, т. е. сведена к системе (2); впрочем, она просто решается способом подстановки.

(4) $x \pm y = a$, $\frac{x}{y} = r$. Решается способом подстановки.

(5) $xy = c$, $\frac{x}{y} = r$. Решается способом подстановки.

Применение рассматриваемого способа вспомогательных неизвестных основано на том, что сумма или разность одинаковых степеней всегда может быть выражена в зависимости от суммы, разности или произведения оснований. Это вытекает из следующих тождеств:

1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$; $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$;
2) $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$;
3) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)[(x+y)^2-3xy]$

(так как первый сомножитель — сумма, то неполный квадрат разности выражен через сумму);

4) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=(x-y)[(x-y)^2+3xy]$

(так как первый сомножитель — разность, то неполный квадрат суммы выражен через разность);

5) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$; дальше преобразуем по формуле 1).

Обозначив сумму $x+y$, разность $x-y$ и произведение xy соответственно буквами u, v, t, мы получим следующие формулы перехода к новым неизвестным:

1) $x^2+y^2=u^2-2t$; $x^2+y^2=v^2+2t$;
2) $x^2-y^2=uv$;
3) $x^3+y^3=u(u^2-3t)$;
4) $x^3-y^3=v(v^2+3t)$;
5) $x^4+y^4=(u^2-2t)^2-2t^2$; $x^4+y^4=(v^2+2t)^2-2t^2$.

Замечание. Обратим внимание на то, что сумму вторых, четвертых, вообще четных степеней мы можем, по желанию, выразить через u и t или через v и t, но в случае первых, третьих, вообще нечетных степеней мы вынуждены выражать сумму только через u и t, а разность — только через v и t, иначе мы вместо двух новых неизвестных введем три.

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=6, \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440. \end{cases}$$

Решение. Преобразовывая множители левой части второго уравнения соответственно по формулам 1) и 3) и принимая во внимание первое уравнение, получаем уравнение

$$(6^2-2t)\cdot 6\cdot(6^2-3t)=1440,$$

которое после преобразований приводится к квадратному уравнению, имеющему корни: $t_1=22$, $t_2=8$.

Поэтому данная система сводится к следующим двум элементарным системам:

(1) $x+y=6$, $xy=22$;
(2) $x+y=6$, $xy=8$.

Решениями данной системы будут как все решения системы (1), так и все решения системы (2).

Указание. Мы выразили сумму квадратов и сумму кубов через сумму, а не через разность неизвестных, потому что дана сумма. Если бы была дана разность, то сумму квадратов можно было бы выразить через v и t, а сумму кубов нельзя было бы выразить через эти неизвестные; способ был бы неприменим.

Пример 2. Рещить систему:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 2, \\ x^3 - y^3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Преобразовывая левые части уравнений по формулам 1) и 4), приводим систему к виду:

$$\begin{cases} v^2 + t = 2, \\ v(v^2 + 3t) = 4. \end{cases}$$

Эту систему удобно решить способом подстановки:

$$t = 2 - v^2;\ v(6 - 2v^2) = 4;\ v^3 - 3v + 2 = 0.$$

Разлагая левую часть последнего уравнения на множители:

$$v^3 - 3v + 2 = v^3 - v - 2v + 2 = (v - 1)(v^2 + v - 2),$$

приходим к уравнению

$$(v - 1)\ (v^2 + v - 2) = 0,$$

имеющему корни:

$$v_1 = 1,\ v_2 = 1,\ v_3 = -2.$$

Из равенства $t = 2 - v^2$ находим:

$$t_1 = 1,\ t_2 = 1,\ t_3 = -2.$$

Следовательно, данная система сводится к следующим трем элементарным системам:

$$(1 \text{ и } 2) \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = 1; \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} x - y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Система (1) имеет решения:

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ y_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2};\ x_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ y_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2};$$

система (3) не имеет решений.

Указание. Мы выразили сумму квадратов через v и t, так как разность кубов может быть выражена только через эти неизвестные.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 11, \\ yz = 2, \\ x + y + z = 7. \end{cases}$$

Решение. Полагая $y + z = u$ и принимая во внимание второе уравнение, представляем первое и третье уравнения соответственно в виде:

$$x^2 - (u^2 - 4) = 11,\ x + u = 7.$$

После преобразований получаем элементарную систему (1):

$$\begin{cases} x + u = 7, \\ x - u = 1; \end{cases}$$

она имеет решение:

$$x=4, \ u=3.$$

Для нахождения неизвестных y и z остается решить систему

$$\begin{cases} y + z = 3, \\ yz = 2. \end{cases}$$

Окончательно находим 2 решения:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4; & x_2 &= 4; \\ y_1 &= 2; & y_2 &= 1; \\ z_1 &= 1; & z_2 &= 2. \end{aligned}$$

Указание. Мы обозначили через u сумму $y+z$ (а не $x+y$ и не $x+z$) потому, что именно неизвестные y и z входят во все три данные уравнения симметрично: в самом деле, выражения

$$x^2-(y^2+z^2), \ yz, \ x+y+z$$

симметричны по отношению к буквам y и z (но не симметричны по отношению к буквам x и y и к буквам x и z) и, следовательно, могут быть выражены через сумму $y+z$ и произведение yz этих букв.

Пример 4. Решить систему уравнений:

$$(1) \qquad \begin{cases} 4x^2+ 2xy + 6x - 27 = 0, \\ x^2-5xy+6y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Эта система имеет ту особенность, что одно из ее уравнений — именно второе — является однородным уравнением, так как левая часть его есть однородный многочлен (второго измерения), а правая — нуль. Этой особенностью мы воспользуемся следующим образом: разделив все члены однородного уравнения на одну из неизвестных в степени, равной измерению однородного многочлена, например, на y^2, мы получим уравнение

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 6 = 0;$$

при этом мы потеряем его решение (0; 0); но так как это решение не удовлетворяет первому уравнению системы (1), то система

$$(2) \qquad \begin{cases} 4x^2 + 2xy + 6x - 27 = 0, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 6 = 0 \end{cases}$$

равносильна системе (1).

Обозначив отношение $\frac{x}{y}$ через r, получим уравнение

$$r^2 - 5r + 6 = 0,$$

имеющее корни $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Поэтому система (2) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 4x^2+2xy+6x-27=0, \\ \dfrac{x}{y}=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2+2xy+6x-27=0, \\ \dfrac{x}{y}=3. \end{cases}$$

Решая каждую из них способом подстановки, найдем 4 решения данной системы:

$$x_1=-3,\ x_2=1{,}8,\ x_3=-\frac{9(1+\sqrt{15})}{14},\ x_4=-\frac{9(1-\sqrt{15})}{14},$$

$$y_1=-\frac{3}{2};\ y_2=0{,}9;\ y_3=-\frac{3(1+\sqrt{15})}{14};\ y_4=-\frac{3(1-\sqrt{15})}{14}.$$

Пример 5. Решить систему уравнений:

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2-y^2=15, \\ x^2+3xy-8y^2=20. \end{cases}$$

Решение. Эта система имеет ту особенность, что левые части ее уравнений представляют собой однородные многочлены одного и того же измерения, ввиду чего из этих уравнений можно составить однородное уравнение. Для этого достаточно, заметив, что наименьшим общим кратным свободных членов служит число 3 · 4 · 5, умножить обе части первого уравнения на 4, а второго — на (—3) и полученные уравнения почленно сложить; этим путем мы найдем однородное уравнение

$$4(x^2-y^2)-3(x^2+3xy-8y^2)=0.$$

Оно является выводным уравнением, составленным из уравнений данной системы при помощи множителей 4 и (—3), отличных от нуля, и поэтому может заменить собой каждое из уравнений данной системы.

Решив это однородное уравнение по способу, указанному в примере 4, найдем, что

$$(1)\ \frac{x}{y}=4 \text{ и } (2)\ \frac{x}{y}=5.$$

Поэтому данная система (1) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2-y^2=15, \\ \dfrac{x}{y}=4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-y^2=15, \\ \dfrac{x}{y}=5. \end{cases}$$

Применив для решения каждой из этих систем способ подстановки, придем к выводу, что данная система имеет следующие 4 решения:

$$x_1=-4,\ x_2=4,\ x_3=-\frac{5}{4}\sqrt{10},\ x_4=\frac{5}{4}\sqrt{10},$$

$$y_1=-1;\ y_2=1;\ y_3=-\frac{1}{4}\sqrt{10};\ y_4=\frac{1}{4}\sqrt{10}.$$

Пример 6. Решить систему уравнений:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{6x^2-3y^2}{x^2+2xy}=1, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$$

Решение. Эта система уравнений имеет ту особенность, что левая часть одного из уравнений — именно первого — есть дробь нулевого измерения, т. е. дробь, числитель и знаменатель которой представляют собой однородные многочлены одного и того же измерения по отношению к неизвестным.

Ввиду этого, освободив первое уравнение данной системы от дробных членов, мы придем к однородному уравнению

$$6x^2-3y^2=x^2+2xy,$$

т. е. к уравнению

$$5x^2-2xy-3y^2=0.$$

При этом мы приобретем решение (0; 0), но решение (0; 0) не удовлетворяет второму уравнению системы (1), так что система

$$(2)\qquad \begin{cases} 5x^2-2xy-3y^2=0, \\ x^2+y^2=34 \end{cases}$$

равносильна системе (1).

Так как первое уравнение системы (2) — однородное, то, поступая так, как при решении примера 5, найдем, что система (2) равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-\dfrac{3}{5}, \\ x^2+y^2=34; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{y}=1, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$$

Решая эти системы способом подстановки, найдем, что данная система уравнений имеет следующие 4 решения:

$$x_1=-3,\quad x_2=3,\quad x_3=-\sqrt{17},\quad x_4=\sqrt{17},$$
$$y_1=5;\quad y_2=-5;\quad y_3=-\sqrt{17};\quad y_4=\sqrt{17}.$$

Указание. Из приведенных решений систем 5 и 6 двух уравнений с двумя неизвестными можно заключить, что: 1) в случае, если левые части обоих уравнений системы — однородные многочлены одного и того же измерения, а правыми частями их служат свободные члены, и 2) в случае, если левая часть одного из уравнений системы — дробь нулевого измерения, а правой частью его служит свободный член, — решение этой системы сводится к решению системы, одно из уравнений которой — однородное (пример 4).

Пример 7. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=7xy, \\ x-y=3xy. \end{cases}$$

Решение. При помощи множителей 3 и 7 составляем выводное уравнение

$$3(x+y)=7(x-y),$$

т. е. уравнение

$$2x=5y.$$

Присоединив к этому уравнению одно из данных уравнений и применив способ подстановки, найдем, что данная система имеет 2 решения:

$$x_1=0, \qquad x_2=\frac{1}{2},$$

$$y_1=0; \qquad y_2=\frac{1}{5}.$$

Пример 8. Решить систему уравнений:

$$(1) \qquad \begin{cases} 6(x+y)=5xy, \\ 2x+3y=12. \end{cases}$$

Решение. Заметив, что выражения $x+y$ и $2x+3y$ суть однородные многочлены 1-го измерения, а выражение xy — одночлен 2-го измерения, почленно перемножим уравнения данной системы; мы получим однородное уравнение

$$6(x+y)(2x+3y)=60xy,$$

которое вместе со вторым уравнением данной системы составит систему:

$$(2) \qquad \begin{cases} 6(x+y)(2x+3y)=60xy, \\ 2x+3y=12, \end{cases}$$

равносильную системе (1), так как не только каждое решение системы (1) есть вместе с тем решение системы (2), но и, обратно, каждое решение системы (2) есть вместе с тем ($12\neq 0$) решение системы (1).

Решая систему (2) (см. пример 4), найдем, что она и, следовательно, данная система имеет решения:

$$x_1=2{,}4, \qquad x_2=3,$$
$$y_1=2{,}4; \qquad y_2=2.$$

Пример 9. Решить систему уравнений:

$$(1) \qquad ax=by=cz=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Решение. Представив систему в виде

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=a, \quad \frac{1}{y}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=b, \frac{1}{z}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=c,$$

составляем при помощи отличных от нуля множителей 1, 1, 1 выводное уравнение

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2=a+b+c.$$

При условии $a+b+c\geqslant 0$ это уравнение распадается на уравнения

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\sqrt{a+b+c},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\sqrt{a+b+c}.$$

Следовательно, данная система (1) равносильна совокупности двух систем:

$$ax=by=cz=\sqrt{a+b+c}, \qquad ax=by=cz=-\sqrt{a+b+c}.$$

Отсюда

$$x_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{a},\ y_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{b},\ z_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{c}.$$

Пример 10. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{3a^2}{4x}+\dfrac{b^2}{4y}=1,\\ x-y=a^2-b^2.\end{cases}$$

Решение. Представив систему в виде

$$(1)\qquad \begin{cases}3a^2y+b^2x=4xy,\\ x-y\ \ =a^2-b^2\end{cases}$$

и заметив, что левые части обоих уравнений — однородные многочлены первого измерения, а правые части их соответственно имеют второе и нулевое измерение, рассматриваем 2 случая:

1) Если $a^2-b^2\neq 0$, то систему (1) можно заменить равносильной ей системой:

$$(2)\qquad \begin{cases}(3a^2y+b^2x)(x-y)=4(a^2-b^2)xy,\\ x-y=a^2-b^2,\end{cases}$$

первое уравнение которой, полученное путем почленного умножения уравнений данной системы (ср. пример 8), есть однородное уравнение.

Решив это уравнение относительно неизвестной $\frac{x}{y}$, найдем, что

$$\frac{x}{y}=-3,\ \frac{x}{y}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Комбинируя эти уравнения со вторым уравнением данной системы, придем к выводу, что при условии $a^2 - b^2 \neq 0$ данная система имеет 2 решения:

$$x_1 = \frac{3(a^2-b^2)}{4}, \quad x_2 = a^2,$$

$$y_1 = -\frac{a^2-b^2}{4}; \quad y_2 = b^2.$$

2) Если $a^2 - b^2 = 0$, то $x = y$ и первое уравнение данной системы принимает вид: $\frac{a^2}{x} = 1$, откуда находим, что

$$x = y = a^2 = b^2, \text{ где } a \neq 0,\ b \neq 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=a+\frac{b^2}{a}, \\ xy=\frac{b^4}{a^2}. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=37, \\ 2x^2+2xy+y^2=26. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=5-xy, \\ x+y=\frac{6}{xy}. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5}{2}xy, \\ x-y=\frac{1}{4}xy. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=xy, \\ x+y=x^2-y^2. \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2-4y^2=9, \\ xy+2y^2=18. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 15(x+y)=8xy, \\ x+y+x^2+y^2=42. \end{cases}$

9) $\begin{cases} x+y=35, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{c}, \\ \frac{1}{a-x}+\frac{1}{a-y}=\frac{2}{a-b}. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^{\frac{3}{4}}+y^{\frac{3}{5}}=35, \\ x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{5}}=5. \end{cases}$

2. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=19, \\ x^4+x^2y^2+y^4=931. \end{cases}$

Указание. Разложить на множители левую часть второго уравнения.

2) $\begin{cases} xy(x+y)=30, \\ x^3+y^3=35. \end{cases}$

3. Решить системы уравнений:

1) $$\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=2\sqrt{xy},\\ x+y=20.\end{cases}$$

2) $$\begin{cases}2(x+y)=5\sqrt{xy},\\ 2(x-y)=3\sqrt{\dfrac{x}{y}}.\end{cases}$$

3) $$\begin{cases}\sqrt{x+y}+2\sqrt{x-y}=\dfrac{2(x-1)}{\sqrt{x-y}},\\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{34}{15}.\end{cases}$$

4. Решить системы уравнений:

1) $$\begin{cases}x(y+z)=20,\\ y(x+z)=18,\\ z(x+y)=14.\end{cases}$$

Указание. Раскрыть скобки и решить систему 3-х уравнений, линейных относительно неизвестных xy, yz, zx, а затем найти значения неизвестных x, y, z.

2) $$\begin{cases}x^2+xy+y^2=37,\\ x^2+xz+z^2=28,\\ y^2+yz+z^2=19.\end{cases}$$

Указание. Вычесть второе уравнение из первого, а третье — из второго.

3) $$\begin{cases}\dfrac{xy}{z}=9,\\ \dfrac{yz}{x}=1,\\ \dfrac{zx}{y}=4.\end{cases}$$

Указание. Почленно перемножить все уравнения.

4) $$\begin{cases}x^2yz=a,\\ y^2zx=b,\\ z^2xy=c.\end{cases}$$

5) $$\begin{cases}x+y+z=13,\\ x^2+y^2+z^2=61,\\ 2yz=x(y+z).\end{cases}$$

Указание. Учесть, что неизвестные y и z входят во все уравнения симметрично.

6) $$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=12,\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=18,\\ 6x-3y=2.\end{cases}$$

Указание. Второе и третье уравнения не содержат неизвестной z.

Графическое решение систем уравнений. Как известно, решение системы уравнений состоит в нахождении тех групп (пар, троек,...) значений неизвестных, которые удовлетворяют всем уравнениям системы. До сих пор мы находили эти группы значений неизвестных с помощью вычисления, или, как говорят, аналитически. Но можно решать системы уравнений и другим способом, который называется графическим. Этот способ основан на том, что каждому уравнению с двумя неизвестными соответствует некоторая кривая (график этого уравнения), представляющая собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Поэтому, если, построив графики двух уравнений системы, мы найдем по чертежу для каждой общей точки (т. е. точки пересечения или касания), построенных графиков соответствующие им пары координат, то эти пары и будут представлять собой искомые пары значений неизвестных, удовлетворяющих обоим данным уравнениям, т. е. решения данной системы уравнений. Найденные решения системы уравнений будут, конечно, приближенными, степень точности которых будет зависеть от выбранного масштаба и степени точности чертежа.

Пример 1. Графически решить систему уравнений:

$$y = -x^2 + 6x - 4, \quad y = x.$$

Решение. Парабола и прямая (черт. 72), соответствующие уравнениям системы, пересекаются в точках (1; 1) и (4; 4). Подстановкой убеждаемся, что (1; 1) и (4; 4) — точные решения системы.

Решив систему алгебраически (способом подстановки):

$$x = -x^2+6x-4; \ x^2-5x+4=0; \ x_1=1, \ x_2=4; \ y_1=1, \ y_2=4,$$

мы приходим к выводу, что решений, отличных от найденных графически, система не имеет.

Пример 2. Графически решить систему уравнений:

$$y = -x^2 + 6x - 4, \quad y = 2x.$$

Решение. Поскольку можно судить по чертежу (черт. 73), парабола и прямая, соответствующие уравнениям системы, касаются в точке (2; 4). Подстановкой убеждаемся, что (2; 4) — точное решение системы. Решив систему алгебраически (способом подстановки):

$$2x = -x^2+6x-4; \ x^2-4x+4=0; \ (x-2)^2=0; \ x_{1,2}=2; \ y_{1,2}=4,$$

убеждаемся, что система имеет 2 равных решения:

$$x_1 = 2, \ y_1 = 4; \ x_2 = 2, \ y_2 = 4.$$

Этот факт — наличие двух равных решений, или, как говорят, «двойного» решения, — и служит доказательством того, что общая точка построенных графиков (2; 4) является в данном случае не точкой пересечения, а точкой касания их.

В этом можно убедиться также из следующих соображений. Решим систему уравнений:

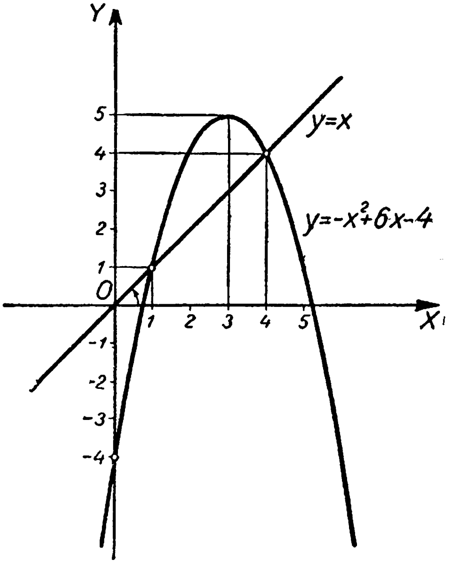
$$y = -x^2 + 6x - 4, \quad y = mx,$$

где $y=mx$ есть уравнение прямой, проходящей через начало координат и имеющей угловой коэффициент m.

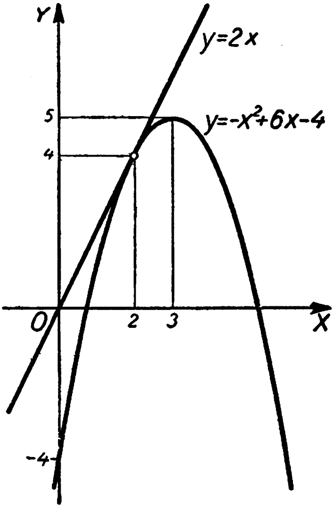
Применяя способ подстановки, последовательно получаем:

$$mx = -x^2 + 6x - 4; \quad x^2 + (m-6)x + 4 = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{6-m \mp \sqrt{m^2-12m+20}}{2} = \frac{6-m \mp \sqrt{(m-2)(m-10)}}{2}.$$



Черт. 72



Черт. 73

Задача имеет решение, если

$$(m-2)(m-10) \geqslant 0,$$

т. е. если либо $m \leqslant 2$, либо $m \geqslant 10$.

Теперь представим себе, что некоторая прямая, совпадающая с прямой $y=x$, начнет вращаться около центра O в направлении, указанном стрелкой (черт. 72), до совпадения с прямой $y=2x$. Тогда угловой коэффициент вращающейся прямой будет изменяться от $m=1$ до $m=2$. Проследим, как будут изменяться при этом абсциссы точек пересечения вращающейся прямой с параболой:

если $m=1$, то $x_1=1$, $x_2=4$;
если $m=1{,}5$, то $x_1 \approx 1{,}22$, $x_2 \approx 3{,}28$;

если $m=1{,}8$, то $x_1\approx1{,}46$, $x_2\approx2{,}74$;
если $m=2$, то $x_1=2$, $x_2=2$.

Таким образом, по мере вращения указанной прямой абсциссы точек ее пересечения с параболой сближаются и в момент совпадения этих точек становятся равными между собой. Но до тех пор, пока вращающаяся прямая пересекает параболу, она является по отношению к параболе секущей, а в тот момент, когда точки ее пересечения совпадают, секущая занимает некоторое предельное положение; секущая, занявшая это предельное положение, называется касательной к кривой в той точке, в которой произошло совпадение точек пересечения секущей с кривой.

Так как при $m=10$

$$x_{1,2}=-2,$$

то прямая $y=10x$ касается параболы в точке (—2; —20).

Пример 3. Графически решить систему уравнений:

$$2x^2-3xy+y^2=0,\quad x^2-6x+y+4=0.$$

Решение. Так как однородное уравнение

$$2x^2-3xy+y^2=0$$

распадается на уравнения

$$\frac{y}{x}=1,\quad \frac{y}{x}=2,$$

то данная система равносильна системам:

$$\frac{y}{x}=1,\quad y=-x^2+6x-4$$

и

$$\frac{y}{x}=2,\quad y=-x^2+6x-4,$$

графическое решение которых дано в примерах 1 и 2.

Пример 4. Графически решить систему уравнений:

$$y=\frac{3}{4}x,\quad xy=12.$$

Решение. Гипербола и прямая (черт 74), соответствующие уравнениям системы, пересекаются в точках (—4;—3) и (4; 3). Подстановкой убеждаемся, что (—4; —3) и (4; 3) — точные решения системы.

Исследуем пример в общем виде. Решим систему уравнений:

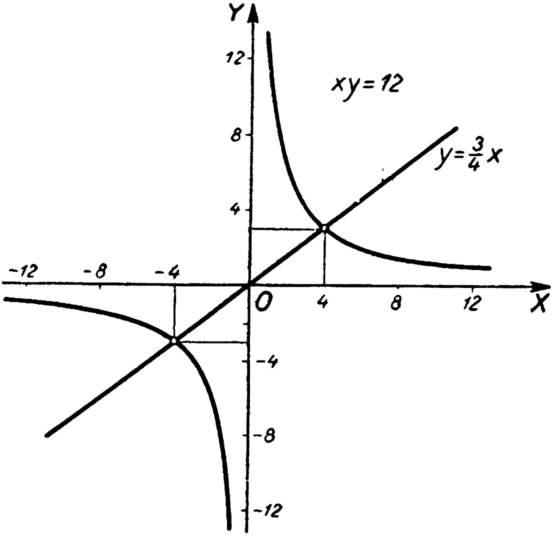
$$y=mx,\quad xy=a.$$

Отсюда $x^2=\frac{a}{m}$. Следовательно, если $\frac{a}{m}>0$, то

$$x_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{a}{m}},\quad y_{1,2}=\mp m\sqrt{\frac{a}{m}}.$$

Итак, если числа m и a имеют одинаковые знаки, то прямая $y=mx$ пересекает гиперболу $xy=a$ в двух точках, симметричных относительно начала координат.

Центральную симметрию точек пересечения графиков можно было предвидеть, заметив, что при замене x на $-x$ и y на $-y$ уравнения остаются без изменения.



Черт. 74

Пример 5. Графически решить систему уравнений:

$$3x^2-xy-4y^2=0;\quad xy=12.$$

Решение. Так как однородное уравнение

$$3x^2-xy-4y^2=0$$

распадается на уравнения

$$\frac{y}{x}=-1,\quad \frac{y}{x}=\frac{3}{4},$$

то данная система равносильна системам:

$$\frac{y}{x}=-1,\ xy=12 \text{ и } \frac{y}{x}=\frac{3}{4},\ xy=12,$$

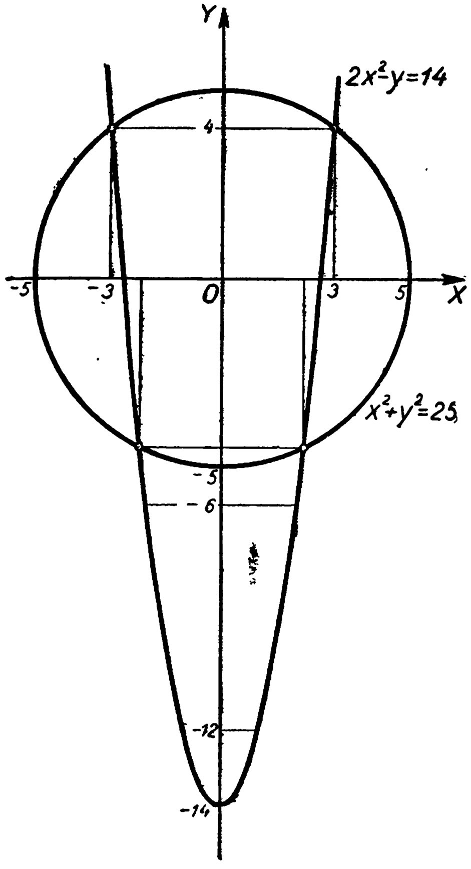
графическое решение которых дано в примере 4.

Пример 6. Графически решить систему уравнений:

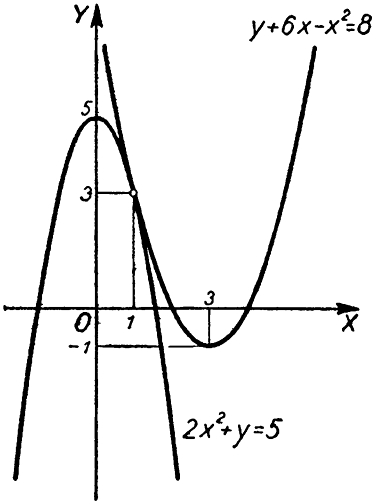
$$2x^2-y=14,\quad x^2+y^2=25.$$

Решение. Парабола и окружность (черт. 75), соответствующие уравнениям системы, пересекаются в точках $(-3;\ 4)$, $(3;\ 4)$;

)(—2,2; —4,5), (2,2; —4,5). С помощью подстановки убеждаемся, что первые два решения — точные, а вторые два решения — приближенные с точностью до $\frac{1}{10}$. Решив систему алгебраически, находим,



Черт. 75



Черт. 76

что, кроме первых двух точных решений, система имеет точные решения

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{19}; -4,5\right) \text{ и } \left(\frac{1}{2}\sqrt{19}; -4,5\right).$$

Тот факт, что точки пересечения графиков симметрично расположены по отношению к оси OY, можно было предвидеть, заметив, что при замене x на $-x$ уравнения остаются без изменения.

Пример 7. Графически решить систему уравнений:

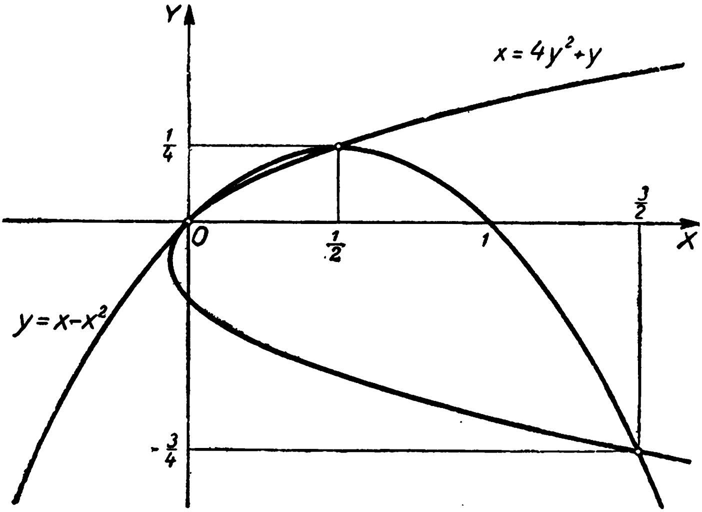
$$2x^2+y=5,\quad y+6x-x^2=8.$$

Решение. Поскольку можно судить по чертежу (черт. 76), параболы, соответствующие уравнениям системы, касаются в точке (1;3). Посредством подстановки убеждаемся, что (1;3) — точное решение системы.

Решая систему, алгебраически, находим, что (1; 3) — двойное решение системы, так что общая точка (1; 3) графиков есть действительно их точка касания, а не точка пересечения.

Пример 8. Графически решить систему уравнений:

$$y=x-x^2,\quad x=4y^2+y.$$



Черт. 77

Решение. Параболы (черт. 77), соответствующие уравнениям системы, имеют общие точки $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{4}\right)$, (0; 0). В первых двух точках эти кривые пересекаются, в третьей—касаются. Посредством подстановки убеждаемся, что графически найдены точные решения системы.

Алгебраическое решение привело бы нас к уравнению

$$x=4(x-x^2)^2+(x-x^2),$$

т. е. к уравнению

$$x^2[4(1-x)^2-1]=0,$$

имеющему двойной корень 0; отсюда мы нашли бы, что система имеет двойное решение (0;0), чем и подтвердили бы тот факт, что точка (0;0) есть точка касания графиков.

Пример 9. Графически решить систему уравнений:

$$x^2 = 4x + y, \quad xy = 3x + 2y.$$

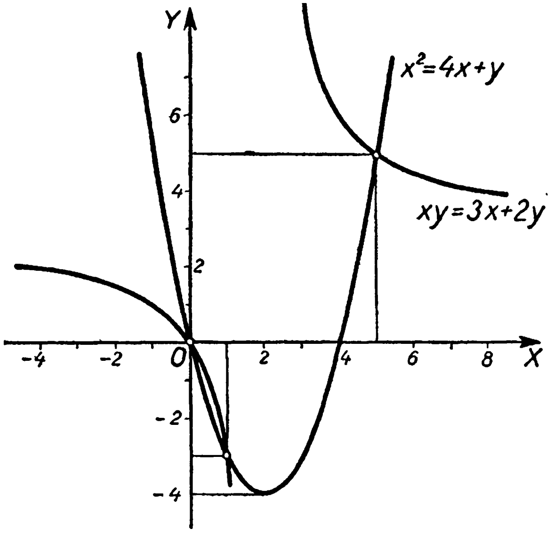
Решение. Уравнение $xy=3x+2y$ может быть представлено в виде:

$$y = \frac{3x}{x-2}$$

или, по исключении целой части дроби, в виде

$$y = 3 + \frac{6}{x-2},$$

так что графиком этого уравнения служит гипербола $y=\frac{6}{x}$, смещенная вправо на 2 единицы и вверх на 3 единицы масштаба.



Черт. 78

Эта гипербола пересекается с параболой $y = x^2 - 4x$ в точках (0; 0), (5; 5), (1; —3) (черт. 78). Посредством подстановки убеждаемся, что найдены точные решения системы.

Заметим, что данную систему можно решить и другим способом. Именно, почленно вычтя из первого уравнения системы ее второе уравнение, получим выводное уравнение:

$$x(x-y) = x-y, \text{ или } (x-y)(x-1) = 0,$$

которое распадается на уравнения:

$$x = y, \quad x = 1.$$

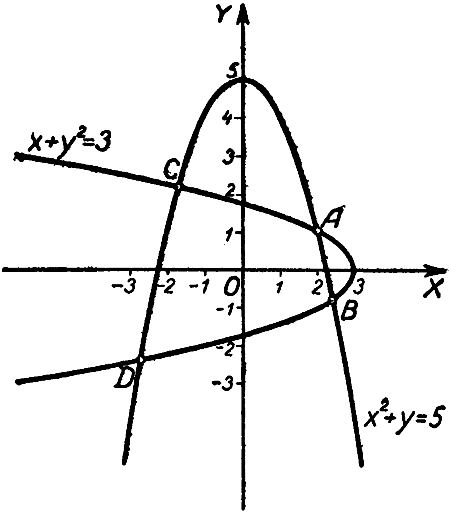
Поэтому данная система уравнений равносильна совокупности систем:

$$x = y,\ x^2 = 4x + y \text{ и } x = 1,\ x^2 = 4x + y.$$

Прямая $x = y$ пересекает параболу $y = x^2 - 4x$ в точках (0; 0) и (5; 5), а прямая $x = 1$ — в точке (1; —3).

Пример 10. Графически решить систему уравнений:

(1) $$x^2 + y = 5,\ x + y^2 = 3.$$



Черт. 79

Решение. Параболы (черт. 79), соответствующие уравнениям системы, пересекаются в точках A, B, C и D.

Координаты точки A легко прочитать по графику: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; координаты же точек B, C, D не так легко с уверенностью установить по графику.

Если бы мы попытались решить систему алгебраически, то пришли бы к уравнению

$$x + (5 - x^2)^2 = 3,$$

т. е. к уравнению четвертой степени

(2) $$x^4 - 10x^2 + x + 22 = 0,$$

которое мы решить не можем. Но мы можем использовать это уравнение для контроля, так как ему должны удовлетворять абсциссы точек пересечения графиков. Для облегчения вычислений представим его в виде

$$x^2(10 - x^2) = x + 22.$$

Парабола $y=5-x^2$ пересекает ось OX в точках $\mp\sqrt{5}$, т. е. приблизительно в точках $\mp 2{,}24$.

По графику находим, что
абсцисса x_2 точки B заключена в промежутке (2,24...3);
абсцисса x_3 точки C больше, чем—2,24;
абсцисса x_4 точки D меньше, чем—2,24.

Для испытания составляем таблицу:

x	$x^2(10-x^2)$	$x+22$
$x_2 = 2{,}3$	24,92	24,3
$x_2 = 2{,}4$	24,42	24,4
$x_3 = -1{,}8$	21,90	20,2
$x_3 = -1{,}6$	19,05	20,4
$x_3 = -1{,}7$	20,55	20,3
$x_4 = -2{,}6$	21,90	19,4
$x_4 = -2{,}8$	16,93	19,2
$x_4 = -2{,}7$	19,76	19,3
$x_4 = -2{,}72$	19,25	19,28

Итак, данная система уравнений имеет решения:

$$(2; 1),\ (2{,}4; -0{,}76),\ (-1{,}7; 2{,}11),\ (-2{,}72; -2{,}4).$$

В этом примере мы графически нашли решения системы уравнений (1), и это помогло нам уточнить решения уравнения четвертой степени (2).

Но если бы нам сразу было предложено решить уравнение (2), то, представляя его в виде

$$(5-x^2)^2+x-3=0$$

и полагая $y=5-x^2$, мы заменили бы уравнение (2) системой уравнений:

$$x^2+y=5,\quad x+y^2=3,$$

т. е. системой (1).

Графически найдя ее решения, мы уточнили бы их так, как указано выше.

Пример 11. Графически решить уравнение

$$x^3-3x-1=0.$$

Решение. Представив уравнение в виде

$$x(x^2-3)=1,$$

положим $x^2-3=y$ и заменим его системой уравнений:

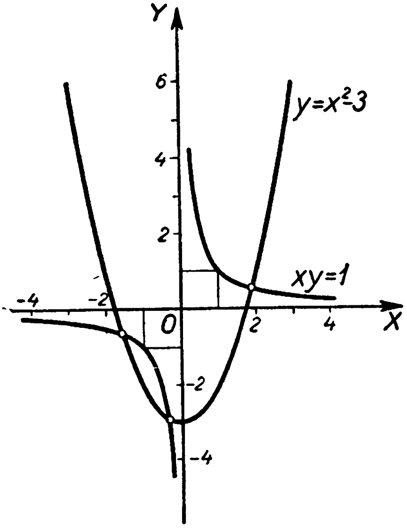
$$y=x^2-3,\quad xy=1.$$

Парабола и гипербола (черт. 80), соответствующие этим уравнениям, пересекаются в 3 точках с абсциссами:

$$x_1 = 1{,}8; \quad x_2 = -1{,}6; \quad x_3 = -0{,}4.$$

Для испытания составляем таблицу:

x	$x(x^2-3)$
$x_1 = 1{,}8$	0,43
$x_1 = 1{,}9$	1,16
$x_1 = 1{,}88$	1,00
$x_2 = -1{,}6$	0,72
$x_2 = -1{,}5$	1,13
$x_2 = -1{,}53$	1,01
$x_3 = -0{,}4$	1,14
$x_3 = -0{,}3$	0,87
$x_3 = -0{,}36$	1,03



Черт. 80

Итак, данное уравнение имеет корни:

$$x_1 \approx 1{,}88; \quad x_2 \approx -1{,}53; \quad x_3 \approx -0{,}36.$$

Пример 12. Графически решить и исследовать систему уравнений:

$$x^2+y^2=a^2, \quad \text{где} \quad a>0, \quad xy=-4.$$

Решение. Окружность $x^2+y^2=a^2$ с центром в начале координат и радиусом a будет: 1) пересекать обе ветви гиперболы $xy=-4$, если $a>2\sqrt{2}$, 2) касаться этих ветвей, если $a=2\sqrt{2}$, 3) не пересекать их, если $a<2\sqrt{2}$ (черт. 81).

В этом легко убедиться и алгебраически.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Графически решить системы уравнений:

1) $$y=x-x^2, \quad x=y^2+y.$$

Ответ. Пересечение в точке (2; —2); касание в тройной точке (0; 0).

2) $$3x^2+y^2-4xy=0, \quad x^2+4x-2y+1=0.$$

Указание. Заменить однородное уравнение двумя линейными уравнениями.

Ответ. Касание в точках (—1; —1) и (1; 3).

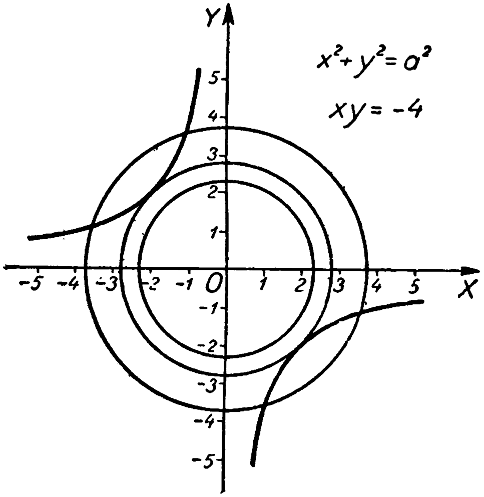
3) $y=x^2+5x,\ x=y^2+5y.$

Указание. Путем почленного вычитания второго уравнения из первого составляем выводное уравнение, которое распадается на уравнения:

$$y=x \text{ и } y=-x-6.$$

Ответ. Пересечение в точках $(0;\ 0)$, $(-4;\ -4)$,

$$(-3-\sqrt{3};-3+\sqrt{3}),\quad (-3+\sqrt{3};-3-\sqrt{3}).$$



Черт. 81

2. Решить и исследовать системы уравнений:

1) $x+y=a$, где $a>0$, $xy=16$;

2) $x+y=8$, $xy=a^2$, где $a>0$.

Дать геометрическую иллюстрацию ответа.

3. Решить уравнение $4x^3-4x^2+x-2=0$.

Указание. Представив уравнение в виде

$$(4x^2-4x+1)\,x-2=0,$$

заменить его системой уравнений, графически решить ее и уточнить корень.

Ответ. Уравнение имеет единственный корень 1,16.

4. Решить уравнение

$$x^3-9x+6=0.$$

Ответ. $x_1=2{,}58$; $x_2=-3{,}29$; $x_3=0{,}71$.

5. Решить уравнение $x^4-9x^2-6x+1=0$, зная, что

$$-3<x_1<-2,\ -1<x_2<0<x_3<1,\ 3<x_4<4.$$

Ответ. $x_1=-2{,}55$; $x_2=-0{,}87$; $x_3=0{,}14$; $x_4=3{,}28$.

ГЛАВА VI

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. ПОНЯТИЕ О ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Определение последовательности. Простейший пример числовой последовательности представляет собой натуральный ряд чисел

(1) $$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots, n, \ldots,$$

которыми мы выражаем результат счета предметов, принадлежащих какой-либо совокупности (группе, множеству).

Натуральный ряд чисел обладает следующими свойствами:

1) за каждым числом натурального ряда непосредственно следует определенное число этого ряда; 2) каждому числу натурального ряда, кроме одного — именно числа 1, непосредственно предшествует определенное число этого ряда, причем предшествовать данному числу натурального ряда может лишь конечное число чисел этого ряда.

Например, за числом 3 следуют числа 4, 5, 6 и т. д., но непосредственно следует за числом 3 только число 4; это значит, что среди чисел натурального ряда нет ни одного, которое следовало бы за числом 3 и в то же время предшествовало бы числу 4.

В силу свойства 1 натурального ряда чисел в этом ряде нет последнего числа, т. е. натуральный ряд чисел представляет собой бесконечную совокупность (бесконечное множество) чисел.

Теперь представим себе, что мы, следуя какому-либо определенному закону (правилу), произвели замещение числа 1 некоторым числом a_1, числа 2 — числом a_2, числа 3 — числом a_3 и, вообще, числа n — числом a_n и так далее и при этом расположили числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ в том же порядке, в котором расположены замещенные ими числа 1, 2, 3,..., n, ... натурального ряда. Та совокупность чисел

(2) $$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_n, \ldots,$$

которую мы этим путем получим, и называется числовой последовательностью. Числа, образующие последовательность, называются ее членами; член a_n, стоящий в последовательности на n-м месте, называется n-м членом последовательности.

Очевидно, что всякая числовая последовательность (2) обладает теми же двумя свойствами 1 и 2, которые принадлежат натуральному ряду чисел.

2. Задание последовательности с помощью формулы. Последовательность определяется законом (правилом), указывающим, какое число должно находиться в этой последовательности на n-м месте.

Чаще всего этот закон задается посредством формулы вида

$$a_n = f(n),$$

где a_n есть n-й член последовательности, а $f(n)$ есть функция от одной независимой переменной n, определенная для всех натуральных значений этой переменной. Если мы будем последовательно находить значения функции $f(n)$, соответствующие значениям

$$(1) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \dots,\ n, \dots$$

независимой переменной n, и располагать их в том же порядке, в котором расположены значения (1), то найденные значения

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5), \dots,\ f(n), \dots$$

составят числовую последовательность.

Примеры.

Формуле	соответствует последовательность:
1) $a_n = 3n - 1$	$2,\ 5,\ 8,\ 11, \dots,\ 3n-1, \dots;$
2) $a_n = n^2 - 2n + 2$	$1,\ 2,\ 5,\ 10, \dots,\ n^2 - 2n + 2, \dots,$
3) $a_n = n^2 - 6n + 5$	$0,\ -3,\ -4,\ -3,\ 0,5, \dots,\ n^2 - 6n + 5, \dots;$
4) $a_n = \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots;$
5) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots;$
6) $a_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots;$
7) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$	$-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{(-1)^n n}{n+1}, \dots;$
8) $a_n = \frac{n+1}{n}$	$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots;$
9) $a_n = \sqrt{n}$	$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{n}, \dots;$
10) $a_n = 2^n$	$2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots;$
11) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots;$
12) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$	$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1+(-1)^n}{n}, \dots.$

3. Общий член последовательности.

Определение. Если последовательность задается с помощью формулы $a_n = f(n)$, то каждый член этой последовательности есть значение функции $f(n)$, соответствующее тому значению независимой переменной n, которое указывает номер места, занимаемого членом a_n. Поэтому функция $f(n)$ называется общим членом последовательности, заданной формулой $a_n = f(n)$.

Очевидно, что в этом случае последовательность есть область значений функции $f(n)$, т. е. своего общего члена.

Если последовательность имеет общий член, то ее обозначают с помощью этого общего члена, заключенного в фигурные скобки. Например, последовательность, заданную формулой $a_n = \frac{n^2-1}{n}$, обозначают так: $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$.

4. **Другие способы задания последовательности.** Последовательность может задаваться не только формулой.

13) Последовательно находя приближенные значения обыкновенной дроби $\frac{1}{7}$ с точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д. с недостатком и записывая результаты в том порядке, в котором мы их находим, мы получим последовательность чисел:

$$0{,}1;\ 0{,}14;\ 0{,}142;\ 0{,}1428;\ 0{,}14285;\ 0{,}142857;\ldots,$$

которая не задана общим членом; иначе говоря, мы знаем, что каждому натуральному числу соответствует вполне определенное число, являющееся членом этой последовательности, и можем это число без труда найти, так как дробь $\frac{1}{7}$ обращается в бесконечную периодическую дробь 0, (142857); но нам не дана та формула, с помощью которой по данному номеру n члена последовательности можно было бы найти этот член.

14) Точно так же, последовательно находя приближенные значения квадратного корня из числа 2 с точностью до $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ и т. д. с недостатком и записывая результаты в том порядке, в котором мы их находим, мы получим последовательность:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ldots,:$$

которая не задана общим членом; иначе говоря, члены этой последовательности не являются значениями какой-либо заданной функции от натуральной переменной n; однако мы располагаем правилом, с помощью которого можно найти член этой последовательности, находящийся на любом заданном месте.

15) Очевидно, что и множество всех простых чисел, расположенных в возрастающем порядке:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ldots$$

представляет собой числовую последовательность.

УПРАЖНЕНИЯ И ВОПРОСЫ

1. Написать последовательности, имеющие соответственно следующие общие члены:

$$\frac{(-1)^n(n+1)}{n};\quad 1-\frac{(-1)^n}{n};\quad \frac{n^2-1}{n}.$$

2. Существует ли последовательность с общим членом

$$\frac{1}{(n-1)(n-3)}?$$

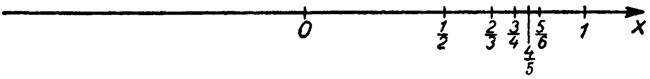
3. Можно ли члены двух любых последовательностей привести во взаимно-однозначное соответствие,—например, последовательностей $\{n\}$ и $\{2n\}$?

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Для наглядного представления свойств числовых последовательностей пользуются двумя приемами.

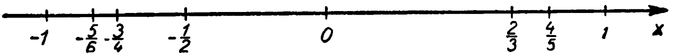
Первый прием заключается в том, что каждый член последовательности изображают на числовой оси точкой, абсцисса которой равна этому члену.

Например, последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ изображается так (черт. 82):



Черт. 82

Последовательность же $\left\{\frac{(1)^n n}{n+1}\right\}$ изображается так (черт. 83):



Черт. 83

Для большей ясности на оси указан и принятый масштаб.

Второй прием заключается в том, что, исходя из того, что a_n есть функция $f(n)$ натуральной переменной n, строят график уравнения

$$a_n = f(n),$$

который, конечно, представится не плавной кривой, а совокупностью точек

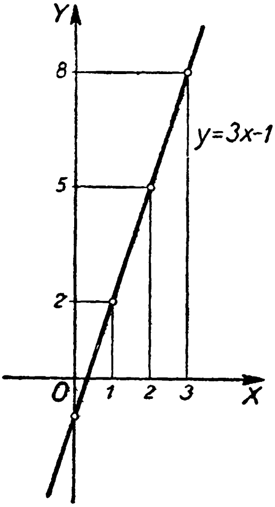
$$(1;\ a_1),\ (2;\ a_2),\ (3;\ a_3),\dots,\ (n;\ a_n)\dots,$$

1) Например, последовательность $\{3n-1\}$ представится совокупностью точек

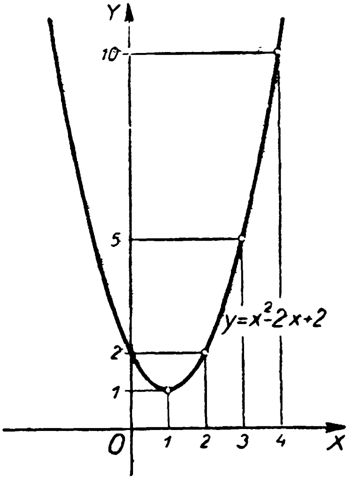
$$(1;\ 2),\ (2;\ 5),\ (3;\ 8),\ (4;\ 11), \ldots,\ (n;\ 3n-1), \ldots;$$

очевидно, что все эти точки расположатся на прямой, имеющей уравнение

$$y = 3x - 1,$$



Черт. 84



Черт. 85

как это показано на чертеже 84.

2) Последовательность $\{n^2-2n+2\}$ изобразится совокупностью точек

$$(1;\ 1),\ (2;\ 2),\ (3;\ 5),\ (4;\ 10), \ldots,\ (n;\ n^2-2n+2), \ldots,$$

расположенных на кривой, имеющей уравнение

$$y = x^2 - 2x + 2,$$

т. е. на параболе с вершиной (1; 1) (черт. 85).

3) Последовательность $\{n^2-6n+5\}$ представится совокупностью точек

$$(1;0),\ (2;-3),\ (3;-4),\ (4;-3),\ (5;\ 0),\ (6;\ 5), \ldots,\ (n;\ n^2-6n+5), \ldots,$$

расположенных на кривой, имеющей уравнение

$$y = x^2 - 6x + 5,$$

т. е. на параболе с вершиной (3;—4) (черт. 86).

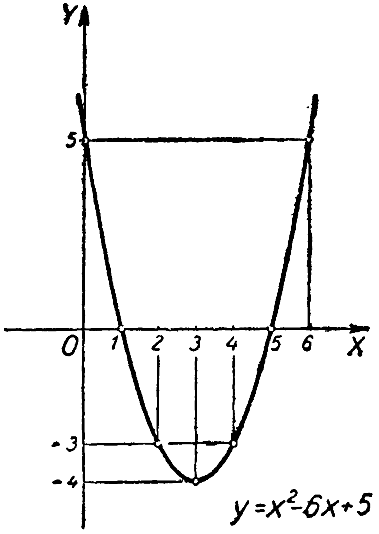
4) Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ изобразится совокупностью точек

$$(1;\ 1),\ \left(2;\ \frac{1}{2}\right),\ \left(3;\ \frac{1}{3}\right),\ \left(4;\ \frac{1}{4}\right), \ldots,\ \left(n;\ \frac{1}{n}\right), \ldots,$$

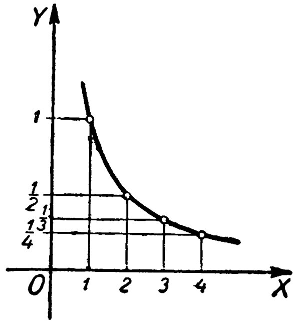
расположенных на кривой, имеющей уравнение

$$y = \frac{1}{x}, \text{ где } x > 0,$$

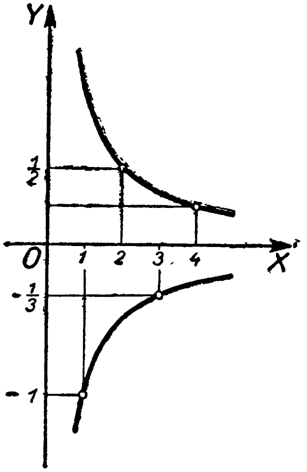
т. е. на ветви гиперболы, лежащей в I квадранте (черт. 87).



Черт. 86



Черт. 87



Черт. 88

5) Последовательность $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ представится совокупностью точек

$$(1; -1),\ \left(2; \frac{1}{2}\right),\ \left(3; -\frac{1}{3}\right),\ \left(4; \frac{1}{4}\right), \ldots, \left(n; \frac{(-1)^n}{n}\right), \ldots;$$

при этом точки с нечетными абсциссами расположены на кривой $y=-\frac{1}{x}$, где $x>0$, т. е. на ветви гиперболы, лежащей в IV квадранте, а точки с четными абсциссами — на кривой $y=\frac{1}{x}$, где $x>0$; т. е. на ветви гиперболы, лежащей в I квадранте (черт. 88).

УПРАЖНЕНИЕ

Построить графики последовательностей

$$\left\{1+\frac{1}{n}\right\}, \quad \{\sqrt{n}\}.$$

На каких кривых расположены точки, принадлежащие этим графикам?

§ 3. ВИДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

1. Возрастающие и убывающие последовательности. Рассматривая приведенные в § 1 последовательности, мы замечаем, что в одних из них (1, 2, 6, 9, 10, 13, 14, 15) каждый последующий член больше предыдущего, в других (4, 8, 11) каждый последующий член меньше предыдущего, а в остальных (3, 5, 7, 12) не наблюдается ни первое, ни второе свойство.

Определение 1. Если каждый член последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

больше предыдущего члена ее, т. е. если при $n=1, 2, 3, \ldots$

$$a_{n+1} > a_n, \tag{1}$$

то последовательность называется возрастающей.

Определение 2. Если каждый член последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

меньше предыдущего члена ее, т. е. если при $n=1, 2, 3, \ldots$

$$a_{n+1} < a_n, \tag{2}$$

то последовательность называется убывающей.

Как узнать, является ли данная последовательность возрастающей или убывающей? Очевидно, что для этого надо установить знак разности $a_{n+1}-a_n$. Если последовательность задана формулой $a_n = f(n)$, то надо установить знак разности $f(n+1)-f(n)$.

1) Если $f(n) = 3n - 1$,
то

$$f(n+1) - f(n) = 3(n+1) - 1 - 3n + 1 = 3,$$

так что $a_{n+1} - a_n > 0$, т. е. $a_{n+1} > a_n$; последовательность $\{3n - 1\}$ — возрастающая.

2) Если $f(n) = n^2 - 2n + 2$, то

$$f(n+1) - f(n) = (n+1)^2 - 2(n+1) + 2 - n^2 + 2n - 2 = \\ = 2n - 1,$$

так что разность $a_{n+1} - a_n$ имеет при $n=1, 2, 3, \dots$ положительное значение, т. е. $a_{n+1} > a_n$; последовательность $\{n^2 - 2n + 2\}$ — возрастающая.

3) Если $f(n) = \frac{n}{n+1}$,
то

$$f(n+1) - f(n) = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

так что разность $a_{n+1} - a_n$ имеет при $n = 1, 2, 3, \dots$ положительное значение; последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ — возрастающая.

4) Если $f(n) = \sqrt{n}$,
то

$$f(n+1) - f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}};$$

последовательность $\sqrt{n}$ — возрастающая.

5) Если $f(n) = \frac{1}{n}$,
то

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)},$$

так что разность $a_{n+1} - a_n$ имеет при $n = 1, 2, 3, \dots$ отрицательное значение, т. е. $a_{n+1} < a_n$; последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ — убывающая.

6) Если $f(n) = \frac{n+1}{n}$,
то

$$f(n+1) - f(n) = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)};$$

последовательность $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ — убывающая.

В иных случаях для сравнения двух последовательных членов a_{n+1} и a_n удобнее находить и исследовать их отношение.

7) Если $a_n = 2^n$,
то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2;$$

но $2>1$ и $a_n>0$; поэтому

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \text{ и } a_{n+1}>a_n;$$

последовательность $\{2^n\}$ — возрастающая.

8) Если $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

то

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}:\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2};$$

но $\frac{1}{2}<1$ и $a_n>0$; поэтому

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \text{ и } a_{n+1}<a_n;$$

последовательность $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ — убывающая.

9) Так как $\frac{n^2-1}{n}=n-\frac{1}{n}$, то последовательность $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$ — возрастающая.

В тех случаях, когда последовательность задана формулой $a_n=f(n)$, об ее возрастании или убывании можно сделать заключение, рассматривая функцию $f(x)$. Если эта функция определена для всех значений переменной x, принадлежащих промежутку $[1, \infty]$, и в этом промежутке монотонно возрастает или монотонно убывает, то очевидно, что последовательность $\{f(n)\}$ соответственно возрастает или убывает.

Последовательности, приведенные выше под номерами 1, 2, 3, 4, 9—возрастающие, так как соответствующие им функции $y=3x-1$, $y=x^2-2x+2$, $y=\frac{x}{x+1}$, $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{x^2-1}{x}$ в промежутке $[1, \infty]$ возрастают, а последовательности под номерами 5, 6 —убывающие, так как соответствующие им функции $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{x+1}{x}$ в промежутке $[1, \infty]$ убывают.

В том, что функции $y=\frac{x}{x+1}$ и $y=\frac{x^2-1}{x}$ возрастают, легко убедиться и на основании равенств: $y=1-\frac{1}{x+1}$ и $y=x-\frac{1}{x}$, заметив, что при возрастании переменной x в промежутке $[1, \infty]$ вычитаемые $\frac{1}{x+1}$ и $\frac{1}{x}$ убывают и, следовательно, разности $1-\frac{1}{x+1}$ и $x-\frac{1}{x}$ возрастают.

В том, что функция $y=\frac{x+1}{x}$ убывает, можно убедиться и на основании равенства $y=1+\frac{1}{x}$, так как при возрастании переменной x в промежутке $[1,\infty)$ слагаемое $\frac{1}{x}$ и, следовательно, сумма $1+\frac{1}{x}$ убывает.

Последовательности 13, 14, 15 (§ 1) — также возрастающие; это следует из способа их построения: в последовательностях 13 и 14 каждый член есть десятичная дробь, получаемая из предыдущей путем приписывания к ней справа нового десятичного знака* , а в последовательности 15 члены, по условию, располагаются в возрастающем порядке.

Последовательности 5, 7 (§ 1) представляют собой так называемые знакопеременные последовательности, т. е. последовательности, членами которых попеременно (в одном или другом порядке) служат отрицательные и положительные числа. Очевидно, что такие последовательности не относятся ни к возрастающим, ни к убывающим.

Последовательность 3 (§ 1) с общим членом n^2-6n+5 сначала убывает $(0>-3>-4)$, а затем возрастает $(-4<-3<0<<5<\ldots)$.

Это находится в соответствии с тем, что функция $y=x^2-6x+5$ (черт. 86) в промежутке $[1, 3]$ убывает, а в промежутке $[3, \infty)$ возрастает. Последовательность 3 — не возрастающая и не убывающая.

Последовательность 12 (§ 1) с общим членом $\frac{1+(-1)^n}{n}$ также не относится ни к возрастающим, ни к убывающим: каждый ее член, стоящий на нечетном месте, равен нулю, а члены, стоящие на четных местах, — положительные числа, образующие последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$.

2. **Последовательности, ограниченные сверху или снизу.** Укажем еще одно важное свойство, которым могут обладать последовательности.

Определение 3. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называется ограниченной сверху, если можно указать такое число M, которого не превосходит ни один член этой последовательности, т. е. если при $n=1, 2, 3, \ldots$ имеет место неравенство $a_n \leqslant M$.

Например, каждая из последовательностей

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots \text{ и } -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{(-1)^n n}{n+1}, \ldots$$

---

* В том случае, если этот приписываемый справа десятичный знак оказывается нулем, два рядом стоящих члена последовательности становятся равными между собой, так что свойство $a_{n+1}>a_n$ заменяется свойством $a_{n+1}\geqslant a_n$.

ограничена сверху числом 1, так как $a_n < 1$; при этом ограничивающее последовательность число 1 не служит ее членом.

Если члены каждой из этих последовательностей изобразить точками числовой оси, то все эти точки расположатся влево от точки с абсциссой 1.

Последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$$

ограничена сверху числом $\frac{1}{2}$ $\left(a_n \leqslant \frac{1}{2}\right)$, а последовательность

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$$

— числом $\frac{1}{4}$ $\left(a_n \leqslant \frac{1}{4}\right)$; в данном случае ограничивающие эти последовательности числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ служат их членами.

Если члены каждой из этих последовательностей изобразить точками числовой оси, то ни одна из точек первой последовательности не расположится вправо от точки с абсциссой $\frac{1}{2}$ и ни одна из точек второй последовательности — вправо от точки с абсциссой $\frac{1}{4}$.

Определение 4. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ называется ограниченной снизу, если можно указать число M, обладающее тем свойством, что среди членов последовательности нет ни одного, который был бы меньше этого числа M, т. е. если при $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место неравенство $a_n \geqslant M$.

Например, последовательность

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots$$

ограничена снизу числом 1 $(a_n > 1)$, а последовательность

$$-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \ldots, \frac{(-1)^n (n+1)}{n}, \ldots$$

— числом —2 $(a_n \geqslant -2)$; при этом ограничивающее первую последовательность число 1 не служит ее членом, а ограничивающее вторую последовательность число — 2 служит ее членом.

Все точки числовой оси, изображающие члены первой последовательности, расположатся вправо от точки с абсциссой 1, и ни одна из точек числовой оси, изображающих члены второй последовательности, не расположится влево от точки с абсциссой — 2.

Последовательность

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$$

ограничена снизу числом 0 ($a_n > 0$), а последовательность

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$$

— числом $-\frac{1}{2}$ $\left(a_n \geqslant -\frac{1}{2}\right)$; при этом число 0 не принадлежит, а число $-\frac{1}{2}$ принадлежит последовательности.

Точка с абсциссой 0 расположена левее всех точек, изображающих члены первой последовательности, а точка с абсциссой $-\frac{1}{2}$ есть самая левая из всех точек, изображающих члены второй последовательности.

3. Ограниченные последовательности. Последовательность, ограниченная сверху или снизу, может быть вместе с тем ограничена и снизу, и сверху. Таковы, например, выше рассмотренные последовательности:

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$, ограниченная снизу числом 0, а сверху—числом 1;

$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$, ограниченная снизу числом $-\frac{1}{2}$, а сверху— числом $\frac{1}{4}$.

Таковы же и последовательности:

$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, ограниченная снизу числом $\frac{1}{2}$, а сверху — числом 1;

$\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$, ограниченная снизу числом— 1, а сверху — числом 1;

$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$, ограниченная снизу числом 1, а сверху — числом 2;

$\left\{\frac{(-1)^n (n+1)}{n}\right\}$, ограниченная снизу числом —2, а сверху—числом $\frac{3}{2}$.

Определение 5. Последовательность, ограниченная одновременно снизу и сверху, называется ограниченной последовательностью.

Очевидно, что если $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ есть ограниченная последовательность, то существуют два числа a и b, между которыми заключены все члены последовательности, так что при $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеют место неравенства $a \leqslant u_n \leqslant b$; иначе говоря, все члены ограниченной последовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ принадлежат определенному промежутку $[a, b]$, т. е. на числовой оси можно выделить отрезок AB, содержащий все точки, изображающие члены последовательности $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ (черт. 82, 83).

Если же эту ограниченную последовательность представить совокупностью точек

$$(1;\ u_1),\ (2;\ u_2),\ (3;\ u_3),\ \ldots,\ (n;\ u_n),\ \ldots,$$

то все эти точки расположатся в полосе, которая заключена между двумя прямыми, определяемыми уравнениями

$$y = a \text{ и } y = b.$$

Например, все точки числовой оси, изображающие члены ограниченной последовательности

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, 1 - \frac{(-1)^n}{n}, \ldots,$$

принадлежат отрезку, определяемому точками с абсциссами $\frac{1}{2}$ и 2, а вся представляющая эту последовательность совокупность точек расположена в полосе, которая заключена между прямыми, определяемыми уравнениями $y = \frac{1}{2}$ и $y = 2$.

Однако существуют последовательности, не ограниченные либо снизу, либо сверху, либо ни снизу, ни сверху.

Так, последовательности $\{n\}$, $\{3n-1\}$, $\{n^2-2n+2\}$ не ограничены сверху, последовательности $\{-n\}$, $\{2-5n\}$, $\{-n^2+1\}$ не ограничены снизу, а последовательность $\{(-1)^n n\}$ — ни сверху, ни снизу.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Ограничены ли последовательности:

$$\{n^2-6n+5\},\ \{\sqrt{n}\},\ \left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}?$$

2. Какому отрезку принадлежат все точки, изображающие члены последовательности:

$$\left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\},\ \left\{\frac{1}{n-(-1)^n}\right\},\ \{5+3(-1)^n\},\ \left\{\frac{1}{n}+(-1)^n\right\}?$$

§ 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ИМЕЮЩИЕ ПРЕДЕЛ

1. Равносильность двух соотношений. В этом параграфе мы будем опираться на следующий факт.

Если a и l — какие угодно числа, а α — положительное число, то соотношения

(1) $|a-l| < \alpha$ и (2) $l-\alpha < a < l+\alpha$

равносильны.

В самом деле, если число $a-l$ по абсолютному значению меньше, чем положительное число α, то это значит, что

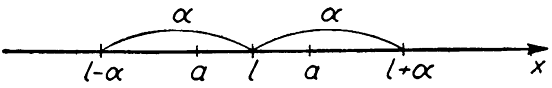
$$-\alpha < a-l < \alpha$$

и что, следовательно,

$$l-\alpha < a < l+\alpha.$$

Если, обратно, имеет место соотношение $l-\alpha < a < l+\alpha$, то из него следует соотношение $-\alpha < a-l < \alpha$, означающее, что число $a - l$ по абсолютному значению меньше, чем положительное число α.

Равносильность соотношений (1) и (2) следует из простых геометрических соображений: если точка a отстоит от точки l меньше, чем на отрезок α, то эта точка a лежит внутри отрезка $(l-\alpha, l+\alpha)$, концы которого отстоят от точки l как раз на отрезок α (черт. 89).



Черт. 89

2. Понятие о пределе последовательности. Среди ограниченных последовательностей особенное значение имеют последовательности, стремящиеся к пределу. Приведем примеры этих последовательностей.

Пример 1. Последовательность

$$\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, 1 - \frac{(-1)^n}{n+1}, \ldots \quad (1)$$

ограничена снизу числом $\frac{2}{3}$, а сверху — числом $\frac{3}{2}$. Легко заметить, что каждый ее член, занимающий нечетное место, больше, чем число 1, а занимающий четное место, меньше, чем 1. Но при более внимательном рассмотрении членов этой последовательности можно установить, что они обладают по отношению к числу 1 следующим свойством: если мы возьмем на числовой оси сколь угодно малый промежуток, в середине которого находится число 1, или, как говорят, окружим число 1 сколь угодно малым промежутком, то для каждого такого промежутка, как бы мал он ни был, можно найти такой член последовательности (1), начиная с которого члены последовательности будут принадлежать этому промежутку.

Возьмем, например, промежуток $\left(1 - \frac{1}{20}, 1 + \frac{1}{20}\right)$.

Очевидно (п. 1), что члены последовательности (1) будут попадать в этот промежуток с того момента, как они станут отличаться по абсолютному значению от числа 1 меньше, чем на $\frac{1}{20}$, т. е. начиная с того члена последовательности (1), номер n которого удовлетворяет неравенству

$$\left|1 - \frac{(-1)^n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{20},$$

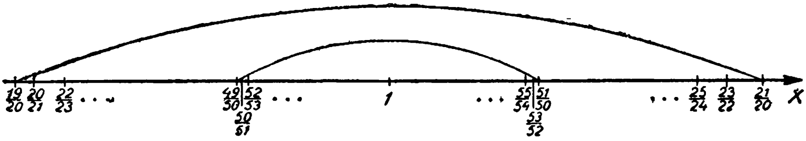
т. е. неравенству

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{20}.$$

Решая его, находим, что

$$n+1>20,\ n>19, \text{ т. е. } n=20, 21, 22, 23, \ldots .$$

В самом деле, члены последовательности (1) с этими номерами имеют значения $\frac{20}{21}, \frac{23}{22}, \frac{22}{23}, \frac{25}{24}, \ldots$, отличающиеся от 1 соответственно на $\frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \ldots$, т. е. меньше, чем на $\frac{1}{20}$ (черт. 90).



Черт. 90

В более узкий промежуток $\left(1-\frac{1}{50}, 1+\frac{1}{50}\right)$ члены последовательности (1) будут попадать с того момента, как они станут отличаться по абсолютному значению от числа 1 меньше, чем на $\frac{1}{50}$, т. е. начиная с того члена последовательности, номер n которого удовлетворяет неравенству

$$\left|1-\frac{(-1)^n}{n+1}-1\right|<\frac{1}{50},$$

т. е. неравенству

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{50}.$$

Решая его, находим, что

$$n+1>50,\ n>49, \text{ т. е. } n=50, 51, 52, 53, \ldots .$$

В самом деле, члены последовательности (1) с этими номерами имеют значения $\frac{50}{51}, \frac{53}{52}, \frac{52}{53}, \frac{55}{54}, \ldots$, отличающиеся от 1 соответственно на $\frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \ldots$, т. е. меньше, чем на $\frac{1}{50}$ (черт. 90).

Вообще члены последовательности (1) будут принадлежать промежутку $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, где ε — сколь угодно малое положительное число, с того момента, как они начнут отличаться по абсолютному значению от числа 1 меньше, чем на ε, т. е. начиная с того члена последовательности (1), номер n которого удовлетворяет неравенству

$$\left|1-\frac{(-1)^n}{n+1}-1\right|<\varepsilon,$$

т. е. неравенству

$$\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

Решая его, находим, что

$$n+1>\frac{1}{\varepsilon};\ n>\frac{1}{\varepsilon}-1.$$

Это значит, что все члены последовательности (1), номера которых превышают целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon}-1$, принадлежат промежутку $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$. Например, если $\varepsilon=\frac{1}{100}$, то члены этой последовательности станут попадать в промежуток $\left(1-\frac{1}{100},\ 1+\frac{1}{100}\right)$, начиная с 100-го члена этой последовательности.

Таким образом, для членов последовательности (1) число 1 играет особую роль: каким бы малым промежутком $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ мы ни окружили число 1, среди членов этой последовательности существует такой член, начиная с которого ее члены принадлежат промежутку $(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$.

Определение. Если число a обладает тем свойством, что, каким бы сколь угодно малым промежутком

$$(2)\qquad (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$$

мы ни окружили это число, среди членов последовательности

$$(3)\qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ldots$$

найдется такой член a_ν, начиная с которого ее члены принадлежат взятому промежутку (2), то число a называется **пределом** данной последовательности (3).

Иначе говоря, число a называется пределом последовательности (3), если каждому сколь угодно малому положительному числу ε соответствует число ν, обладающее тем свойством, что при $n>\nu$ выполняется неравенство

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

Если последовательность (3) имеет предел a, то говорят, что она **стремится** к пределу a или **сходится** к пределу a и называют ее **сходящейся** последовательностью.

Последовательность (1), приведенная в примере 1, стремится к пределу 1; при этом ее члены приближаются к своему пределу с обеих сторон, принимая все возрастающие значения слева и все убывающие значения справа от своего предела 1. Однако, как мы увидим дальше, члены последовательности могут приближаться к своему пределу не только этим способом.

Пример 2. Последовательность

$$(1)\qquad \frac{1}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{n+[1+(-1)^n]},\ \ldots,$$

очевидно, ограничена снизу числом 0, а сверху — числом 1; как члены, стоящие на нечетных местах, так и члены, стоящие на четных местах, убывают, приближаясь, по-видимому, к нулю. Но можно ли считать число 0 пределом этой последовательности. Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо установить, можно ли для всякого сколь угодно малого положительного числа ε так выбрать число ν, чтобы при $n > \nu$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{1}{n+[1+(-1)^n]}-0\right|<\varepsilon,$$

т. е. неравенство

$$\frac{1}{n+[1+(-1)^n]}<\varepsilon. \tag{2}$$

Если мы заметим, что

$$\frac{1}{n+[1+(-1)^n]}\leqslant\frac{1}{n},$$

то мы заключим отсюда, что неравенство (2) можно свести к неравенству

$$\frac{1}{n}<\varepsilon, \tag{3}$$

так как для всех тех значений номера n, для которых имеет место неравенство (3), и подавно выполняется неравенство (2).

Решая неравенство (3), находим, что

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Например, для $\varepsilon=\frac{1}{100}$ неравенство (2) выполняется при $n>100$, т. е. при $n = 101,\ 102,\ 103,\ 104, \ldots$. В самом деле, каждое из чисел

$$\frac{1}{101},\ \frac{1}{104},\ \frac{1}{103},\ \frac{1}{106},\ldots$$

меньше, чем $\frac{1}{100}$.

Установив, что для всякого сколь угодно малого положительного числа ε среди членов последовательности (1) существует такой член ее, начиная с которого ее члены принадлежат промежутку $(0-\varepsilon,\ 0+\varepsilon)$, мы доказали, что число 0 служит пределом последовательности (1).

Пример 3. Последовательность

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{10},\ \frac{4}{17},\ \frac{5}{26},\ldots,\frac{n}{n^2+1},\ldots, \tag{1}$$

состоящая из правильных положительных дробей, ограничена снизу числом 0, а сверху — числом $\frac{1}{2}$.

Судя по нескольким первым членам последовательности (1), можно думать, что это — убывающая последовательность, члены которой все больше приближаются к нулю. Для того чтобы узнать, не будет ли число 0 ее пределом, составим неравенство

$$\left|\frac{n}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon,$$

т. е. неравенство

$$(2)\qquad \frac{n}{n^2+1}<\varepsilon.$$

Так как очевидно, что

$$\frac{n}{n^2+1}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n},$$

то неравенство (2) можно заменить неравенством

$$\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Решая это неравенство, находим, что

$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

Например, для $\varepsilon=\frac{1}{20}$ неравенство (2) выполняется при $n>20$, т. е. при n, = 21, 22, ...:

$$\frac{21}{21^2+1}<\frac{21}{21^2}=\frac{1}{21}<\frac{1}{20};\ \frac{22}{22^2+1}<\frac{22}{22^2}=\frac{1}{22}<\frac{1}{20},\dots.$$

Следовательно, для каждого сколь угодно малого положительного числа ε среди членов данной последовательности (1) найдется такой член, начиная с которого ее члены принадлежат промежутку $(0-\varepsilon,\ 0+\varepsilon)$, а это значит, что последовательность (1) имеет предел 0.

Замечание. В то время как члены последовательности в примере 1, начиная с некоторого момента, располагаются в каждом промежутке, окружающем предел 1, по обе стороны от этого предела, члены последовательности в примерах 2 и 3 располагаются в каждом промежутке, окружающем предел 0, только по правую сторону от этого предела. При этом члены последовательностей в примерах 1 и 3 все больше приближаются к своему пределу, а члены последовательности в примере 2 то приближаются к своему пределу, то удаляются от него, но все же, начиная с некоторого момента, попадают в промежуток $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ и уже впредь остаются в нем.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что каждая из последовательностей

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\},\ \left\{\frac{n+1}{n}\right\}$$

имеет предел 1.

2. Доказать, что каждая из последовательностей

$$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$$

имеет предел 0.

3. Доказать, что последовательность

$$\left\{\frac{n^2-n+1}{(n-1)^2}\right\}$$

имеет предел 1.

Указание. Воспользоваться тем, что

$$\frac{n}{(n-1)^2} < \frac{n-1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2}.$$

§ 5. НЕОГРАНИЧЕННО ВОЗРАСТАЮЩИЕ И НЕОГРАНИЧЕННО УБЫВАЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Среди неограниченных последовательностей имеются последовательности, называемые неограниченно возрастающими и неограниченно убывающими. Приведем примеры этих последовательностей.

Пример 1. Последовательность

(1) $$1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$$

обладает следующим свойством: всякий раз, как мы выберем какое-либо сколь угодно большое положительное число M, среди членов последовательности (1) найдется такой член, начиная с которого ее члены превосходят число M.

Например, если $M = 100$, то неравенство

$$n^2 > 100$$

будет выполняться при $n > 10$, т. е. начиная с $n = 11$; если $M = 1000$, то неравенство

$$n^2 > 1000$$

будет выполняться при $n > \sqrt{1000}$, т. е. начиная с $n = 32$; вообще неравенство

$$n^2 > M$$

будет выполняться при $n > \sqrt{M}$, т. е. начиная с наименьшего номера n, превосходящего число $\sqrt{M}$.

Пример 2. Последовательность

(2) $$1, \ 2, \ 5, \ 10, \ \ldots, \ n^2 - 2n + 2, \ldots$$

обладает тем же свойством: если M есть какое-либо сколь угодно большое положительное число, то среди членов последовательности (2) найдется такой член, начиная с которого ее члены превосходят число M.

В самом деле, так как

$$n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1,$$

то неравенство

$$n^2 - 2n + 2 > M$$

может быть заменено неравенством

$$(n-1)^2 + 1 > M;$$

оно будет выполняться при

$$n > \sqrt{M-1} + 1,$$

где $M > 1$, т. е. начиная с наименьшего номера n, превосходящего число $\sqrt{M-1} + 1$.

Например, если $M = 101$, то $n > 11$; в самом деле, при $n = 12$ общий член последовательности (2) имеет значение 122, превосходящее число 101.

Впрочем, о ходе изменения членов последовательностей (1) и (2) можно заключить из геометрических соображений. Ведь графики этих последовательностей представляют собой совокупности тех точек, которые принадлежат ветви кривой $y = x^2$ и ветви кривой $y = x^2 - 2x + 2$, соответствующим промежутку $[1, \infty)$ независимой переменной x, а в этом промежутке обе изображаемые этими кривыми функции неограниченно возрастают.

Пример 3. Последовательность

(3) $\quad 1, 4, 3, 6, 5, 8, \ldots n + [1 + (-1)^n], \ldots$

обладает тем же свойством, что и последовательности (1) и (2): каждому сколь угодно большому числу M соответствует такой член этой последовательности, начиная с которого ее члены превосходят число M.

Для нахождения номера этого члена достаточно решить неравенство

$$n + [1 + (-1)^n] > M$$

по отношению к n. Так как

$$n + [1 + (-1)^n] \geqslant n,$$

то предыдущее неравенство можно заменить неравенством

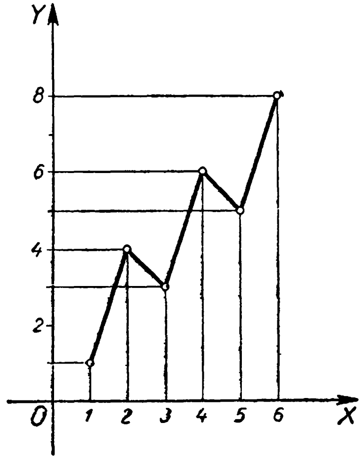
$$n > M.$$

Например, если $M = 50$, то члены последовательности (3) превосходят число 50, начиная с 51-го члена, равного числу 51.

Определение. Последовательность, обладающая тем свойством, что каждому сколь угодно большому положительному числу M соответствует такой член этой последовательности, начиная с которого ее члены превосходят число M, называется неограниченно возрастающей или стремящейся к $+\infty$ (плюс бесконечности).

Очевидно, что каждая возрастающая, но не ограниченная сверху последовательность есть последовательность, стремящаяся к $+\infty$.

Таковы последовательности (1), (2), приведенные в примерах 1 и 2. Но последовательность (3) — не возрастающая, но все же стремящаяся к $+\infty$. Ход изменения ее членов наглядно представлен на чертеже 91.



Черт. 91

Пример 4. Последовательность

$$(4) \qquad -1, -4, -9, \ldots, -n^2, \ldots$$

обладает следующим свойством: каждому сколь угодно большому положительному числу M соответствует такой член этой последовательности, начиная с которого ее члены становятся меньше, чем отрицательное число $-M$.

Например, если $M = 100$, то неравенство

$$-n^2 < -100$$

будет выполняться при $n^2 > 100$, т. е. при $n > 10$; если $M = 1000$, то неравенство

$$-n^2 < -1000$$

будет выполняться при $n^2 > 1000$, т. е. при $n > 31$; вообще неравенство

$$-n^2 < -M$$

будет выполняться при $n^2 > M$, т. е. при $n > \sqrt{M}$.

Определение. Последовательность, обладающая тем свойством, что каждому сколь угодно большому положительному числу M соответствует такой член этой последовательности, начиная с которого ее члены становятся меньше, чем отрицательное число $-M$, называется неограниченно убывающей или стремящейся к $-\infty$ (минус бесконечности).

Очевидно, что каждая убывающая, но не ограниченная снизу последовательность есть последовательность, стремящаяся к $-\infty$. Такова последовательность (4), приведенная в примере 4.

Замечание. Очевидно, что если последовательность a_n стремится к $+\infty$, то последовательность $\{-a_n\}$ стремится к $-\infty$, так как из неравенства $a_n > M$ следует неравенство $-a_n < -M$.

Пример 5. Доказать, что последовательность $\{2^n\}$ — неограниченно возрастающая.

Для доказательства этого предварительно установим, что при $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеет место неравенство

$$(1) \qquad 2^n > n.$$

1) При $n = 1$ и $n = 2$ неравенство верно, так как $2 > 1$, $4 > 2$.

2) Допустим, что неравенство (1) верно при $n = k$, где $k > 1$:

$$2^k > k. \tag{2}$$

Тогда оно будет верно также при $n = k + 1$:

$$2^{k+1} > k + 1. \tag{3}$$

В самом деле, из неравенства (2) следует, что

$$2^{k+1} > 2k,$$

а $2k > k + 1$, так как, по условию, $k > 1$.

3) Так как неравенство (1) верно при $n = 2$, то оно верно при $n = 3, 4, 5, \dots$.

Из неравенства (1) непосредственно следует, что последовательность $\{2^n\}$ — неограниченно возрастающая.

В самом деле, для того чтобы степень 2^n превзошла данное сколь угодно большое число M, достаточно, чтобы показатель n был больше, чем M, так как в силу неравенства (1) при $n > M$ будет и $2^n > M$.

Так как $2^n > n$, то $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$, т. е. $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n}$. Принимая во внимание, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ имеет предел 0, из этого неравенства заключаем, что и последовательность $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ имеет предел 0.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что последовательность $\{3n-1\}$ стремится к $+\infty$, а последовательность $\{1-3n\}$ стремится к $-\infty$.

2. Доказать, что последовательность $\{n^2-2n-1\}$ стремится к $+\infty$, а последовательность $\{1+2n-n^2\}$ стремится к $-\infty$.

3. Доказать, что последовательность $\{-n-[1+(-1)^n]\}$ стремится к $-\infty$.

4. Доказать, что последовательность $\{a^n\}$, где $a > 2$, — неограниченно возрастающая.

5. Доказать, что последовательность $\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n\right\}$ — неограниченно возрастающая.

ГЛАВА VII

ПЕРЕМЕННЫЕ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

§ 1. ПЕРЕМЕННАЯ, ОБЛАСТЬЮ ИЗМЕНЕНИЯ КОТОРОЙ СЛУЖИТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

1. **Переменная x_n.** Как было установлено в главе VI, последовательности в большинстве случаев задаются своим общим членом, представляющим собой некоторое выражение $f(n)$, которое содержит букву n, обозначающую номер места, занимаемого членом последовательности. Если мы обозначим через x_n переменную, определяемую равенством

$$x_n = f(n),$$

то эта переменная будет являться функцией от независимой переменной n и будет иметь областью своих значений последовательность

$$f(1),\ f(2),\ f(3), \ldots, f(n), \ldots .$$

Очевидно, что каждая из последовательностей, заданных некоторым общим членом $f(n)$, может быть рассматриваема как область значений некоторой переменной x_n.

Например, если переменная x_n определяется равенством

$$x_n = \frac{n}{n+1},$$

то областью ее изменения служит последовательность $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

Примеры. 1) Переменные величины, областью изменения которых служат последовательности, изучаются в геометрии в связи с разысканием длины окружности и площади круга.

Если мы впишем в данную окружность правильный многоугольник, а затем будем неограниченно удваивать число его сторон, то мы получим последовательность многоугольников, стороны, периметры, апофемы, центральные и внутренние углы которых будут иметь некоторые последовательности значений. Таким образом, при неограниченном удвоении числа сторон вписанного в окружность правильного многоугольника эти величины являются переменными, каждая из которых принимает определенную последовательность значений.

2) В арифметике рассматриваются переменные x_n, определяемые, например, равенствами:

$$(1) \qquad x_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

и

$$(2) \qquad x_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2.$$

Покажем, что каждую из сумм $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$ и $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ можно представить в виде, более удобном для вычисления их.

Легко видеть, что если мы пожелаем все слагаемые суммы (1) сделать равными между собой и именно равными последнему слагаемому n, то придется прибавить к ней сумму $(n-1) + (n-2) + \dots + 1$, так как тогда окажется, что

$$1 + (n-1) = 2 + (n-2) = 3 + (n-3) = \dots = (n-2) + 2 = \\ = (n-1) + 1 = n.$$

Поэтому имеет место равенство

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n + (n-1) + (n-2) + \dots \\ \dots + 3 + 2 + 1 = n \cdot n = n^2$$

так что

$$2[1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1)] = n^2 - n = (n-1)n$$

и

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) = \frac{(n-1)\,n}{2};$$

следовательно,

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{(n-1)\,n}{2} + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Таким образом, равенство (1) может быть заменено равенством

$$x_n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Равенство (2) может быть заменено равенством

$$x_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

В том, что

$$(3) \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

убедимся, пользуясь методом математической индукции*.

---

* Формулу (3) можно вывести также, последовательно полагая в тождестве $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ букву k равной 1, 2, 3,..., n, а затем почленно складывая полученные равенства; из равенства, которое мы этим путем найдем, и определяется искомая сумма квадратов n первых натуральных чисел.

1°. При $n = 1$ и $n = 2$ формула (3) верна:

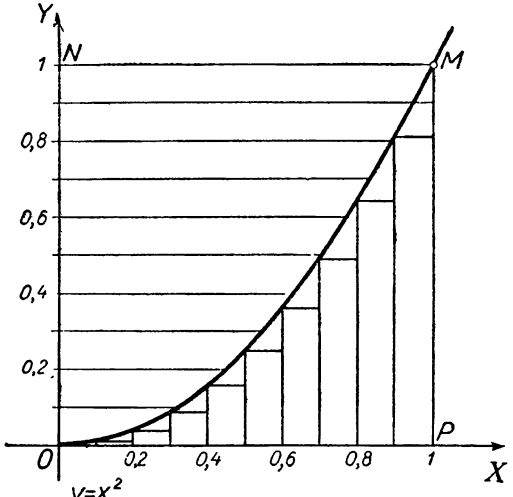
$$1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6};\quad 1^2 + 2^2 = \frac{2\cdot 3\cdot 5}{6}.$$

2°. Если верно равенство (3), то верно и равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6},$$

так что формула (3), верная для n слагаемых, оказывается верной и для $(n+1)$ слагаемых.



X	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Y	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1

Черт. 92

3°. Но формула (3) верна при $n = 1$ и $n = 2$; следовательно, согласно п. 2°, она верна и при $n = 3, 4, 5, \ldots$, т. е. для любого числа слагаемых.

Примененный для доказательства леммы метод, состоявший в последовательном установлении положений 1°, 2°, 3°, носит название метода математической индукции.

3) К переменным, принимающим некоторую последовательность значений, прибегают неоднократно в геометрии и естествознании, когда можно нахождение точного значения некоторой непрерывной величины (площади, объема, давления, плотности и т. п.) свести к нахождению предела ее последовательных приближений.

Допустим, например, что требуется найти площадь фигуры OMP (черт. 92), ограниченной снизу осью OX, сверху — дугой параболы $y = x^2$ от ее вершины O до точки M с координатами $(1;1)$ и справа — ординатой PM точки M.

Для этого разобьем отрезок OP, имеющий длину 1, на n равных частей и построим на них прямоугольники, высотами которых служат ординаты точек параболы, имеющих абсциссы:

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\dots,\ \frac{n-2}{n},\ \frac{n-1}{n}.$$

Найдем сумму площадей Q_n этих прямоугольников. Принимая во внимание, что их высоты, как ординаты точек параболы $y = x^2$, имеют соответственно длины

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \left(\frac{3}{n}\right)^2,\dots,\ \left(\frac{n-2}{n}\right)^2,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,$$

последовательно получаем:

$$Q_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-2}{n}\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\cdot[1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2] =$$
$$= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Если мы теперь представим последнее равенство в виде

$$Q_n = \frac{1}{6}\cdot\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right),$$

то, замечая, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ стремится к нулю, заключим, что при неограниченном увеличении числа n отрезков, на которые мы разделили отрезок OP, сумма площадей всех получаемых этим путем прямоугольников стремится к числу $\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2$, т. е. к $\frac{1}{3}$. Очевидно, что этим числом в принятых единицах и выражается площадь Q фигуры OMP, т. е.

$$\text{пл. } OMP = \frac{1}{3}\,\text{пл. квадрата } ONMP.$$

Еще пример. Пусть резервуар, имеющий квадратное дно со стороной a и вертикальные стенки высотой h, наполнен до краев жидкостью (черт. 93). С какой общей силой давит жидкость на одну из стенок резервуара?

Разделим поверхность стенки на n горизонтальных полосок высотой $\frac{h}{n}$. Давление в каждой точке стенки сосуда равно весу вышележащего столба жидкости. Поэтому у нижнего края каждой из полосок давление на единицу площади будет равно соответственно:

$$w\cdot\frac{h}{n},\ w\cdot\frac{2h}{n},\ w\cdot\frac{3h}{n},\dots,\ w\cdot\frac{(n-1)h}{n},\ w\cdot\frac{nh}{n},$$

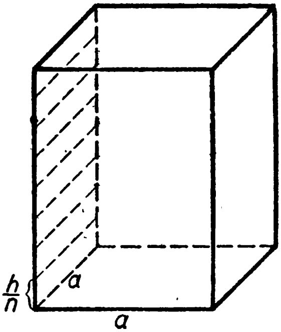
где w есть вес кубической единицы жидкости.

Считая, что давление изменяется не непрерывно, а скачкообразно и остается в пределах каждой полоски постоянным, и замечая, что площадь каждой полоски равна $\frac{ah}{n}$, мы получим следующее приближенное значение P_n искомой силы P:

$$P_n\approx\frac{ah}{n}\left[w\cdot\frac{h}{n}+w\cdot\frac{2h}{n}+w\cdot\frac{3h}{n}+\dots+w\cdot\frac{(n-1)h}{n}+w\cdot\frac{nh}{n}\right]=$$

$$=w\cdot\frac{ah^2}{n^2}\,[1+2+3+\dots+(n-1)+n]=w\cdot\frac{ah^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=w\cdot\frac{ah^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=w\cdot\frac{ah^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$



Черт. 93

Если мы теперь допустим, что число полосок n будет неограниченно увеличиваться, то, замечая, что последовательность $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ стремится к 1, заключим, что искомое давление P на каждую стенку сосуда равно $w\cdot\frac{ah^2}{2}$.

2. Виды переменных, областью изменения которых служат последовательности. Если областью изменения переменной x_n служит последовательность

(1) $$x_1,\ x_2\ x_3,\dots,\ x_n,\dots,$$

то в тех случаях, когда эта последовательность является: 1) возрастающей или убывающей, 2) ограниченной сверху или снизу, 3) ограниченной, 4) имеющей предел, 4) неограниченно возрастающей (стремящейся к $+\infty$) или неограниченно убывающей (стремящейся к $-\infty$), соответствующее название дается и переменной x_n.

Если переменная x_n, заданная равенством $x_n=f(n)$, при неограниченном возрастании переменной n имеет предел a, то это записывают так:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

Из класса переменных, имеющих пределы, выделим подкласс переменных, стремящихся к пределу 0.

Определение 1. Переменная, стремящаяся к пределу 0, называется бесконечно малой переменной.

Из класса переменных, не имеющих пределов, выделим подкласс переменных, стремящихся к $+\infty$ или $-\infty$.

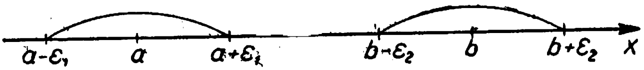
Определение 2. Переменная, стремящаяся к $+\infty$, и переменная, стремящаяся к $-\infty$, называются бесконечно большими переменными.

3. Свойства переменных, областью изменения которых служат последовательности.

Теорема 1. Переменная x_n может стремиться только к одному пределу.

Доказательство. Допустим, что переменная x_n стремится к двум различным пределам a и b, где $a < b$.

Это значит, что, каким бы малым промежутком $(a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1)$ мы ни окружили число a и каким бы малым промежутком $(b-\varepsilon_2, b+\varepsilon_2)$ мы ни окружили число b, все значения переменной x_n, начиная с некоторого из них, будут попадать в каждый из этих промежутков (черт. 94). Но это не может случиться, так как указанные промежутки можно выбрать настолько малыми, чтобы они полностью лежали один вне другого и, следовательно, не имели ни одной общей точки. Таким образом, допущение, что переменная x_n стремится к двум различным пределам, надо отвергнуть.



Черт. 94

Теорема 2, выражающая признак существования предела переменной x_n.

1°. Если переменная возрастает, но ограничена сверху, то она имеет предел.

2°. Если переменная убывает, но ограничена снизу, то она имеет предел.

Мы примем это предложение без доказательства, но поясним его справедливость на примере.

1. Допустим, что некоторая переменная x_n возрастает, но ограничена сверху числом 4, так что $x_n < 4$.

Пусть при этом $x_{15} > 3$. Очевидно, что тогда все бесконечное множество значений переменной x_n, за исключением значений $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$, содержится в промежутке $(3\ldots4)$.

Если мы разделим промежуток $(3\ldots4)$ на 10 равных частей, то может случиться, что в промежутке $(3{,}9\ldots4)$ уже нет значений переменной x_n; тогда мы испытаем промежуток $(3{,}8\ldots3{,}9)$; если и в нем уже не содержатся значения переменной x_n, то рассмотрим промежуток $(3{,}7\ldots3{,}8)$.

Допустим, что, продолжая последовательно рассматривать справа налево промежутки, на которые мы разделили промежуток (3...4), мы найдем, что в промежутке (3,7...3,8) нет значений переменной x_n, а в промежутке (3,6...3,7) содержится бесконечное множество этих значений. Тогда мы разделим промежуток (3,6...3,7) на 10 равных частей и подвергнем испытанию каждый из промежутков, образовавшихся после этого второго деления.

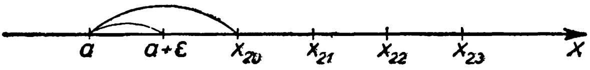
Если окажется, что, например, промежуток (3,64...3,65) еще содержит значения переменной x_n, а промежуток (3,65...3,66) уже не содержит их, то разделим на 10 равных частей промежуток (3,64,...3,65) и последовательно подвергнем испытанию справа налево промежутки, образовавшиеся после этого нового деления.

Продолжая этот процесс последовательного деления промежутков и нахождения промежутка, в котором содержится бесконечное множество значений переменной x_n, мы получим бесконечную последовательность промежутков, которые имеют соответственно длины $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$ и каждый из которых содержится в предыдущем промежутке. Эта последовательность промежутков определит некоторую бесконечную десятичную дробь 3,64..., которая и будет пределом переменной x_n, так как в каждом промежутке, окружающем число 3,64..., будет содержаться бесконечное множество значений этой переменной, а вне этого промежутка — лишь конечное число их.

Аналогичные соображения могут пояснить вывод предложения 2°.

Примечание. Если возрастающая, но ограниченная сверху переменная x_n имеет предел a, то этот предел больше каждого из значений переменной x_n; если убывающая, но ограниченная снизу переменная y_n имеет предел b, то этот предел меньше каждого из значений переменной y_n.

В самом деле, если бы какое-либо из значений переменной x_n, например значение x_{20}, было больше, чем предел a, то и все следующие за ним значения $x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots$ были бы больше, чем предел a; но тогда



Черт. 95

(черт. 95) все значения переменной x_n, начиная со значения x_{20}, не могли бы падать ни в один из промежутков $(a, a+\varepsilon)$, длина которого меньше, чем разность $x_{20} - a$, так что число a не было бы пределом переменной x_n.

С помощью таких же рассуждений можно прийти к выводу, что $b < y_n$.

4. Теоремы о бесконечно малых переменных.

Теорема 1. Если α_n и β_n — бесконечно малые переменные, то и сумма их $\alpha_n + \beta_n$ есть бесконечно малая переменная.

Доказательство. Возьмем какое-нибудь сколь угодно малое положительное число ε. Так как, по условию, $\lim \alpha_n = 0$, то существует число ν_1, обладающее тем свойством, что при $n > \nu_1$ выполняется неравенство

$$(1) \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < \alpha_n < \frac{\varepsilon}{2};$$

точно так же из условия $\lim \beta_n = 0$ следует, что существует число ν_2, обладающее тем свойством, что при $n > \nu_2$ выполняется неравенство

$$(2) \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < \beta_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, если мы возьмем такое число ν, которое превосходит как число ν_1, так и число ν_2, то при условии $n > \nu$ будет выполняться каждое из неравенств (1) и (2) и, следовательно, неравенство

$$(3) \qquad -\varepsilon < \alpha_n + \beta_n < \varepsilon,$$

которое получается путем почленного сложения этих неравенств.

Мы пришли к тому выводу, что для **каждого** сколь угодно малого положительного числа ε можно так выбрать соответствующее ему число ν, чтобы при $n > \nu$ выполнялось неравенство (3), а это и значит, что $\lim (\alpha_n + \beta_n) = 0$, т. е. что $\alpha_n + \beta_n$ есть бесконечно малая переменная.

Пример. Переменные

$$\frac{(-1)^n}{2n} \text{ и } \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1} \text{ —}$$

бесконечно малые. Возьмем какое-нибудь положительное число ε. Решая неравенство

$$\frac{1}{2n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

находим:

$$2n > \frac{2}{\varepsilon}; \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно, для каждого сколь угодно малого положительного числа ε неравенство

$$(1) \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{(-1)^n}{2n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполняется при $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Решая неравенство

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{\varepsilon}{2},$$

последовательно получаем:

$$\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}; \quad n > \frac{2}{\varepsilon}.$$

Следовательно, для каждого сколь угодно малого положительного числа ε неравенство

$$-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

имеет место при $n>\frac{2}{\varepsilon}$.

Но $\frac{2}{\varepsilon}>\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому при условии $n>\frac{2}{\varepsilon}$ выполняется каждое из неравенств (1) и (2) и, следовательно, неравенство

$$-\varepsilon<\frac{(-1)^n}{2n}+\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}<\varepsilon,$$

а это значит, что переменная

$$\frac{(-1)^n}{2n}+\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$$

также бесконечно малая.

Теорема 2. Если α_n — бесконечно малая переменная, то и произведение числа k на эту переменную есть бесконечно малая переменная.

Доказательство. Так как $\lim\alpha_n=0$, то существует число ν, обладающее тем свойством, что при $n>\nu$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{|k|},$$

где ε — любое сколь угодно малое положительное число. Но отсюда следует, что при том же условии $n>\nu$ выполняется и неравенство

$$|k\alpha_n|<\varepsilon,$$

а это значит, что переменная $k\alpha_n$ — бесконечно малая.

Например, умножая бесконечно малую переменную $\frac{1}{n}$ на числа ±5, ±100, $\pm20\,000$, получим бесконечно малые переменные

$$\pm\frac{5}{n},\ \pm\frac{100}{n},\ \pm\frac{20\,000}{n}.$$

Следствие 1. Если α_n — бесконечно малая переменная, то $-\alpha_n$ — также бесконечно малая переменная.

Это непосредственно следует из теоремы 2, так как $-\alpha_n=(-1)\,\alpha_n$.

Следствие 2. Алгебраическая сумма нескольких бесконечно малых переменных — также бесконечно малая переменная.

Например, для 3 бесконечно малых переменных α_n, β_n, γ_n это следует из равенства

$$\alpha_n-\beta_n+\gamma_n=[\alpha_n+(-\beta_n)]+\gamma_n,$$

так как согласно следствию 1 и теореме 1 переменные $(-\beta_n)$ и $\alpha_n+(-\beta_n)$ — бесконечно малые переменные.

Следствие 3. Если α_n, β_n, γ_n — бесконечно малые переменные, а k, l, m — действительные числа, то и сумма $k\alpha_n+l\beta_n+m\gamma_n$ есть бесконечно малая переменная.

Это непосредственно следует из теоремы 2 и следствия 2.

Теорема 3. Если α_n и β_n — бесконечно малые переменные, то и произведение их $\alpha_n\beta_n$ есть бесконечно малая переменная.

Доказательство. Возьмем какое-нибудь сколь угодно малое положительное число ε. Так так, по условию, $\lim \alpha_n = 0$, то существует число ν_1, обладающее тем свойством, что при $n>\nu_1$ выполняется неравенство

$$(1) \qquad |\alpha_n|<\varepsilon.$$

С другой стороны, из условия $\lim \beta_n = 0$ следует, что существует число ν_2, обладающее тем свойством, что при $n>\nu_2$ выполняется неравенство

$$(2) \qquad |\beta_n|<1.$$

Поэтому, если мы возьмем такое число ν, которое превосходит как число ν_1, так и число ν_2, то при условии $n>\nu$ будет выполняться каждое из неравенств (1) и (2) и, следовательно, неравенство

$$|\alpha_n|\cdot|\beta_n|<\varepsilon,$$

которое получается путем почленного перемножения этих неравенств. Заменяя это неравенство неравенством

$$(3) \qquad |\alpha_n\beta_n|<\varepsilon,$$

приходим к выводу, что для каждого сколь угодно малого положительного числа ε можно так выбрать соответствующее ему число ν, чтобы при $n>\nu$ выполнялось неравенство (3), а это значит, что $\lim(\alpha_n\beta_n)=0$, т. е. что $\alpha_n\beta_n$ есть бесконечно малая переменная.

Пример. Переменные

$$\frac{(-1)^n}{2n-1} \text{ и } \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ — бесконечно малые.}$$

Решая неравенство

$$\frac{1}{2n-1}<\varepsilon,$$

последовательно находим:

$$2n-1>\frac{1}{\varepsilon},\quad 2n>1+\frac{1}{\varepsilon},\quad n>\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Следовательно, для каждого сколь угодно малого положительного числа ε неравенство

$$(1) \qquad \left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|<\varepsilon$$

начинает выполняться при $n > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Решая неравенство

$$\frac{1}{n^2} < 1,$$

последовательно находим:

(2) $$n^2 > 1,\ n > 1.$$

Следовательно, неравенство

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < 1$$

выполняется при $n > 1$.

Очевидно что, если

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) > 1,$$

т. е. если $\varepsilon < 1$, то при условии $n > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ выполняется каждое из неравенств (1) и (2) и, следовательно, неравенство

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right| \cdot \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| < \varepsilon,$$

которое можно записать в виде

(3) $$\frac{1}{(2n-1)\,n^2} < \varepsilon.$$

Итак, каждому сколь угодно малому положительному числу ε соответствует число $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$, обладающее тем свойством, что при $n > \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ выполняется неравенство (3). Поэтому переменная $\frac{1}{(2n-1)\,n^2}$ — бесконечно малая.

Например, если $\varepsilon = \frac{1}{100}$, то неравенство (3) имеет место при $n > 50$.

Следствие 1. Если α_n, β_n, γ_n — бесконечно малые переменные, то и произведение $\alpha_n\beta_n\gamma_n$ — бесконечно малая переменная.

В самом деле, так как

$$\alpha_n\beta_n\gamma_n = (\alpha_n\beta_n)\cdot\gamma_n,$$

то, применяя теорему 3 сначала к произведению $\alpha_n\beta_n$, а затем к произведению $(\alpha_n\beta_n)\cdot\gamma_n$, придем к требуемому выводу.

Следствие 2. Если α_n — бесконечно малая переменная, то и степень α_n^m этой переменной с целым положительным показателем m — бесконечно малая переменная.

В самом деле, принимая во внимание, что степень α_n^m есть произведение m сомножителей, на основании следствия 1 заключаем, что эта степень — бесконечно малая переменная.

Теорема 4. Если переменная α_n стремится к $+\infty$, то переменная $\frac{1}{\alpha_n}$ — бесконечно малая.

Доказательство. Переменная α_n стремится к $+\infty$; это значит, что если M есть какое-либо положительное число, то можно выбрать натуральное число ν так, чтобы при $n > \nu$ выполнялось неравенство

$$\alpha_n > M > 0.$$

Поэтому, если мы примем $M = \frac{1}{\varepsilon}$, где ε — какое-либо сколь угодно малое положительное число, то при $n > \nu$ будет выполняться неравенство

$$0 < \frac{1}{\alpha_n} < \varepsilon;$$

следовательно, $\frac{1}{\alpha_n}$ есть бесконечно малая переменная.

Следствие. Если переменная α_n стремится к $-\infty$, то переменная $\frac{1}{\alpha_n}$ — бесконечно малая.

В самом деле, если переменная α_n стремится к $-\infty$, то переменная $(-\alpha_n)$ стремится к $+\infty$ (замечание на стр. 290).

Поэтому, согласно теореме 4, переменная $\frac{1}{(-\alpha_n)}$ — бесконечно малая. Но

$$\frac{1}{(-\alpha_n)} = -\frac{1}{\alpha_n}.$$

Значит, и переменная $\frac{1}{\alpha_n}$ — бесконечно малая (следствие 1 к теореме 2).

Теорема 5. Если переменная α_n — бесконечно малая, принимающая только положительные значения, то переменная $\frac{1}{\alpha_n}$ стремится к $+\infty$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\alpha_n > 0$, то существует натуральное число ν, обладающее тем свойством, что если ε есть какое-либо положительное число, то при $n > \nu$ имеет место неравенство

$$0 < \alpha_n < \varepsilon.$$

Поэтому если мы примем $\varepsilon = \frac{1}{M}$, где M есть какое-либо сколь угодно большое положительное число, то при $n > \nu$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{\alpha_n} > M > 0;$$

следовательно, переменная $\frac{1}{\alpha_n}$ стремится к $+\infty$.

Следствие. Если переменная α_n — бесконечно малая, принимающая только отрицательные значения, то переменная $\frac{1}{\alpha_n}$ стремится к — ∞.

В самом деле, так как $(-\alpha_n)$ есть бесконечно малая переменная, принимающая только положительные значения, то переменная $\frac{1}{(-\alpha_n)}$, согласно теореме 5, стремится к $+\infty$. Но

$$\frac{1}{(-\alpha_n)} = -\frac{1}{\alpha_n},$$

а если $\left(-\frac{1}{\alpha_n}\right) \to \infty$, то $\frac{1}{\alpha_n} \to -\infty$ (замечание на стр. 290).

Пример. Так как переменная a^n, где $a \geqslant 2$, стремится к $+\infty$(стр. 291), то переменная $\frac{1}{a^n}$, т.е. $\left(\frac{1}{a}\right)^n$, при том же условии $a \geqslant 2$ стремится к нулю.

Позже будет доказано, что переменная a^n стремится к $+\infty$, а переменная $\left(\frac{1}{a}\right)^n$ — к нулю уже при условии $a > 1$.

5. Теоремы о пределах переменных. В основу доказательства теорем о пределах переменных мы положим следующую лемму.

Лемма. Если переменная x_n стремится к пределу a, то разность $x_n - a$ между этой переменной и ее пределом a стремится к нулю; обратно, если разность $x_n - a$ между переменной x_n и ее пределом a стремится к нулю, то переменная x_n стремится к пределу a.

Доказательство. Если $\lim x_n = a$, то существует число ν, обладающее тем свойством, что при $n > \nu$ имеют место неравенства

$$(1) \qquad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

где ε — какое-либо сколь угодное малое положительное число. Но отсюда следует, что при том же условии $n > \nu$ выполняются неравенства

$$(2) \qquad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon,$$

а это значит, что $\lim (x_n - a) = 0$.

Обратно, если при $n > \nu$ имеют место неравенства (2), то при том же условии $n > \nu$ выполняются неравенства (1), а это значит, что $\lim x_n = a$.

Если мы обозначим разность $x_n - a$ между переменной x_n и ее пределом через α_n, т. е. положим $x_n - a = \alpha_n$ и, следовательно, представим переменную x_n в виде суммы $a + \alpha_n$, то предыдущую лемму можно будет сформулировать так:

Для того чтобы переменная x_n стремилась к пределу a, необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде суммы $a+\alpha_n$, где α_n есть переменная, стремящаяся к 0, т. е. бесконечно малая.

Теорема 1. Если переменная x_n имеет предел a, а переменная y_n — предел b, то сумма x_n+y_n этих переменных имеет предел $a+b$.

Доказательство. Так как

$$x_n=a+\alpha_n,\quad y_n=b+\beta_n,$$

где α_n и β_n — бесконечно малые переменные, то

$$x_n+y_n=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n).$$

Но $\alpha_n+\beta_n$ — бесконечно малая переменная (теорема 1, п. 4); поэтому переменная x_n+y_n имеет предел $(a+b)$ (лемма).

Теорема 2. Если переменная x_n имеет предел a, то произведение kx_n этой переменной на число k имеет предел ka.

Доказательство. Так как

$$x_n=a+\alpha_n,$$

где α_n — бесконечно малая переменная, то

$$kx_n=ka+k\alpha_n.$$

Но $k\alpha_n$ — бесконечно малая переменная (теорема 2, п. 4); поэтому переменная kx_n имеет предел ka (лемма).

Теорема 3. Если переменная x_n имеет предел a, а переменная y_n —предел b, то произведение $x_n y_n$ этих переменных имеет предел ab.

Доказательство. Так как

$$x_n=a+\alpha_n,\quad y_n=b+\beta_n,$$

где α_n и β_n — бесконечно малые переменные, то

$$x_n y_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+(b\alpha_n+a\beta_n+\alpha_n\beta_n).$$

Но $b\alpha_n$, $a\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$ и, следовательно, $b\alpha_n+a\beta_n+\alpha_n\beta_n$ — бесконечно малые переменные (теоремы 2 и 3, п. 4); поэтому переменная $x_n y_n$ имеет предел ab (лемма).

Следствие 1. Эту теорему можно распространить на несколько переменных x_n, y_n, z_n, применяя ее сначала к переменным x_n и y_n, затем к переменным $x_n y_n$ и z_n и т. д.

Следствие 2. Если переменная x_n имеет предел a, то степень x_n^m этой переменной с целым положительным показателем m имеет предел a^m.

Это вытекает из того, что степень x_n^m есть произведение m сомножителей, каждый из которых имеет предел a.

Теорема 4. Если переменная y_n имеет предел b, отличный от нуля, то переменная $\frac{1}{y_n}$ имеет предел $\frac{1}{b}$.

Доказательство. Так как

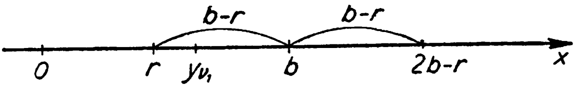
$$y_n = b + \beta_n,$$

где β_n — бесконечно малая переменная, то

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b+\beta_n} = \frac{\beta_n}{b(b+\beta_n)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\beta_n}{y_n}.$$

Докажем, что $\frac{\beta_n}{y_n}$ есть бесконечно малая переменная.

Пусть для определенности $b > 0$. Возьмем некоторое положительное число r, меньшее, чем b (черт. 96).



Черт. 96

Из условия $\lim y_n = b$, где $b > 0$, следует, что существует некоторое число ν_1, обладающее тем свойством, что при $n > \nu_1$ выполняется неравенство

$$y_n > r > 0;$$

отсюда следует, что при $n > \nu_1$ верно также неравенство

$$\frac{1}{y_n} < \frac{1}{r}. \tag{1}$$

С другой стороны, из условия $\lim \beta_n = 0$ следует, что существует некоторое число ν_2, обладающее тем свойством, что при $n > \nu_2$ выполняется неравенство

$$|\beta_n| < r\varepsilon, \tag{2}$$

где ε — сколь угодно малое положительное число.

Поэтому если мы возьмем такое число ν, которое превосходит как число ν_1, так и число ν_2, то при условии $n > \nu$ будет выполняться каждое из неравенств (1) и (2) и, следовательно, неравенство

$$\frac{1}{y_n} \cdot |\beta_n| < \frac{1}{r} \cdot r\varepsilon,$$

т. е. неравенство

$$\left|\frac{\beta_n}{y_n}\right| < \varepsilon,$$

а это доказывает, что переменная $\frac{\beta_n}{y_n}$ — бесконечно малая.

Но отсюда следует, что и разность $\frac{\beta_n}{by_n}$ между переменной $\frac{1}{y_n}$ и числом $\frac{1}{b}$ также есть бесконечно малая, т. е. что

$$\lim \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}.$$

Теорема 5. Если переменная x_n имеет предел a, а переменная y_n—отличный от нуля предел b, то отношение (частное) $\frac{x_n}{y_n}$ этих переменных имеет предел $\frac{a}{b}$.

Доказательство. Так как

$$\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n},$$

а предел переменной $\frac{1}{y_n}$ есть $\frac{1}{b}$ (теорема 4), то предел переменной $\frac{x_n}{y_n}$ равен произведению $a \cdot \frac{1}{b}$, т. е. отношению $\frac{a}{b}$ (теорема 3).

Рассмотрим ряд примеров.

1) Так как $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ и $\lim \frac{n+1}{n} = 1$,

то

$$\lim \left(\frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n}\right) = 2.$$

Если бы пределы слагаемых не были известны, то их можно было бы найти, заметив, что

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \text{ и } \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

и что переменные $\left(-\frac{1}{n+1}\right)$ и $\frac{1}{n}$ — бесконечно малые (п. 5, лемма).

2) Так как

$$\lim \frac{2^{n+1}+1}{2^n} = 2, \quad \lim \frac{3n^2+1}{n^2+3} = 3,$$

то

$$\lim \frac{(2^{n+1}+1)(3n^2+1)}{2^n(n^2+3)} = 6.$$

Если бы пределы сомножителей не были известны, то их можно было бы найти, заметив, что

$$\frac{2^{n+1}+1}{2^n}=2+\frac{1}{2^n},$$

$$\frac{3n^2+1}{n^2+3}=\frac{3n^2+9-8}{n^2+3}=3-\frac{8}{n^2+3}$$

и что переменные $\frac{1}{2^n}$ и $-\frac{8}{n^2+3}$ — бесконечно малые (п. 5, лемма).

3) Так как

$$\lim\frac{3n^2+1}{1-n^2}=-3,\ \lim\frac{3n+1}{1-n}=-3,$$

то

$$\lim\left(\frac{3n^2+1}{1-n^2}:\frac{3n+1}{1-n}\right)=1.$$

Этот предел можно было бы найти и непосредственно, принимая во внимание, что

$$\frac{3n^2+1}{1-n^2}:\frac{3n+1}{1-n}=\frac{3n^2+1}{(n+1)(3n+1)}=\frac{3+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}$$

и что переменные $\frac{1}{n^2}$ и $\frac{1}{n}$ — бесконечно малые.

4) Для нахождения предела переменных

$$\frac{1}{n}:\frac{1}{n^2}\text{ и }\frac{1}{n^2}:\frac{1}{n}$$

нельзя применить теорему 5, так как предел каждого из делителей $\frac{1}{n^2}$ и $\frac{1}{n}$ равен нулю. Но если мы, выполнив деление, представим эти переменные соответственно в виде n и $\frac{1}{n}$, то найдем, что первая стремится к $+\infty$, а вторая имеет предел 0.

5) Для нахождения предела переменной

$$\frac{n}{n+1}:\frac{1}{n}$$

нельзя применить теорему 5, так как предел делителя $\frac{1}{n}$ равен нулю. Но если мы, выполнив деление, представим данную переменную сначала в виде $\frac{n^2}{n+1}$, а затем в виде $\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$, то найдем, что при $n \to \infty$ знаменатель этой дроби, принимающий только положительные значения, стремится к 0 и, следовательно, вся дробь стремится к $+\infty$ (п. 4, теорема 5).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти пределы переменных:

$$\frac{3n^3+n+1}{2n^3+n}, \quad \frac{3n^3+n+1}{2n^4+n}.$$

Ответ. $\frac{3}{2}$, 0.

2. Доказать, что переменная

$$\frac{3n^3+n+1}{2n^2+n}$$

стремится к $+\infty$.

3. Из рассмотрения примеров 1 и 2 найти условия, при которых отношение многочленов, целых относительно буквы n будет стремиться: 1) к пределу, отличному от нуля (какому?), 2) к пределу, равному нулю, 3) к $+\infty$.

6. Переменная a^n. Рассмотрим степень a^n, основанием которой служит отличное от нуля число a, а показатель неограниченно возрастает, пробегая последовательность 1, 2, 3,... натуральных чисел.

Могут представиться следующие случаи:

1) Если $a > 1$, то при неограниченном возрастании показателя n степень a^n есть неограниченно возрастающая переменная, т. е.

$$a^n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty.$$

Для того чтобы доказать это предложение, предварительно докажем лемму.

Лемма. Если $\alpha > 0$, а n — натуральное число, то имеет место неравенство

$$(1+\alpha)^n > 1+n\alpha. \tag{1}$$

Доказательство. 1°. В том, что неравенство (1) справедливо при $n=2$ и $n=3$, мы можем легко убедиться непосредственно из равенств:

$$(1+\alpha)^2 = 1+2\alpha+\alpha^2 \quad \text{и} \quad (1+\alpha)^3 = 1+3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3;$$

в самом деле, отбрасывая в правой части этих равенств соответственно положительные числа α^2 и $3\alpha^2+\alpha^3$, мы приходим к неравенствам

$$(1+\alpha)^2 > 1+2\alpha \quad \text{и} \quad (1+\alpha)^3 > 1+3\alpha.$$

2°. Теперь допустим, что неравенство (1) справедливо для какого-либо определенного целого положительного показателя m, т. е. что имеет место неравенство

$$(1+\alpha)^m > 1+m\alpha.$$

Умножив обе части этого неравенства на положительное число $(1+\alpha)$, мы получим неравенство

$$(1+\alpha)^{m+1} > 1+(m+1)\alpha+m\alpha^2.$$

Отбрасывая в правой части положительное число $m\alpha^2$, мы этим уменьшим ее, а потому тем более

$$(1+\alpha)^{m+1} > 1+(m+1)\alpha.$$

Итак, предположив, что неравенство (1) имеет место при $n=m$, мы доказали, что оно выполняется при $n=m+1$.

3°. Но при $n=2$ и $n=3$ неравенство (1) справедливо; следовательно, на основании только что доказанного оно справедливо при $n=4$; выполняясь при $n=4$, оно выполняется при $n=5$ и т. д.; таким образом, неравенство (1) имеет место при всяком натуральном значении показателя n.

Теперь перейдем к доказательству предложения 1).

Представив число a в виде суммы $1+\alpha$, где $\alpha>0$, заключаем, что для того, чтобы степень a^n, т. е. $(1+\alpha)^n$, была больше, чем какое-либо сколь угодно большое положительное число M, достаточно, чтобы имело место неравенство

$$1+n\alpha > M, \tag{2}$$

так как, согласно лемме, из этого неравенства следует и неравенство

$$(1+\alpha)^n > M. \tag{3}$$

Но неравенство (2) имеет место при условии, если

$$n > \frac{M-1}{\alpha},$$

т. е. если $n>\nu$, где ν есть натуральное число, превосходящее число $\frac{M-1}{\alpha}$; следовательно, при том же условии выполняется и неравенство (3).

Мы пришли к выводу, что, как бы велико ни было положительное число M, можно так выбрать натуральное число ν, чтобы при условии $n>\nu$ выполнялось неравенство

$$a^n > M,$$

а это означает, что при неограниченном возрастании показателя n переменная a^n стремится к $+\infty$.

2) Если $0<a<1$ или $-1<a<0$, т. е. $0<|a|<1$, то при неограниченном возрастании показателя n степень a^n стремится к нулю.

В самом деле, если $0<|a|<1$, то $\frac{1}{|a|}>1$. Поэтому при неограниченном возрастании показателя n степень $\left(\frac{1}{|a|}\right)^n$, т. е. переменная $\frac{1}{|a|^n}$, стремится к $+\infty$ (случай 1).

Но в таком случае переменная $|a^n|$ и, следовательно, переменная a^n стремится к нулю (п. 4, теорема 4).

Пример 1. $1{,}3^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Принимая во внимание, что $1{,}3^n=(1+0{,}3)^n>1+0{,}3n$, заключаем, что если $1+0{,}3\,n>M$, где M—какое-либо положительное число, то и $1{,}3^n>M$. Например, $1{,}3^n>100$ при $n>330$; $1{,}3^n>1000$ при $n>3330$ и т. д.

Возможно, что каждое из этих неравенств наступает и раньше, но при указанных условиях оно непременно имеет место.

Пример 2. $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{1{,}3}\right)^n=0$.

Это следует из того, что

$$\left(\frac{1}{1{,}3}\right)^n=\frac{1}{1{,}3^n} \quad \text{(п. 4, теорема 4.)}$$

7. Переменная $a^{\frac{1}{n}}$. Рассмотрим степень $a^{\frac{1}{n}}$, основанием которой служит положительное число a, при условии, что знаменатель n показателя $\frac{1}{n}$ неограниченно возрастает, пробегая последовательность 1,2,3,... натуральных чисел.

Докажем, что при этом условии степень $a^{\frac{1}{n}}$ стремится к пределу и что этим пределом служит число 1.

1) Если $a>1$, то $a^{\frac{1}{n}}>1$ (гл. II, § 3, п. 11) и $a^{\frac{1}{n}}-1>0$.

Требуется доказать, что для каждого положительного числа ε можно так выбрать соответствующее ему число ν, чтобы при $n>\nu$ выполнялось неравенство

$$a^{\frac{1}{n}}-1<\varepsilon, \tag{1}$$

т. е. неравенство

$$a^{\frac{1}{n}}<1+\varepsilon.$$

Для того чтобы найти это число ν, представим последнее неравенство в виде:

$$(2) \qquad (1+\varepsilon)^n > a$$

и воспользуемся леммой (п. 6). Из нее следует, что $(1+\varepsilon)^n > 1+n\varepsilon$; поэтому для решения неравенства (2) достаточно решить неравенство

$$1+n\varepsilon > a.$$

Выполнив это, находим, что неравенство (2) и, следовательно, неравенство (1) имеет место при $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, т. е. при $n > \nu$, где ν есть целое число, превосходящее число $\frac{a-1}{\varepsilon}$.

Итак, как бы мало ни было число ε, степень $a^{\frac{1}{n}}$, начиная с некоторого своего значения, будет отличаться от 1 меньше, чем на ε, а это значит, что

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

2) Если $0 < a < 1$, то $\frac{1}{a} > 1$. Поэтому $\lim \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$.

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \left[1 : \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = 1 : \lim \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = 1 : 1 = 1.$$

Очевидно, что теорема остается в силе и в том случае, если переменная n неограниченно возрастает, пробегая не всю последовательность натуральных чисел, а какую-либо ее часть, например, последовательность

$$\frac{1}{10^1}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots, \frac{1}{10^7}, \ldots .$$

В этом случае теорема примет вид:

Если $a > 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} a^{\frac{1}{10^n}} = 1$.

Пример 1. $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$.

Переменная $2^{\frac{1}{n}}$ пробегает последовательность значений

$$(1) \qquad 2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \ldots, \sqrt[n]{2}, \ldots .$$

Последовательность (1) — убывающая, так как $2^{\frac{1}{n+1}} < 2^{\frac{1}{n}}$; в самом деле, возводя обе части этого неравенства в степень $n(n+1)$, получаем верное неравенство $2^n < 2^{n+1}$.

Но $\sqrt[n]{2} > 1$, так как предположение $\sqrt[n]{2} \leqslant 1$ привело бы к неверному выводу $2 \leqslant 1^n$, т. е. $2 \leqslant 1$.

Поэтому убывающая последовательность (1) ограничена снизу числом 1. Согласно доказанному (п. 7), число 1 является ее пределом.

Пример 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$

Переменная $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$ пробегает последовательность значений

$$(2) \qquad \frac{1}{2},\ \sqrt{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}},\ \sqrt[4]{\frac{1}{2}},\ \ldots,\ \sqrt[n]{\frac{1}{2}},\ \ldots.$$

Последовательность (2) — возрастающая, так как $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n+1}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$; в самом деле, возводя обе части этого равенства в степень $n(n+1)$, получаем верное неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^n > \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Но $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} < 1$, так как предположение $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \geqslant 1$ привело бы к неверному выводу $\frac{1}{2} \geqslant 1^n$, т. е. $\frac{1}{2} \geqslant 1$. Поэтому возрастающая последовательность (2) ограничена сверху числом 1. Согласно доказанному (п. 7), число 1 является ее пределом.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что если $a > 0$, то $\lim\limits_{n\to-\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

Указание. Положить $n = -m$, где m — положительное натуральное число.

2. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n^2} = 0.$$

§ 2. НЕПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ ПЕРЕМЕННЫЕ

1. Понятие о непрерывно изменяющейся переменной. Переменные величины, которые участвуют в различных явлениях и процессах, по преимуществу изменяются непрерывно, т. е. в каждом из последовательно пробегаемых ими промежутков принимают все без исключения значения, принадлежащие этому промежутку, но не беспорядочно, а только возрастая или только убывая.

Ввиду такого поведения непрерывно изменяющейся переменной представляется возможным рассматривать все множество принимаемых ею значений как упорядоченное множество, т. е. говорить о значениях, которые следуют за каждым данным значением непрерывно изменяющейся переменной. Именно, если эта переменная x возрастает в данном промежутке, то за ее значением x_1, принадлежащим этому промежутку, следует каждое ее значение x_1' того же промежутка, удовлетворяющее неравенству $x_1' > x_1$; если же переменная x убывает в данном промежутке, то за ее значением x_1, принадлежащим этому промежутку, следует каждое ее значение x_1' того же промежутка, удовлетворяющее неравенству $x_1' < x_1$; наконец, если переменная пробегает последовательность промежутков, в которых она поочередно то возрастает, то убывает, то естественно считать, что каждое ее значение, принадлежащее $(n+1)$-му промежутку, следует за каждым ее значением, принадлежащим n-му промежутку.

Эти соглашения устанавливают смысл отношения «следует» между всеми значениями, принимаемыми непрерывно изменяющейся переменной, или, как говорят, упорядочивают множество ее значений. В силу этого важного свойства непрерывно изменяющейся переменной x она отличается от переменной, областью изменения которой служит последовательность, только тем, что хотя все значения переменной x следуют одно за другим в совершенно определенном порядке, но их нельзя пронумеровать; иначе говоря, сопоставляя между собой два значения x_1 и x_2 этой переменной, можно сказать, которое из них следует за другим, но если, например, x_2 следует за x_1, то это не значит, что x_2 непосредственно следует за x_1, т. е. занимает место с номером, на 1 большим; понятие «непосредственно следует», применимое к членам последовательности, к значениям непрерывно изменяющейся переменной x неприменимо; если значение x_2 этой переменной следует за ее значением x_1, то между значениями x_1 и x_2 заключено бесконечное множество значений x_1 переменной x, каждое из которых следует за тем же значением x_1.

Однако, как мы увидим дальше, это отличие непрерывно изменяющейся переменной от переменной, областью изменения которой служит последовательность, нисколько не мешает распространить на первую все понятия и предложения, установленные выше для второй, так как это перенесение основано на объединяющем оба вида переменных свойстве, принадлежащем множеству значений каждой из них, а именно — на упорядоченности этих множеств.

К непрерывно изменяющимся переменным величинам относятся, например: время, в течение которого происходит процесс; путь, проходимый движущимся телом; скорость движения тела; температура тела при тепловом воздействии на него; длина стержня или объем тела при его нагревании или охлаждении; объем газа при непрерывном изменении давления на него; температура воздуха и давление атмосферы с течением времени; количество тепла, приобретаемого или выделяемого телом под влиянием каких-либо причин, и многие другие.

В ряде этих и аналогичных примеров изменение величины происходит в виде некоторого непрерывного процесса, протекающего во времени и относящего каждому моменту времени некоторое состояние величины, характеризуемое в результате измерения ее определенным ее числовым значением.

При непрерывном изменении какой-либо величины весьма часто испытывают непрерывное изменение и другие величины, находящиеся в функциональной зависимости от первой. Например, при падении тела с какой-либо высоты изменяется путь, пройденный телом от начала падения, и скорость его; при изменении температуры нагреваемого металлического стержня изменяется его длина; при изменении давления, производимого на некоторую массу газа, изменяется его объем и т. п.

2. Область изменения. Если переменная x изменяется непрерывно, то областью ее изменения может служить:

1) все множество действительных чисел $(-\infty < x < +\infty)$, которое изображается множеством точек, заполняющих всю числовую ось;

2) числовой промежуток, имеющий только один конец — левый конец a или правый конец b; если при этом конец a включается в промежуток, то записывают: $a \leqslant x < \infty$, если же конец a не включается в промежуток, то записывают: $a < x < \infty$; в первом случае промежуток называется полуоткрытым, а во втором — открытым; точно так же записью $-\infty < x \leqslant b$ обозначают полуоткрытый промежуток, которому принадлежат все действительные числа, не превосходящие числа b, так что число b входит в промежуток, а записью $-\infty < x < b$ — открытый промежуток, которому принадлежат все числа, меньшие, чем b, так что число b не входит в промежуток;

3) числовой промежуток, имеющий левый конец a и правый конец b; при этом каждый из концов a и b может включаться или не включаться в промежуток, так что возможны 4 вида промежутков:

$a \leqslant x \leqslant b$ (закрытый, оба конца включаются);
$a \leqslant x < b$ (полуоткрытый, включается левый конец);
$a < x \leqslant b$ (полуоткрытый, включается правый конец);
$a < x < b$ (открытый, концы не включаются);

эти промежутки принято обозначать соответственно так: $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), ставя квадратную скобку у включенного конца.

Примеры. 1) Промежутку $3 \leqslant x < \infty$ принадлежат число 3 и все числа, большие, чем 3; он изображается одним из двух лучей, на которые ось OX делится точкой 3, именно тем лучом, вершиной которого служит точка 3 и направление которого совпадает с положительным направлением оси OX.

2) Промежутку $3 < x < \infty$ принадлежат все числа, большие, чем 3; он изображается той частью оси OX, которая расположена вправо от точки 3; эта часть может быть получена из луча, изображающего промежуток $3 \leqslant x < \infty$, путем исключения из него точки 3, служащей его вершиной.

3) Промежутку $3 \leqslant x \leqslant 8$ принадлежат числа 3 и 8 и все числа, большие, чем 3, и меньшие, чем 8; он изображается отрезком оси OX, определяемым точками 3 и 8.

4) Промежутку $3 \leqslant x < 8$ принадлежат число 3 и все числа, большие, чем 3, и меньшие, чем 8; он изображается частью числовой оси OX, которая содержит точку 3 и все внутренние точки отрезка, определяемого точками 3 и 8.

5) Промежутку $3 < x < 8$ принадлежат все числа, большие, чем число 3, и меньшие, чем число 8; он изображается частью числовой оси OX, которая содержит все внутренние точки отрезка, определяемого точками 3 и 8.

3. Понятие о пределе непрерывно изменяющейся переменной. На непрерывно изменяющуюся переменную x могут быть естественно распространены определения, установленные для переменной x_n, областью изменения которой служит последовательность.

Определение 1. Если число a обладает тем свойством, что каждому как угодно малому положительному числу ε соответствует такое значение x_1 переменной x, начиная с которого значения переменной x становятся принадлежащими промежутку $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, то число a называется пределом переменной x.

Иначе говоря, число a называется пределом переменной x, если для каждого как угодно малого положительного числа ε можно так выбрать соответствующее ему значение x_1 переменной x, чтобы все значения x_1' переменной x, следующие за x_1, удовлетворяли неравенству

$$|x_1' - a| < \varepsilon.$$

Теорема 1. Переменная x может стремиться только к одному пределу.

Доказательство ничем не отличается от доказательства этой теоремы для переменной x_n (стр. 297).

Определение 2. Переменная x, которая стремится к пределу 0, называется бесконечно малой переменной.

На бесконечно малые непрерывно изменяющиеся переменные распространяются теоремы, установленные (§1, п. 3, 4) для бесконечно малых переменных, областью изменения которых служат последовательности.

Теорема 2. Если x, y, z—бесконечно малые переменные, а k, l, m — действительные числа, то и сумма $kx + ly + mz$ есть бесконечно малая переменная.

Теорема 3. Если x, y, z — бесконечно малые переменные, то и произведение их xyz есть бесконечно малая переменная.

Теорема 4. Если x — бесконечно малая переменная, то и степень x^m этой переменной с целым положительным показателем m есть бесконечно малая переменная.

Для доказательства этих теорем пришлось бы по существу повторить доказательства теорем 1—3 (§1, п. 4), относящиеся к переменным x_n, y_n, z_n.

При этом надо иметь в виду, что под значениями $(x_1+y_1)'$, следующими за значением x_1+y_1 переменной $x+y$, надо понимать все те значения этой переменной, которые получаются посредством сложения значений x'_1 и y'_1, следующих соответственно за значениями x_1 и y_1, так что

$$(x_1+y_1)' = x_1' + y_1'.$$

Аналогично под значениями $(x_1y_1)'$, следующими за значением x_1y_1 переменной xy, надо понимать все те значения этой переменной, которые получаются посредством перемножения значений x'_1 и y'_1, следующих соответственно за значениями x_1 и y_1, так что

$$(x_1y_1)' = x_1' \cdot y'_1.$$

Пользуясь этими обозначениями, докажем для непрерывно изменяющихся переменных x и y следующую теорему, аналогичную теореме 1 (§ 1, п. 4).

Теорема 5. Если x и y — бесконечно малые переменные, то и сумма их $x+y$ есть бесконечно малая переменная.

Доказательство. Возьмем какое-нибудь сколь угодно малое положительное число ε. Так как, по условию, $\lim x = 0$, то числу $\frac{\varepsilon}{2}$ соответствует такое значение x_1 переменной x, начиная с которого значения переменной x становятся принадлежащими промежутку $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, так что имеют место неравенства

$$(1) \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < x_1' < \frac{\varepsilon}{2};$$

так как, по условию, $\lim y = 0$, то числу $\frac{\varepsilon}{2}$ соответствует такое значение y_1 переменной y, начиная с которого значения переменной y становятся принадлежащими промежутку $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, так что имеют место неравенства:

$$(2) \qquad -\frac{\varepsilon}{2} < y_1' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому имеют место и неравенства:

$$-\varepsilon < x_1' + y_1' < \varepsilon.$$

Но

$$x_1' + y_1' = (x_1 + y_1)';$$

отсюда следует, что

$$\varepsilon - < (x_1 + y_1)' < \varepsilon.$$

А это значит, что каждому как угодно малому положительному числу ε соответствует такое значение $x_1 + y_1$ переменной $x+y$, начиная с которого значения этой переменной становятся принадлежащими промежутку $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Следовательно, при выполнении условий теоремы $x + y$ есть бесконечно малая переменная, т. е.

$$\lim (x + y) = 0.$$

Определение 3. Переменная x, обладающая тем свойством, что каждому как угодно большому положительному числу M соответствует такое значение x_1 этой переменной, начиная с которого ее значения x_1' становятся превосходящими число M, называется неограниченно возрастающей или стремящейся к $+\infty$.

Определение 4. Переменная x, обладающая тем свойством, что каждому как угодно большому положительному числу M соответствует такое значение x_1 этой переменной, начиная с которого ее значения x_1' становятся меньше, чем отрицательное число $-M$, называется неограниченно убывающей или стремящейся к $-\infty$.

Очевидно, что если переменная x стремится к $+\infty$, то переменная $-x$ стремится к $-\infty$, так как из неравенства $x > M$ следует неравенство $-x < -M$.

Теорема 6. Если переменная x стремится к $+\infty$ или к $-\infty$, то переменная $\frac{1}{x}$ — бесконечно малая.

Теорема 7. Если переменная x — бесконечно малая, принимающая только положительные значения, то переменная $\frac{1}{x}$ стремится к $+\infty$; если же переменная x — бесконечно малая, принимающая только отрицательные значения, то переменная $\frac{1}{x}$ стремится к $-\infty$.

Доказательство этих теорем по существу ничем не отличается от доказательства теорем 4 и 5 (§ 1, п. 4).

Например, докажем первую часть теоремы 6. Пусть переменная x стремится к $+\infty$. Тогда, как бы велико ни было положительное число M, существует значение x_1 переменной x, обладающее тем свойством, что для всех значений x_1' переменной x, следующих за x_1, выполняется неравенство $x_1' > M$. Поэтому если мы примем $M = \frac{1}{\varepsilon}$, где ε — какое-либо как угодно малое положительное число, то для тех же значений x_1' переменной x будет выполняться неравенство

$$0 < \frac{1}{x_1'} < \varepsilon;$$

следовательно, $\frac{1}{x}$ есть бесконечно малая переменная.

4. Теоремы о пределах непрерывно изменяющихся переменных. На эти переменные полностью распространяются теоремы 1—5 о пределах переменных (§ 1, п. 5).

Теорема 1. Если переменные x, y, z имеют соответственно пределы a, b, c, а k, l, m—какие-либо действительные числа, то сумма $kx + ly + mz$ имеет предел $ka + lb + mc$.

Теорема 2. Если переменные x, y, z имеют соответственно пределы a, b, c, то произведение xyz этих переменных имеет предел abc.

Теорема 3. Если переменная x имеет предел a, то степень x^m этой переменной с целым положительным показателем m имеет предел a^m.

Теорема 4. Если переменная x имеет предел a, а переменная y— отличный от нуля предел b, то отношение (частное) этих переменных имеет предел $\frac{a}{b}$.

Доказательство этих теорем по существу не отличается от доказательства теорем 1—5 (§ 1, п. 5).

Пользуясь этими теоремами, мы часто можем находить предел функции от переменной x, стремящейся к какому-либо пределу a или к бесконечности ($+\infty$ или $-\infty$), так как в этом случае и сама функция становится переменной. Для того чтобы указать, что функция $f(x)$ имеет предел b при условии, что независимая переменная x стремится к пределу a, пишут:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

и читают: «Предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, равен b».

Впоследствии нам понадобится также следующая теорема.

Теорема 5. Если переменная x, принимающая в процессе своего изменения только положительные значения, имеет предел a, то этот предел есть положительное число или нуль.

В самом деле, если бы предел a был отрицательным числом, то можно было бы окружить число a такими промежутками вида $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, которые содержали бы только отрицательные числа и, следовательно, не содержали бы ни одного значения переменной x.

Примеры.

1) Найти предел функции $5x^3 - 3x^2 - x + 1$ при $x \to 2$.

Решение. Последовательно находим:

$\lim\limits_{x \to 2} [5x^3 - 3x^2 - x + 1] = 5 \cdot \lim x^3 - 3 \cdot \lim x^2 - \lim x + 1$ (теорема 1) $= 5 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 2 + 1$ (теорема 3) $= 27$.

2) Найти предел функции $(x^3 - 1)(2x + 3x^4)$ при $x \to -3$.

Решение. Последовательно находим:

$\lim\limits_{x \to -3} [(x^2 - 1)(2x + 3x^4)] = \lim (x^2 - 1) \cdot \lim (2x + 3x^4)$ (теорема 2) $= (\lim x^2 - 1) \cdot (2 \lim x + 3 \lim x^4)$ (теорема 1) $= (9 - 1)[2 \cdot (-3) + 3 \cdot 81]$ (теорема 3) $= 1896$.

3) Найти предел функции $\frac{3x^2 + 8}{1 - 4x^3}$ при $x \to 1$.

Решение. Последовательно находим:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2+8}{1-4x^2} = \frac{\lim (3x^2+8)}{\lim (1-4x^2)} \text{ (теорема 4)} = \frac{3 \lim x^2 + 8}{1 - 4 \lim x^2} \text{ (теорема 1)} =$$

$$= \frac{3 \cdot 1^2 + 8}{1 - 4 \cdot 1^2} \text{ (теорема 3)} = -\frac{11}{3}.$$

4) Найти

$$\lim_{x \to 4} \left[2(x+3) - \frac{x}{x-2} \right].$$

Последовательно получаем:

$$\lim_{x \to 1} \left[2(x+3) - \frac{x}{x-2} \right] = 2 \lim (x+3) - \lim \frac{x}{x-2} \quad \text{(теорема 1)} =$$

$$= 2 \cdot (\lim x + 3) - \frac{\lim x}{\lim x - 2} \text{ (теоремы 1, 4, 1)} =$$

$$= 2 \cdot (4+3) - \frac{4}{4-2} = 12.$$

5) Найти предел дроби $\frac{x}{x+1}$ при $x \to \infty$.

Решение. Так как

$$\frac{x}{x+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}},$$

а переменная $\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ стремится к 0 (п. 3, теорема 6), то предел знаменателя данной дроби при $x \to \infty$ равен 1, а предел всей дроби равен отношению $\frac{1}{1}$, т. е. 1.

6) Найти предел дроби $\frac{2x^2 - 5x + 4}{5x^2 - 2x + 3}$ при $x \to \infty$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель данной дроби на x^2, приведем ее к виду $\dfrac{2 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{5 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}$. Теперь последовательно получаем:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{5 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{2 - \lim \frac{5}{x} + \lim \frac{4}{x^2}}{5 - \lim \frac{5}{x} + \lim \frac{3}{x^2}} \text{ (теоремы 4,1)} = \frac{2-0+0}{5-0+0}$$

(теорема 6, п. 3) $= \frac{2}{5}$.

7) Найти предел дроби $\frac{x^2+2}{x^3}$ при $x \to \infty$.

Решение. Представив данную дробь в виде $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}$ и последовательно применяя теоремы 1 и 6 (п. 3), находим:

$$\lim_{x \to \infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}\right)=\lim\frac{1}{x}+\lim\frac{2}{x^3}=0+0=0.$$

8) Как ведет себя функция $y=\frac{1}{x}$ при неограниченном возрастании аргумента x?

Ответ. При $x \to +\infty$ дробь $\frac{1}{x}$ и, следовательно, функция y стремится к нулю. Частью графика этой функции в промежутке $(0, +\infty)$ служит ветвь гиперболы, расположенная в I квадранте и при $x \to +\infty$ асимптотически приближающаяся к оси OX.

9) Как ведет себя функция $y=\frac{1}{x}$ при неограниченном приближении аргумента x к 0 справа?

Ответ. При неограниченном приближении аргумента x к 0 справа он является бесконечно малой переменной, принимающей только положительные значения, ввиду чего дробь $\frac{1}{x}$ и, следовательно, функция y неограниченно возрастает, т. е. стремится к $+\infty$. Частью графика этой функции в промежутке $(0, +\infty)$ служит ветвь гиперболы, расположенная в I квадранте и при $x \to 0$ справа асимптотически приближающаяся к оси OY.

ГЛАВА VIII

ПРОГРЕССИИ

§ 1. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1. ***Определение.*** Последовательность, каждый член которой получается из предыдущего члена путем прибавления к нему некоторого постоянного для этой последовательности числа, называется арифметической прогрессией. Это постоянное число называется разностью арифметической прогрессии; оно обычно обозначается буквой d.

Для указания того, что последовательность есть арифметическая прогрессия, перед ней ставят знак $\div$. Так, последовательность

$$\div 3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ \ldots$$

есть арифметическая прогрессия; ее разность равна 4:

$$7-3=11-7=15-11=19-15=\ldots=4.$$

Вообще, если дана арифметическая прогрессия

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\quad a_n,\ a_{n+1},\ldots$$

с разностью d, то имеют место равенства:

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}=a_{n+1}-a_n=\ldots=d.$$

Из определения арифметической прогрессии следует, что каждый ее член, начиная со второго, есть среднее арифметическое число между двумя смежными с ним членами арифметической прогрессии. В самом деле, из равенства

$$a_n-a_{n-1}=a_{n+1}-a_n \tag{1}$$

следует, что

$$2a_n=a_{n-1}+a_{n+1},$$

т. е. что

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}. \tag{2}$$

Например, члены арифметической прогрессии

$$\div 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ 26,\ \ldots$$

связаны равенствами:

$$1 + 11 = 2 \cdot 6;\ 6 + 16 = 2 \cdot 11;\ 11 + 21 = 2 \cdot 16;\ 16 + 26 = 2 \cdot 21;\ \ldots$$

Так как — и обратно — из равенства (2) следует равенство (1), то имеет место предложение:

Для того чтобы 3 числа a, b, c, представляли собой последовательные члены арифметической прогрессии, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли соотношению $2b = a + c$, т. е чтобы число b было средним арифметическим между числами a и c.

Разностью арифметической прогрессии может служить любое число. Из определения возрастающей и убывающей последовательностей следует, что в зависимости от того, представляет ли собой разность d арифметической прогрессии положительное или отрицательное число, эта прогрессия есть возрастающая или убывающая последовательность. Поэтому если $d > 0$, то арифметическая прогрессия называется возрастающей, если же $d < 0$, то она называеся убывающей.

Например, прогрессия

$$\div -10,\ -7,\ -4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots$$

имеет разность 3; она — возрастающая; прогрессия

$$\div 10,\ 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ -8,\ \ldots$$

имеет разность —3; она — убывающая.

Если разность d арифметической прогрессии равна нулю, то все ее члены равны первому члену a_1; в этом случае прогрессия не будет ни возрастающей, ни убывающей.

2. Формула для n-го члена арифметической прогрессии. Арифметическая прогрессия вполне определяется ее первым членом a_1 и разностью d.

В самом деле, зная a_1 и d, можно написать сколько угодно последовательных членов арифметической прогрессии. Вместе с тем каждый член арифметической прогрессии может быть выражен и в зависимости от номера n занимаемого им места.

Для того чтобы найти эту зависимость, будем исходить из равенств:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d, \\ a_3 &= a_2 + d, \\ a_4 &= a_3 + d, \\ &\cdots\cdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d, \\ a_n &= a_{n-1} + d. \end{aligned}$$

Если мы эти $n-1$ равенств почленно сложим и затем в обеих частях полученного равенства

$$a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + d\,(n-1)$$

опустим одно и то же число

$$a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1},$$

то найдем равенство

$$a_n = a_1 + d\,(n-1), \tag{1}$$

выражающее следующее предложение:

Член арифметической прогрессии, занимающий n-ое место, получается посредством прибавления к ее первому члену a_1 разности прогрессии d, умноженной на число членов, предшествующих определяемому.

Равенство (1) указывает, что каждый член a_n арифметической прогрессии есть значение функции $a_1 + d\,(n-1)$, соответствующее тому значению независимой переменной n, которое указывает номер места, занимаемого членом a_n. Эта функция (гл. VI, § 1, п. 3) называется общим членом арифметической прогрессии.

Пример 1. Если дана арифметическая прогрессия

$$\div 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \dots,$$

членами которой служат все последовательные нечетные числа, то

$$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1,$$

т. е. n-е нечетное число имеет вид $2n-1$.

Пример 2. Если дана арифметическая прогрессия

$$\div 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \dots,$$

членами которой служат все последовательные четные числа, то

$$a_n = 2 + 2\,(n-1) = 2n,$$

т. е. n-ое четное число имеет вид $2n$.

Пример 3. Если

$a_1 = 6,\quad d = 4,\quad$ то $\quad a_n = 6 + 4\,(n-1) = 4n + 2;$

$a_1 = 9,\quad d = -5,\quad$ то $\quad a_n = 9 - 5\,(n-1) = -5n + 14;$

$a_1 = -4,\quad d = \frac{1}{2},\quad$ то $\quad a_n = -4 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}n - \frac{9}{2};$

$a_1 = -8,\quad d = -0{,}5,\quad$ то $\quad a_n = -8 - 0{,}5\,(n-1) = -0{,}5n - 7{,}5.$

Очевидно, что если дана арифметическая прогрессия

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3, \dots,\ a_n,\ \dots,$$

то формулу (1) можно применять для выражения каждого члена прогрессии в зависимости не только от первого члена a_1 и разности d, но и от любого из членов, предшествующих определяемому, и разности d. Например:

$$a_{20} = a_5 + d \cdot (20-5) = a_5 + 15d;$$
$$a_{20} = a_8 + d \cdot (20-8) = a_8 + 12d;$$
$$a_n = a_k + d \cdot (n-k), \text{ где } 1 < k < n.$$

Представляя равенство (1) в виде

$$a_n = dn + (a_1 - d),$$

заключаем, что n-й член арифметической прогрессии с первым членом a_1 и разностью d при $d \neq 0$ есть линейная функция от числа членов n. Поэтому арифметическая прогрессия может быть изображена совокупностью точек

$$(1;\ a_1),\quad (2;\ a_2),\quad (3;\ a_3),\ \ldots,\quad (n;\ a_n),\ \ldots,$$

т. е. точек

$$(1;\ a_1),\quad (2;\ a_1 + d),\quad (3;\ a_1 + 2d),\ \ldots,\ [n;\quad a_1 + d\,(n-1)], \ldots,$$

которые принадлежат прямой, имеющей уравнение

$$y = dx + (a_1 - d).$$

Например, прогрессия

$$\div 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ \ldots,\ 4n + 2,\ \ldots$$

изображается совокупностью точек, расположенных на прямой (черт. 97), имеющей уравнение

$$y = 4x + 2,$$

а прогрессия

$$\div 9,\ 4,\ -1,\ -6,\ \ldots,\ -5n + 14$$

изображается совокупностью точек, расположенных на прямой (черт. 98), имеющей уравнение

$$y = -5x + 14.$$

Равенство (1) связывает величины a_1, a_n, d и n. Если 3 из этих четырех величин известны (даны), то, рассматривая равенство (1) как уравнение, мы можем решить его по отношению к неизвестной четвертой величине:

$$a_1 = a_n - d\,(n-1),\ d = \frac{a_n - a_1}{n-1},\ n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1.$$

Рассмотрим ряд упражнений.

Задача 1. Между числами 5 и 38 вставить 10 средних арифметических, т. е. 10 таких чисел, которые вместе с крайними данными числами 5 и 38 составляли бы арифметическую прогрессию.

Решение. Так как прогрессия должна иметь всего 12 членов (2 крайних и 10 промежуточных), причем $a_1 = 5$, $a_{12} = 38$, то

$$d = \frac{a_{12} - a_1}{12 - 1} = \frac{38 - 5}{11} = 3.$$

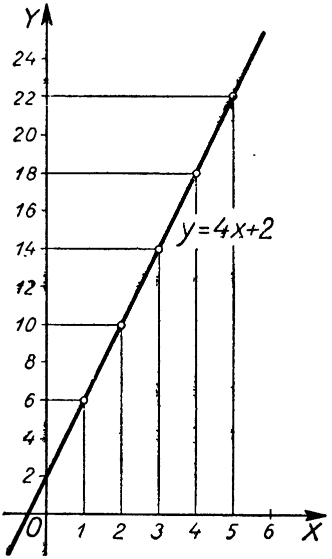
Следовательно, искомая прогрессия имеет вид:

$$\div 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29,\ 32,\ 35,\ 38.$$

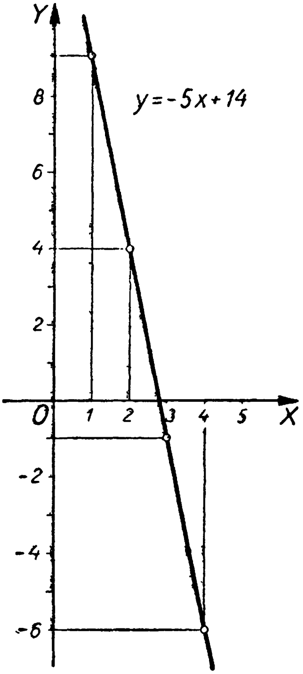
Вообще, если требуется между числами a и b вставить m средних арифметических, то задача сводится к нахождению разности d прогрессии при условии, что

$$n = m + 2,\quad a_1 = a,\quad a_n = b;$$

пользуясь для этого формулой $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$, находим, что $d = \frac{b - a}{m + 1}$.



Черт. 97



Черт. 98

Задача 2. Сумма второго и четвертого членов арифметической прогрессии равна 16, а произведение первого и пятого членов ее равно 28. Найти прогрессию.

1-й способ решения. Пользуясь формулой для a_n, запишем данные равенства

$$a_2 + a_4 = 16,\qquad a_1 a_5 = 28$$

в виде системы уравнений:

$$a_1 + 2d = 8,\quad a_1(a_1 + 4d) = 28.$$

Исключив из них $2d$, приходим к уравнению

$$a^2_1 - 16a_1 + 28 = 0;$$

отсюда получаем, что

$$a_1'=2, \qquad a_1''=14;$$

следовательно,

$$d'=3, \quad d''=-3.$$

Мы нашли две прогрессии:

$$\div 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14 \text{ и } \div 14,\ 11,\ 8,\ 5,\ 2.$$

2-й способ решения. Так как рассматривается 5, т. е. нечетное число членов прогрессии, то прибегнем к такому обозначению: обозначим средний из этой группы членов через x, после чего прогрессия примет вид:

$$x-2d,\ x-d,\ x,\ x+d,\ x+2d.$$

Теперь данные равенства

$$a_2+a_4=16, \quad a_1a_5=28$$

приводят к системе уравнений:

$$2x=16, \quad x^2-4d^2=28;$$

отсюда получаем, что

$$x=8, \quad d^2=9, \text{ т. е. } d_{1,2}=\pm 3.$$

Мы находим те же прогрессии:

$$\div 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14 \text{ и } \quad \div 14,\ 11,\ 8,\ 5,\ 2.$$

Вообще, в тех случаях, когда требуется найти арифметическую прогрессию с нечетным числом членов, удобно пользоваться обозначениями

$$\ldots\ x-3d,\ x-2d,\ x-d,\ x,\ x+d,\ x+2d,\ x+3d, \ldots,$$

которые мы применили при решении задачи 2 вторым способом.

3-й способ решения. Заметив, что

$$a_2+a_4=2a_1+4d=a_1+a_5,$$

приходим к системе уравнений:

$$a_1+a_5=16, \quad a_1a_5=28.$$

Для ее решения составляем квадратное уравнение

$$u^2-16u+28=0;$$

оно имеет корни:

$$u_1=2, \quad u_2=14,$$

т. е. либо $a_1=2$, $a_5=14$, либо $a_1=14$, $a_5=2$.

Но $a_5=a_1+4d$; поэтому в первом случае $d=3$, а во втором случае $d=-3$.

Задача 3. Найти стороны треугольника по его периметру $2p$ и площади S, зная, что длины этих сторон образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Обозначив стороны треугольника a, b, c соответственно через $x-d$, x, $x+d$, последовательно найдем:

$$2p=3x,\ p=\frac{3}{2}x,\ p-a=\frac{1}{2}x+d, p-b=\frac{1}{2}x,\ p-c=\frac{1}{2}x-d,$$

$$\frac{3}{2}x\cdot\left(\frac{1}{2}x+d\right)\cdot\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{1}{2}x-d\right)=S^2,$$

откуда, полагая $x=\frac{2p}{3}$, получаем уравнение для определения d.

3. Формула для суммы n последовательных членов арифметической прогрессии. Вывод этой формулы основан на следующей лемме.

Лемма. Каждая группа последовательных членов арифметической прогрессии обладает тем свойством, что сумма двух членов группы, равноотстоящих от ее крайних членов, равна сумме этих крайних членов.

Доказательство. Пусть

$$\div a,\ b,\ c,\dots,\ g,\dots,\ h,\dots,\ i,\ k,\ l$$

будет арифметическая прогрессия с разностью d и пусть члену g предшествует p членов, а за членом h следует p членов этой прогрессии. Определяя член g по формуле для n-го члена, имеем:

(1) $$g=a+pd.$$

По той же формуле (см. стр. 325) находим, что $l=h+pd$ и, следовательно, что

(2) $$h=l-pd.$$

Почленно складывая равенства (1) и (2), приходим к выводу, что

$$g+h=a+l.$$

Теорема. Сумма любого числа последовательных членов арифметической прогрессии равна полусумме ее крайних членов, умноженной на число членов.

Доказательство. Пусть

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3,\dots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

будут n последовательных членов арифметической прогрессии. Обозначив сумму этих членов через S_n, напишем два равенства:

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\dots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n,$$
$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\dots+a_3+a_2+a_1.$$

Если мы теперь почленно сложим их и заметим, что, согласно лемме, имеют место n равенств

$$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\dots=a_{n-2}+a_3=a_{n-1}+a_2=a_n+a_1,$$

то найдем, что $2S_n=(a_1+a_n)\cdot n$,

т. е. что

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Мы вывели формулу, связывающую величины a_1, a_n, n и S_n.

Пример 1. Сумма n первых членов натурального ряда чисел, т. е. сумма

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n,$$

равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Пример 2. Сумма n первых нечетных чисел, т. е. сумма

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1),$$

равна

$$\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2.$$

Пример 3. Возьмем тождество

$$n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3n^2+3n.$$

Положив в нем последовательно $n=1$, $n=2$, $n=3,\ldots$, $n=n$, получим n равенств:

$$\begin{aligned}
&1\cdot2\cdot3-0\cdot1\cdot2=3\cdot1^2+3\cdot1,\\
&2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3=3\cdot2^2+3\cdot2,\\
&3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4=3\cdot3^2+3\cdot3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n=3(n-1)^2+3(n-1),\\
&n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3n^2+3n.
\end{aligned}$$

Почленно сложив эти равенства и обозначая сумму $1+2+3+\ldots+n$ через S_1, а сумму $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ через S_2, после упрощений получим равенство

$$n(n+1)(n+2)=3S_2+3S_1,$$

из которого следует, что

$$S_2=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Пример 4. Найти сумму n первых членов последовательности

$$1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ldots,n(n+1),\ldots\ .$$

Решение. Заметив, что

$$n(n+1)=n^2+n,$$

мы можем представить по этой формуле каждый член данной последовательности:

$$\begin{aligned}
&1\cdot2=1^2+1,\\
&2\cdot3=2^2+2,\\
&3\cdot4=3^2+3,\\
&\cdots\cdots\\
&n(n+1)=n^2+n.
\end{aligned}$$

Почленно складывая эти равенства, последовательно получим:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=S_2+S_1=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

4. Типы задач на арифметическую прогрессию. Величины a_1, a_n, d, n, S_n связаны двумя формулами:

$$(1)\quad a_n=a_1+d(n-1)\quad\text{и}\quad(2)\quad S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

Поэтому если значения трех из этих пяти величин даны, то соответствующие им значения двух остальных величин определятся из формул (1) и (2), составляющих систему независимых уравнений с двумя неизвестными.

С помощью этой системы уравнений можно решить 10 задач, состоящих в нахождении значений следующих пар величин:

1) d, S_n;
2) a_1, d; a_1, S_n; a_n, d; a_n, S_n; d, n; n, S_n;
3) a_1, a_n; a_1, n; a_n, n.

В случае 1) каждое из уравнений системы содержит только одну из искомых величин; они находятся независимо одна от другой:

$$d=\frac{a_n-a_1}{n-1},\quad S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

В случае 2) одно из уравнений системы содержит только одну из искомых величин, а другое — обе. Очевидно, что сначала надо решить то уравнение, которое содержит только одну неизвестную величину, а затем уже решать второе уравнение; например, если ищутся величины n и S_n, то последовательно находим:

$$n=\frac{a_n-a_1}{d}+1;\quad S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

В случае 3) приходится решать систему двух уравнений, из которых каждое содержит 2 неизвестных. При этом для нахождения величин a_1 и a_n решаем такую систему линейных уравнений:

$$(3\text{a})\qquad a_n+a_1=\frac{2S_n}{n},\quad a_n-a_1=d(n-1),$$

а для нахождения величин a_1, n и величин a_n, n — систему, которая состоит из одного линейного и одного квадратного уравнения и решается способом подстановки. Именно: для нахождения величин a_1, n получаем систему:

$$(3\text{b})\qquad a_1=a_n-d(n-1),\quad S_n=[2a_n-d(n-1)]\frac{n}{2},$$

а для нахождения величин a_n, n — систему:

$$(3\text{c})\qquad a_n=a_1+d(n-1),\quad S_n=[2a_1+d(n-1)]\frac{n}{2}.$$

Очевидно, что каждая из систем (3a), (3b), (3c) равносильна системе (1)—(2). Системами (3b) и (3c) удобно пользоваться только для нахождения величин a_1, n и a_n, n.

Задачи групп 1) и 2) и первая задача группы 3) приводятся к алгебраическим уравнениям первой степени; напротив, вторая и третья задачи группы 3) — к квадратным уравнениям.

Пример 1. $a_1=-12$, $d=3$, $S_n=15$; найти a_n и n.

Решение. Из второго уравнения системы (3c) последовательно находим:

$$15=[-24+3(n-1)]\frac{n}{2};\quad 3n^2-27n-30=0;\quad n^2-9n-10=0;$$

отсюда

$$n_1=-10,\quad n_2=10.$$

Для ответа на задачу годится только число 10; поэтому $a_n=15$.

Пример 2. $a_{10}=15$, $d=3$, $S_{10}=15$; найти a_1 и n.

Решение. Из второго уравнения системы (3*b*) последовательно находим:

$$15=[30-3(n-1)]\frac{n}{2};\quad 3n^2-33n+30=0;\quad n^2-11n+10=0;$$

отсюда $n_1=1$, $n_2=10$.

Для ответа на задачу годится только число 10; поэтому $a_1=-12$.

Пример 3. Найти разность арифметической прогрессии, зная, что ее первый член есть a и что сумма n первых членов ее равна an^2.

Решение. Так как n-й член прогрессии не дан, то воспользуемся формулой (3c):

$$[2a+d(n-1)]\frac{n}{2}=an^2.$$

Упрощаем ее:

$$2a+d(n-1)=2an.$$

Так как это равенство должно иметь место при всех значениях числа членов n, то полагаем $n=2$ и находим, что $d=2a$.

Пример 4. Крайними членами арифметической прогрессии служат числа -5 и $+25$. Найти два члена прогрессии, равноотстоящие от крайних, зная, что их произведение равно 36.

Решение. Обозначая искомые члены через x и y, составляем систему уравнений:

$$x+y=20,\quad xy=36;$$

из нее находим, что $x=2$, $y=18$ или $x=18$, $y=2$.

Пример 5. Доказать, что если числа x, y, z — три последовательных члена арифметической прогрессии, то и числа

$$x^2+xy+y^2,\quad z^2+zx+x^2,\quad y^2+yz+z^2$$

обладают тем же свойством.

Решение. Исходя из равенства $2y=x+z$, с помощью подстановки доказываем справедливость равенства

$$2(z^2+zx+x^2)=(x^2+xy+y^2)+(y^2+yz+z^2).$$

Пример 6. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то этот треугольник — пифагоров*.

Решение. Обозначая длины сторон треугольника через $x-d$, x, $x+d$, приходим к равенству $(x-d)^2+x^2=(x+d)^2$; отсюда находим, что $x=4d$; поэтому стороны треугольника имеют длины $3d$, $4d$, $5d$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, зная, что сумма n первых членов ее равна $n(3n+1)$.

Ответ. $a_1=4$, $d=6$.

2. Найти 4 первых члена арифметической прогрессии, зная, что $a_1a_4=22$, $a_2a_3=40$.

3. Найти объем прямоугольного параллелепипеда, зная, что полная поверхность его равна 166 *см*^{2} и что длины трех ребер его, исходящих из одной и той же вершины, образуют арифметическую прогрессию и в сумме составляют 18 *см*.

Ответ. 66 *см*^{3}.

4. Длины трех сторон треугольника составляют арифметическую прогрессию с разностью d; отношение площади этого треугольника к площади прямоугольника, построенного на средней и меньшей стороне треугольника, равно $\frac{1}{2}$. Найти длины сторон треугольника.

Ответ. $3d$, $4d$, $5d$; треугольник — пифагоров.

5. Сумма трех последовательных членов арифметической прогрессии равна 111, а сумма их квадратов равна 4157. Найти эти члены.

Ответ. 32, 37, 42 или 42, 37, 32.

6. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, то радиус окружности, вписанной в треугольник, равен разности этой прогрессии.

Указания к упражнениям 3—6. Искомые члены прогрессии обозначить через $x-d$, x, $x+d$.

7. Доказать, что если числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ образуют арифметическую прогрессию, то этим же свойством обладают числа c^2, a^2, b^2.

Указание. Исходить из равенства $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}=\frac{2}{b+c}$.

8. Доказать, что квадраты чисел

$$a^2-2a-1,\ a^2+1,\ a^2+2a+1$$

составляют арифметическую прогрессию.

9. Могут ли числа 12, 20, 35 служить членами арифметической прогрессии?

Решение. Полагая, что число 12 есть первый член арифметической прогрессии, а числа 20 и 35 занимают в ней соответственно m-е и n-е места, составляем систему уравнений:

---

* То есть длины его сторон пропорциональны числам 3, 4, 5.

$$20 = 12 + d(m-1), \quad 35 = 12 + d(n-1),$$

где d — разность прогрессии. Исключая из этих уравнений d, находим уравнение

$$\frac{m-1}{n-1} = \frac{8}{23}.$$

Полагая $m-1=8k$, $n-1=23k$, где k — целое число, получаем для m и n формулы:

$$m = 8k+1, \quad n = 23k+1.$$

Давая в них параметру k произвольные целые значения, будем каждый раз находить соответствующие значения для m и n.

Например:

1) если $k=1$, то $m=9$, $n=24$, $d=1$; прогрессия имеет вид:

$$12,\ 13,\ 14, \ldots,\ 20, \ldots,\ 35, \ldots;$$

2) если $k=2$, то $m=17$, $n=47$, $d=\frac{1}{2}$; прогрессия имеет вид:

$$12,\ 12\frac{1}{2},\ 13, \ldots,\ 20, \ldots,\ 35, \ldots \text{ и т. д.}$$

3) если $k=3$, то $m=25$, $n=70$, $d=\frac{1}{3}$; прогрессия имеет вид:

$$12,\ 12\frac{1}{3},\ 12\frac{2}{3}, \ldots,\ 20, \ldots,\ 35, \ldots, \text{ и т. д.}$$

10. Найти сумму n первых членов последовательности

$$1\cdot 3,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 5, \ldots,\ n(n+2), \ldots.$$

Указание. $n(n+2) = n^2 + 2n$.

Ответ. $\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$.

ВОПРОСЫ

1. Какую функцию числа n членов арифметической прогрессии представляет собой: 1) ее n-й член; 2) сумма S_n ее n членов?

2. Какую последовательность образуют числа, выражающие суммы углов треугольника, четырехугольника, пятиугольника и т. д.

3. Какую последовательность образуют члены данной арифметической прогрессии, занимающие: 1) нечетные места, 2) четные места, 3) места, номера которых кратны числа 3?

4. Какую последовательность образуют суммы соответственных членов нескольких данных арифметических прогрессий?

5. Может ли сумма конечного числа членов арифметической прогрессии быть равной нулю?

6. Может ли в арифметической прогрессии сумма всех ее членов быть равной последнему члену?

7. В какой арифметической прогрессии сумма двух любых ее членов является членом той же прогрессии?

8. Как, зная сумму n последовательных членов арифметической прогрессии, найти сумму следующих n ее членов?

9. Могут ли: 1) углы вписанного в окружность четырехугольника, 2) длины сторон описанного около окружности четырехугольника образовывать арифметическую прогрессию?

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1. *Определение.* Последовательность, каждый член которой получается из предыдущего члена путем умножения его на некоторое постоянное для этой последовательности число, называется геометрической прогрессией. Это постоянное число называется знаменателем геометрической прогрессии; он обычно обозначается буквой q.

Для указания того, что последовательность есть геометрическая прогрессия, перед этой последовательностью ставят знак ∺.

Так, последовательность

$$∺ 1,\ 3,\ 9,\ 27, \ldots$$

есть геометрическая прогрессия; ее знаменатель равен 3:

$$3 : 1 = 9 : 3 = 27 : 9 = \ldots = 3.$$

Вообще, если дана геометрическая прогрессия

$$∺ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1}, \ldots$$

со знаменателем q, то

$$a_2 : a_1 = a_3 : a_2 = \ldots = a_n : a_{n-1} = a_{n+1} : a_n = \ldots = q.$$

Из определения геометрической прогрессии следует, что каждый ее член, начиная со второго, есть среднее геометрическое число между двумя смежными с ним членами геометрической прогрессии. В самом деле, из равенства

(1) $$a_n : a_{n-1} = a_{n+1} : a_n$$

следует, что

$$a^2_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1},$$

т. е. что $a_{n-1} \cdot a_{n+1} > 0$ и

(2) $$a_n = \mp \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}},$$

где знак + соответствует случаю, когда $a_n > 0$, а знак — случаю, когда $a_n < 0$.

Например, члены геометрической прогрессии

$$∺ 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96, \ldots$$

связаны равенствами:

$$3 \cdot 12 = 6^2;\quad 6 \cdot 24 = 12^2;\quad 12 \cdot 48 = 24^2;\quad 24 \cdot 96 = 48^2, \ldots,$$

а члены геометрической прогрессии

$$∺ 3, -6,\ 12, -24,\ 48, -96, \ldots$$

— равенствами:

$$3 \cdot 12 = (-6)^2;\ (-6) \cdot (-24) = 12^2;\ 12 \cdot 48 = (-24)^2;$$
$$(-24) \cdot (-96) = 48^2, \ldots .$$

Так как — и обратно — из равенства (2) следует равенство (1), то имеет место предложение:

Для того чтобы 3 числа a, b, c представляли собой последовательные члены геометрической прогрессии, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли соотношению $b^2=ac$, т. е. чтобы число b было средним геометрическим между числами a и c.

Пример. Доказать, что если a, b, c — последовательные члены геометрической прогрессии, то они связаны соотношением:

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3.$$

Решение. Так как $b^2=ac$, то

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}=c^3+b^3+a^3.$$

Знаменателем геометрической прогрессии может служить любое число. На основании определения возрастающей и убывающей последовательности заключаем, что при условиях:

$$1)\ a_1>0,\ q>1 \quad\text{и}\quad 2)\ a_1<0,\ 0<q<1$$

геометрическая прогрессия есть возрастающая последовательность, а при условиях:

$$3)\ a_1>0,\ 0<q<1 \quad\text{и}\quad 4)\ a_1<0,\ q>1$$

геометрическая прогрессия есть убывающая последовательность.

Поэтому при условиях 1) и 2) геометрическая прогрессия называется возрастающей, а при условиях 3) и 4) — убывающей.

Например, геометрические прогрессии:

1) $\div\div\, 4, 20, 100, 500, 2500, \ldots$ и 2) $\div\div\, -81, -27, -9, -3, -1, \ldots$ — возрастающие, а прогрессии

3) $\div\div\, 81, 27, 9, 3, 1, \ldots$ и 4) $\div\div\, -4, -20, -100, -500, -2500, \ldots$ — убывающие.

5) Если $q<0$, то члены прогрессии, стоящие на нечетных местах, имеют тот же знак, что и ее первый член a_1, а члены, стоящие на четных местах, — противоположный знак. В этом случае прогрессия не является ни возрастающей, ни убывающей и называется знакопеременной. Такова, например, прогрессия $\div\div\, 1, -3, 9, -27, 81, \ldots$.

6) Если $q=1$, то все члены прогрессии равны ее первому члену a_1 и, следовательно, равны между собой.

7) Если $q=0$, то все члены прогрессии, начиная со второго, равны нулю.

Впредь мы будем предполагать, что $a_1\neq 0$ и $q\neq 0$, т. е. что все члены геометрической прогрессии отличны от нуля, так как прогрессия

$$\div\div\, 0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

не представляет интереса ни в теоретическом, ни в практическом отношении.

2. Формула для n-го члена геометрической прогрессии. Геометрическая прогрессия вполне определяется ее первым членом a_1 и знаменателем q. В самом деле, зная a_1 и q, можно написать сколько угодно последовательных членов геометрической прогрессии. Вместе с тем каждый член геометрической прогрессии может быть выражен и в зависимости от номера n занимаемого им места.

Для того чтобы найти эту зависимость, будем исходить из равенств:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q, \\ a_3 &= a_2 q, \\ a_4 &= a_3 q, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n-1} &= a_{n-2} q, \\ a_n &= a_{n-1} q. \end{aligned}$$

Если мы эти $n—1$ равенств почленно перемножим и затем обе части полученного равенства

$$a_2\, a_3\, a_4\, \ldots\, a_{n-1}\, a_n = a_1\, a_2\, a_3\, a_{n-2}\, a_{n-1}\, q^{n-1}$$

разделим на одно и то же отличное от нуля число $a_2\, a_3 \ldots a_{n-1}$, то найдем равенство

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \tag{1}$$

выражающее следующее предложение:

Каждый член геометрической прогрессии получается посредством умножения ее первого члена a_1 на знаменатель прогрессии q в степени, показатель которой равен числу членов, предшествующих определяемому.

Равенство (1) указывает, что каждый член a_n геометрической прогрессии есть значение функции $a_1 q^{n-1}$, соответствующее тому значению независимой переменной n, которое указывает номер места, занимаемого членом a_n. Эта функция (гл. VI, § 1, п. 3) называется общим членом геометрической прогрессии.

Пример 1. Если дана геометрическая прогрессия

$$\div\div 1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ \ldots,$$

то $a_n = 1 \cdot 10^{n-1} = 10^{n-1}$.

Пример 2. Если дана геометрическая прогрессия

$$\div\div 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8}, \ldots,$$

то $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Пример 3. Если

$a_1 = 4$, $q = 5$, то $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$;

$a_1 = —81$, $q = \frac{1}{3}$, то $a_n = (—81) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = —\frac{81}{3^{n-1}} = —\frac{3^4}{3^{n-1}} =$

$$= —3^{5-n};$$

$a_1 = 81$, $q = \frac{1}{3}$, то $a_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{81}{3^{n-1}} = \frac{3^4}{3^{n-1}} = 3^{5-n}$;

$a_1 = -4$, $q = 5$, то $a_n = (-4) \cdot 5^{n-1} = -4 \cdot 5^{n-1}$;

$a_1 = 1$, $q = -3$, то $a_n = 1 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^{n-1}$;

$a_1 = 8$, $q = 1$, то $a_n = 8 \cdot 1^{n-1} = 8$.

Из этих примеров мы еще раз заключаем, что геометрическая прогрессия может состоять: 1) только из положительных членов, 2) только из отрицательных членов и 3) из членов, имеющих определенный знак на нечетных местах и противоположный знак на четных местах.

Представляя равенство (1) в виде

(1a) $$a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n,$$

мы видим, что n-й член геометрической прогрессии с первым членом a_1 и знаменателем q есть функция от числа членов n, определяемая равенством (1a). Как мы узнаем позже (гл. IX, § 2), функция y, определяемая равенством

$$y = b^x, \text{ где } b > 0,$$

называется **показательной функцией**; она носит такое название по той причине, что каждое ее значение определяется значением **показателя** степени b^x, который и служит, таким образом, для этой функции y **независимой переменной**.

Если $q > 0$, то геометрическая прогрессия может быть изображена совокупностью точек

$$(1;\ a_1),\ (2;\ a_2),\ (3,\ a_3),\ \ldots,\ (n;\ a_n),\ \ldots,$$

т. е. точек

$$(1;\ a_1),\ (2;\ a_1q),\ (3;\ a_1q^2), \ldots,\ (n;\ a_1q^{n-1}), \ldots,$$

которые принадлежат кривой, служащей графиком уравнения

$$y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x.$$

Например, прогрессия

$$\div\, 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{27}{8}, \ldots,\ \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n, \ldots$$

изображается совокупностью точек, расположенных на кривой (черт. 99), имеющей уравнение

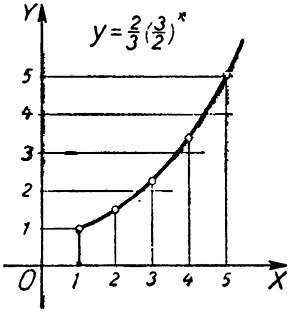
$$y = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x,$$

а прогрессия

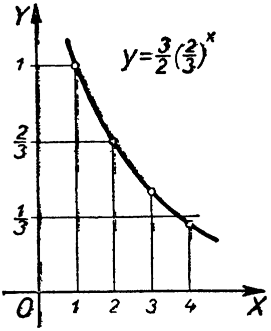
$$\div\, 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27}, \ldots,\ \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \ldots,$$

изображается совокупностью точек, расположенных на кривой (черт. 100), имеющей уравнение

$$y = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x.$$



Черт. 99



Черт. 100

Равенство (1) связывает величины a_1, a_n, q и n. Если 3 из этих четырех величин известны (даны), то, рассматривая равенство (1) как уравнение, мы можем решить его по отношению к неизвестной четвертой величине.

При этом нахождение неизвестных a_1 и q выполняется по формулам:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}, \quad q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}},$$

где правая часть есть алгебраический корень, а для нахождения неизвестной n сначала решают уравнение по отношению к степени q^{n-1}:

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1},$$

а затем, если отношение $\frac{a_n}{a_1}$ может быть представлено в виде степени основания q, находят $n - 1$ и n.

Рассмотрим ряд упражнений.

Задача 1. Между числами 1 и 16 вставить 3 средних геометрических, т. е. 3 таких числа, которые вместе с крайними данными числами 1 и 16 составили бы геометрическую прогрессию.

Решение. Так как прогрессия должна иметь всего 5 членов (2 крайних и 3 промежуточных), причем $a_1 = 1$, $a_5 = 16$, то

$$q^4 = 16, \quad q = \mp 2.$$

Следовательно, требованию удовлетворяют как числа 2, 4, 8, так и числа — 2, 4, — 8, составляющие с числами 1 и 16 соответственно прогрессии:

(1) $\div\div\, 1, 2, 4, 8, 16$ и 2) $\div\div\, 1, -2, 4, -8, 16.$

Вообще, если требуется между числами a и b вставить m средних геометрических, то задача сводится к нахождению знаменателя q прогрессии при условии, что

$$n = m + 2, \quad a_1 = a, \quad a_n = b;$$

пользуясь для этого формулой

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}},$$

находим, что

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},$$

где правая часть есть алгебраический корень.

Задача 2. **Найти четыре числа, составляющие геометрическую прогрессию, зная, что сумма крайних членов равна 27, а сумма средних равна 18.**

Решение. Пользуясь формулой (1), составляем систему уравнений

$$a_1 + a_1q^3 = 27, \qquad a_1q + a_1q^2 = 18.$$

Умножив обе части первого уравнения на 2, а обе части второго уравнения на 3, после чего правые части уравнений окажутся равными, почленно вычтем из первого результата второй; мы получим выводное уравнение

$$2a_1 + 2a_1q^3 = 3a_1q + 3a_1q^2;$$

так как уравнивающие множители 2 и 3, с помощью которых мы составили это уравнение, отличны от нуля, то мы имеем право заменить им любое из уравнений составленной системы.

Разделив все члены этого уравнения на отличное от нуля число a_1, что следует из уравнений системы, и перенеся их в левую часть, придадим уравнению сначала вид

$$2(q^3 + 1) \quad - 3q(q + 1) = 0,$$

а затем вид

$$(q + 1)\,(2q^2 - 5q + 2) = 0.$$

Это уравнение имеет корни:

$$q_1 = -1, \quad q_2 = \frac{1}{2}, \quad q_3 = 2.$$

Теперь из уравнения $a_1q\,(1 + q) = 18$ находим, что при $q = -1$ это уравнение не имеет решения, а значениям $q = \frac{1}{2}$ и $q = 2$ соответствуют значения $a_1 = 24$ и $a_1 = 3$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют две прогрессии:

$$\dot{\dot{\div}}\, 24,\ 12,\ 6,\ 3 \quad \text{и} \quad \dot{\dot{\div}}\, 3,\ 6,\ 12,\ 24.$$

Задача 3. Зная, что

$$a_1 = 32, \quad a_n = 3125, \quad q = \frac{5}{2},$$

найти n.

Из уравнения (1) находим, что

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} = \frac{3125}{32}.$$

Так как $\frac{3125}{32} = \left(\frac{5}{2}\right)^5$, то $n - 1 = 5$, $n = 6$.

3. Формула для суммы n последовательных членов геометрической прогрессии. Возьмем геометрическую прогрессию

$$\div\!\!\div a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n,$$

имеющую n членов и знаменатель q. Обозначая через S_n сумму этих n членов, напишем равенство:

$$(1) \qquad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Из него следует, что

$$S_n q = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-2}\, q + a_{n-1}\, q + a_n q.$$

Но, замечая, что

$$a_1 q = a_2, \; a_2 q = a_3, \; a_3 q = a_4, \; \ldots, \; a_{n-2}\, q = a_{n-1}, \; a_{n-1}\, q = a_n,$$

заменяем его равенством

$$(2) \qquad S_n q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n q.$$

Если мы теперь почленно вычтем из равенства (2) равенство (1), то получим, что

$$S_n (q - 1) = a_n q - a_1.$$

Отсюда, полагая, что $q \neq 1$, найдем искомую формулу

$$(3) \qquad S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1},$$

связывающую сумму n последовательных членов геометрической прогрессии с ее членами a_1 и a_n и знаменателем q.

Следовательно, сумма n последовательных членов геометрической прогрессии, знаменатель которой отличен от 1, равна дроби, числитель которой есть разность между произведением n-го члена на знаменатель прогрессии и первым членом ее, а знаменатель есть разность между знаменателем прогрессии и единицей.

Формулу (3) можно, конечно, представить и в виде

$$(3a) \qquad S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q},$$

более удобном для использования в случае $q < 1$.

Пример 1. Сумму n членов прогрессии

$$\div\div 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^{n-1}$$

можно вычислять по формуле (3):

$$S_n = \frac{2^{n-1}\cdot 2 - 1}{2-1} = 2^n - 1.$$

Пример 2. Сумму n членов прогрессии

$$\div\div 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots, \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

можно вычислить по формуле (3а):

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3^n - 1}{2\cdot 3^{n-1}}.$$

Если знаменатель прогрессии q равен единице, то все члены прогрессии равны ее первому члену a_1, так что в этом случае

$$S_n = na_1.$$

Пример 3. Найти сумму n первых членов последовательности

$$1, 2x, 3x^2, 4x^3, \ldots, nx^{n-1}, \ldots .$$

Решение. Полагая

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} = S,$$

умножим обе части равенства на x:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n = Sx$$

и вычтем из этого равенства первое равенство:

$$Sx - S = nx^n - (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}).$$

Отсюда, пользуясь формулой (3), находим:

$$S(x-1) = nx^n - \frac{x^n - 1}{x-1},$$

и

$$S = \frac{nx^n}{x-1} - \frac{x^n-1}{(x-1)^2}.$$

4. Типы задач на геометрическую прогрессию. Величины a_1, a_n, q, n, S_n связаны двумя формулами:

$$(1) \quad a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{и} \quad (2) \quad S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}.$$

Поэтому, если значения трех из этих пяти величин даны, то соответствующие им значения двух остальных величин определятся из формул (1) и (2), составляющих систему независимых уравнений с двумя неизвестными.

С помощью этой системы уравнений можно решить 10 задач, состоящих в нахождении значений следующих пар величин:

1) n, S_n;

2) a_1, S_n; a_n, S_n; a_1, n; a_n, n; q, S_n; q, n;

3) a_1, a_n; a_1, q; a_n , q.

В случае 1) каждое из уравнений системы содержит только одну из искомых величин; они находятся независимо одна от другой:

$$q^{n-1} = \frac{a_n}{a_1} \text{ (отсюда определяется } n\text{)}, \; S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}.$$

В случае 2) одно из уравнений системы содержит только одну из искомых величин, а другое — обе. Очевидно, что сначала надо решить то уравнение, которое содержит только одну неизвестную величину, а затем уже решать второе уравнение; например, если ищутся величины q и S_n, то последовательно находим:

$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$, где правая часть есть алгебраический корень;

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}.$$

В случае 3) приходится решать систему двух уравнений, из которых каждое содержит 2 неизвестных. При этом для нахождения величин a_1 и a_n можно решить систему линейных уравнений:

$$\text{(3a)} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad a_n q - a_1 = (q-1) S_n,$$

а для нахождения величин a_1, q и a_n, q—систему, которая состоит из одного линейного и одного квадратного уравнения и решается способом подстановки. Именно: для нахождения величин a_1, q получаем систему:

$$\text{(3b)} \qquad a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}, \quad S_n = \frac{a_n (q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)},$$

а для нахождения величин a_n, q — систему:

$$\text{(3c)} \qquad a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1}.$$

Очевидно, что каждая из систем (3a), (3b), (3c) равносильна системе (1) — (2). Системами (3b) и (3c) удобно пользоваться только для нахождения величин a_1, q и a_n, q.

Задачи групп 1) и 2) и первая задача группы 3) приводятся к алгебраическим или показательным (т. е. содержащим неизвестное в показателе степени) уравнениям; вторая и третья задачи группы 3) — к алгебраическим уравнениям (при $n > 3$ — высших степеней.)

Пример 1. $a_1 = 8$, $n = 3$, $S_3 = 38$; найти a_3 и q.

Решение. Из второго уравнения системы (3c) последовательно находим:

$$38 = \frac{8(q^3-1)}{q-1}; \quad 4(q^2+q+1) = 19; \quad 4q^2 + 4q - 15 = 0;$$

$$q_{1,2} = \frac{-2 \mp 8}{2}; \quad q_1 = -\frac{5}{2}; \quad q_2 = \frac{3}{2}.$$

Отсюда

$$a_3 = 8 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = 50 \text{ или } a_3 = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 18.$$

Пример 2. $a_3 = 18$, $n = 3$, $S_3 = 38$; найти a_1 и q.

Решение. Из второго уравнения системы (3b) последовательно находим:

$$38 = \frac{18 \cdot (q^3 - 1)}{q^2 (q - 1)}; \quad \frac{9(q^2 + q + 1)}{q^2} = 19; \quad 10q^2 - 9q - 9 = 0;$$

$$q_{1,2} = \frac{9 \mp 21}{20};$$

$$q_1 = -\frac{3}{5}; \quad q_2 = \frac{3}{2}.$$

$$a_1 = \frac{18 \cdot 25}{9} = 50 \text{ или } a_1 = \frac{18 \cdot 4}{9} = 8.$$

Пример 3. Три целых числа составляют геометрическую прогрессию; если ко второму числу прибавить 8, то прогрессия сделается арифметической; если теперь к последнему числу прибавить 64, то прогрессия вновь станет геометрической. Найти эти три числа.

Решение. Будем исходить из второй прогрессии — арифметической и обозначим ее члены через $x - d$, x, $x + d$. Тогда, очевидно, первая прогрессия будет состоять из чисел

$$x - d,\ x - 8,\ x + d,$$

а третья — из чисел

$$x - d,\ x,\ x + d + 64.$$

Так как первая и третья прогрессии — геометрические, то их члены связаны равенствами:

$$(1) \quad (x - 8)^2 = x^2 - d^2 \text{ и } x^2 = (x - d)(x + d + 64).$$

Решив эту систему уравнений относительно неизвестных x и d, найдем, что $x = 20$, $d = 16$, так что арифметическая прогрессия состоит из чисел 4, 20, 36, а первая геометрическая — из чисел 4, 12, 36.

Замечание. Если бы мы, исходя из первой прогрессии, обозначили искомые числа через a, aq, aq^2, то вторая прогрессия состояла бы из чисел a, $aq + 8$, aq^2, а третья — из чисел a, $aq + 8$, $aq^2 + 64$, и мы пришли бы к системе уравнений

$$2(aq + 8) = a + aq^2, \quad (aq + 8)^2 = a(aq^2 + 64),$$

несколько более сложной, чем система (1).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Три целых числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Если из третьего числа вычтем 16, то прогрессия сделается арифметической. Если теперь вычтем из второго числа 2, то прогрессия станет возрастающей геометрической. Найти эти числа.

Ответ. 1; 5; 25.

2. Найти 3 числа, образующие геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 26, а сумма обратных им чисел равна $\frac{13}{18}$.

Ответ. 2, 6, 18 или 18, 6, 2.

3. Даны: геометрическая прогрессия

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,$$

и арифметическая прогрессия

$$b,\ b+d,\ b+2d,\ \ldots.$$

При каких условиях: 1) произведение двух любых членов первой прогрессии является ее членом, 2) сумма двух любых членов второй прогрессии является ее членом?

Ответ. При 1) $a = q^k$, 2) $b = kd$, где k — целое положительное число.

4. Доказать, что если числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию, то они связаны равенством

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3.$$

Указание. Исходить из равенства $b^2 = ac$.

5. Доказать, что произведение двух членов конечной геометрической прогрессии, равностоящих от крайних членов ее, равно произведению этих крайних членов.

Указание. Доказательство аналогично доказательству леммы на странице 328.

6. Доказать, что если четыре числа a, b, c, d образуют геометрическую прогрессию, то они связаны равенством

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2.$$

7. Могут ли числа 12, 20, 35 быть членами геометрической прогрессии?

Решение. Полагая, что число 12 есть первый член геометрической прогрессии, а числа 20 и 35 занимают в ней соответственно m-е и n-е места, составляем систему уравнений:

$$20 = 12\cdot q^{m-1} \quad \text{и} \quad 35 = 12\cdot q^{n-1},$$

где q — знаменатель прогрессии. Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{4}{7} = q^{m-n}.$$

Отсюда следует, что $4q^n = 7q^m$ и $4^m = 7^n$; но это невозможно. Следовательно, данные числа не могут служить членами геометрической прогрессии.

ВОПРОСЫ

1. Какой функцией: 1) знаменателя q, 2) числа членов n геометрической прогрессии является ее n-й член?

2. Какую последовательность образуют числа, обратные числам геометрической прогрессии?

3. Какую последовательность образуют члены данной геометрической прогрессии, занимающие: 1) нечетные места, 2) четные места, 3) места, номера которых кратны числа 3?

4. Какую последовательность образуют произведения соответственных членов нескольких данных геометрических прогрессий?

5. Может ли сумма конечного числа членов геометрической прогрессии быть равной нулю?

6. При каком условии последовательность, составленная из сумм соответственных членов двух геометрических прогрессий, также есть геометрическая прогрессия?

7. В какой геометрической прогрессии произведение двух любых членов ее есть также член этой прогрессии?

8. Могут ли три числа a, b, c быть одновременно последовательными членами арифметической и геометрической прогрессий?

9. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника составлять геометрическую прогрессию?

10. Могут ли: 1) углы вписанного в окружность четырехугольника, 2) стороны описанного около окружности четырехугольника образовывать геометрическую прогрессию?

5. Сумма бесконечной геометрической прогрессии. Если

$$\div\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

есть бесконечная геометрическая прогрессия, то сумму S_n ее n членов можно рассматривать как переменную, областью значений которой служит последовательность

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots,$$

где

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots;$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots.$$

Например, если задана последовательность

$$\div\div 1, 3, 9, 27, 81, \dots, 3^{n-1}, \dots$$

с первым членом 1 и знаменателем 3, то

$$S_1 = 1, \ S_2 = 1 + 3 = 4, \ S_3 = 1 + 3 + 9 = 13, \dots,$$
$$S_n = 1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1}, \dots,$$

так что областью значений переменной S_n служит последовательность

$$1, 4, 13, 40, 121, \dots, 1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1}, \dots.$$

Согласно формуле (3c) общий член этой последовательности может быть представлен в виде

$$\frac{3^n - 1}{2}.$$

Точно так же, если задана последовательность

$$\div\div 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots, \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \dots$$

с первым членом 1 и знаменателем $\frac{1}{3}$, то

$$S_1 = 1,\ S_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},\quad S_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{13}{9}, \ldots,$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots,$$

так что областью значений переменной S_n служит последовательность

$$1,\ \frac{4}{3},\ \frac{13}{9},\ \frac{40}{27},\ \frac{121}{81}, \ldots,\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots.$$

Согласно формуле (3с) общий член этой последовательности может быть представлен в виде

$$\frac{3}{2} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

Вообще переменная S_n определяется формулой (3с):

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Рассмотрим тот случай, когда $|q| < 1$, и для этого представим формулу (3с) в виде

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

В главе VII, § 1, п. 6 было доказано, что если $|q| < 1$, то при неограниченном возрастании показателя n переменная q^n стремится к нулю, т. е. является бесконечно малой переменной. Поэтому при том же условии и произведение $-\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$ также представляет собой бесконечно малую переменную (гл. VII, § 1, п. 5, теорема 2). Таким образом, оказывается, что при условии $|q| < 1$ разность между переменной S_n и числом $\frac{a_1}{1-q}$ есть бесконечно малая переменная, а отсюда следует, что при условии $|q| < 1$ переменная S_n имеет предел и что этим пределом служит число $\frac{a_1}{1-q}$.

Определение. Предел, к которому стремится сумма n членов бесконечной геометрической прогрессии в случае, если ее знаменатель q удовлетворяет условию $|q| < 1$, называется суммой этой прогрессии и обозначается через S.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема. Сумма S бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой по абсолютному значению меньше единицы, равна отношению ее первого члена a_1 к разности между единицей и знаменателем прогрессии q:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти сумму бесконечной прогрессии:

$$1)\ \sqrt{5},\ \sqrt{\frac{1}{5}},\ \frac{1}{5},\ \sqrt{\frac{1}{5}},\ \ldots;$$

$$2)\ \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},\ \ldots;$$

$$3)\ \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},\ \frac{1}{\sqrt{3}-1},\ \frac{1}{2},\ \ldots.$$

Ответы. 1) $\frac{5}{4}\sqrt{5}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}+1}{2}$; 3) $\frac{9+5\sqrt{3}}{3}$.

2. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 6, а сумма двух ее первых членов равна $4\frac{1}{2}$. Найти прогрессию.

Ответ. $3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{8},\ \ldots$ и $9,\ -\frac{9}{2},\ \frac{9}{4},\ -\frac{9}{8},\ \ldots$.

3. В равностороннем треугольнике со стороной a соединяют середины сторон и получают второй равносторонний треугольник; соединяя середины сторон этого второго треугольника, получают третий равносторонний треугольник. Найти предел, к которому стремится сумма площадей n кругов, вписанных в эти треугольники, и сумма площадей n кругов, описанных около них, при $n \to \infty$.

Ответ. $\frac{\pi a^2}{9}$, $\frac{4\pi a^2}{9}$.

4. Каждый из последовательности треугольников

$$ABC,\ A_1B_1C_1,\ A_2B_2C_2,\ \ldots,\ A_nB_nC_n,\ \ldots,$$

начиная со второго, образован посредством соединения середин сторон предыдущего треугольника. Найти предел, к которому стремится сумма площадей n этих треугольников при $n \to \infty$, если площадь треугольника ABC равна Q; в какую точку стягивается при этом треугольник $A_nB_nC_n$.

Ответ. $\frac{4}{3}Q$; в центр тяжести треугольника.

5. Найти предел, к которому стремится при $n \to \infty$ переменная сумма

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots+\frac{n}{2^n}$$

дробей, числители которых образуют арифметическую, а знаменатели — геометрическую прогрессию.

Указание. Представить каждое слагаемое $\frac{n}{2^n}$ в виде суммы

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n},$$

имеющей n равных слагаемых, и сначала найти суммы слагаемых, находящихся в одном и том же столбце, а затем их общую сумму и перейти к пределу.

Ответ. 2.

6. Всякое число может быть представлено как сумма бесконечной геометрической прогрессии. Для этого надо в формуле $S=\frac{a}{1-q}$ подставить вместо S данное число, а одну из величин, a или q, задать произвольно (имея, однако, в виду, что q — правильная дробь).

Сделать это для чисел: 1) 100, если $q=\frac{1}{2}$; 2) 256, если $q=\frac{1}{4}$; 3) 250, если $q=\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{20}$, если $q=\frac{1}{40}$; 5) 3, если $a=2$; 6) 320, если $a=40$.

6. Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Пример 1. Под периодической десятичной дробью 0,(7) понимается тот предел, к которому стремится последовательность

$$0{,}7;\ 0{,}77;\ 0{,}777;\ 0{,}7777;\ \ldots;\ \underbrace{0{,}7\ldots7}_{n};\ \ldots,$$

служащая областью значений переменной $\underbrace{0{,}7\ldots7}_{n}$.

Но эта переменная может быть представлена в виде суммы:

$$0{,}7+0{,}07+0{,}007+0{,}0007+\ldots+\underbrace{0{,}000\ldots07}_{n},$$

которая является суммой n членов геометрической прогрессии

$$(1)\quad 0{,}7;\ 0{,}07;\ 0{,}007;\ 0{,}0007;\ \ldots;\ \underbrace{0{,}000\ldots07}_{n};\ \ldots$$

с первым членом 0,7 и знаменателем 0,1.

Поэтому предел, к которому стремится переменная $\underbrace{0{,}7\ldots7}_{n}$ при неограниченном возрастании числа n, есть предел S, к которому стремится сумма n членов бесконечной прогрессии (1). Как было доказано в п. 5, этот предел S находится по формуле

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

и, следовательно, равен $\frac{0{,}7}{1-0{,}1}=\frac{7}{10-1}=\frac{7}{9}$.

Таким образом, $0{,}(7)=\frac{7}{9}$.

Пример 2. Как разъяснено в примере 1, периодическая десятичная дробь 0,(23) есть предел, к которому стремится переменная $0{,}\underbrace{23\ 23\ldots 23}_{n\text{ пар}}$, т. е. конечная десятичная дробь, полученная из данной посредством сохранения в ней n периодов.

Но эта переменная есть сумма n членов бесконечной геометрической прогрессии

$$(2)\quad 0{,}23;\ 0{,}0023;\ 0{,}000023;\ \ldots;\ 0{,}\underbrace{0000\ldots 0023}_{n\text{ пар}};\ \ldots$$

с первым членом 0,23 и знаменателем 0,01.

Поэтому предел, к которому стремится переменная $0{,}\underbrace{2323\ldots 23}_{n\text{ пар}}$ при неограниченном возрастании числа n, есть предел, к которому стремится сумма n членов бесконечной прогрессии (2).

Следовательно,

$$0{,}(23)=\frac{0{,}23}{1-0{,}01}=\frac{23}{100-1}=\frac{23}{99}.$$

Итак, правильная чистая периодическая десятичная дробь обращается в такую обыкновенную дробь, числитель которой есть период данной дроби, а знаменатель — целое число, изображаемое цифрой 9, повторенной столько раз, сколько цифр в периоде данной дроби.

Пример 3. Под периодической десятичной дробью 0,1 (23) понимается тот предел, к которому стремится последовательность

$$0{,}123;\ 0{,}12323;\ 0{,}1232323;\ \ldots;\ 0{,}1\underbrace{2323\ldots 23}_{n\text{ пар}};\ \ldots,$$

служащая областью значений переменной

$$0{,}1\underbrace{23\ 23\ldots 23}_{n\text{ пар}}.$$

Но эта переменная может быть представлена в виде суммы:

$$0{,}1+0{,}023+0{,}00023+\ldots+0{,}0\underbrace{00\ldots 0023}_{n\text{ пар}},$$

состоящей из постоянного слагаемого 0,1 и переменной

$$0{,}023+0{,}00023+\ldots+0{,}0\underbrace{00\ldots 0023}_{n\text{ пар}};$$

эта переменная есть сумма членов геометрической прогрессии

$$(3)\quad 0{,}023;\ 0{,}00023;\ 0{,}0000023;\ \ldots;\ 0{,}0\underbrace{00\ldots 0023}_{n\text{ пар}};\ \ldots$$

с первым членом 0, 023 и знаменателем 0,01.

Поэтому предел, к которому стремится переменная $0{,}1\underbrace{2323\ldots23}_{n\text{ пар}}$ при неограниченном возрастании числа n, равен сумме

$$0{,}1+\frac{0{,}023}{1-0{,}01}=0{,}1+\frac{23}{1000-10}=\frac{0{,}1\,(1000-10)+23}{990}=$$

$$=\frac{100-1+23}{990}=\frac{123-1}{990}.$$

Итак, правильная смешанная периодическая десятичная дробь обращается в такую обыкновенную дробь, числитель которой есть разность между числом, стоящим до второго периода, и числом, стоящим до первого периода, а знаменатель — целое число, изображаемое цифрой 9, повторенной столько раз, сколько цифр в периоде, со столькими нулями, сколько цифр между запятой и периодом.

Очевидно, что если данная периодическая десятичная дробь — неправильная, то ее можно рассматривать как сумму целого числа (числа целых единиц) и правильной периодической десятичной дроби.

ГЛАВА IX

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА СТЕПЕНИ

1. Понятие о степени с рациональным показателем. Понятие о степени a^r, где a есть положительное число, а r есть рациональное число, устанавливается следующей системой определений:

1) Если $r = m$, где m есть положительное целое число, отличное от 1, то

$$a^r = a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \; . \; . \; . \, a}_{m \text{ раз}};$$

2) если $r = 1$, то $a^r = a^1 = a$;

3) если $r = 0$, то $a^r = a^0 = 1$;

4) если $r = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ есть положительная несократимая дробь, то $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $\sqrt[n]{a^n}$ есть арифметический корень;

5) если r есть отрицательное рациональное число, то

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}}.$$

Приведенные 5 определений указывают, какой смысл имеет выражение a^r, где $a > 0$, при рациональных значениях показателя r.

В случае, если $\frac{m}{n}$ есть положительная сократимая дробь, сводящаяся к целому числу, то равенство $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ тоже верно, но уже не в силу определения, а согласно теореме (гл. II, § 3, п. 3). Таким образом, если $a > 0$, то выражение $\sqrt[n]{a^m}$ может быть заменено выражением $a^{\frac{m}{n}}$ и, обратно, выражение $a^{\frac{m}{n}}$ — выражением $\sqrt[n]{a^m}$ при всех целых положительных значениях букв m и n.

2. Свойства степени с рациональным показателем. Степень положительного числа a с рациональным показателем r имеет ряд свойств, выражаемых следующими теоремами.

Теорема 1 (о знаке степени). Всякая степень положительного числа с рациональным показателем есть положительное число, т. е. если $a > 0$ и r есть рациональное число, то $a^r > 0$.

Это непосредственно следует из определений 1—5.

Например, степени

$$2^{\frac{3}{4}},\quad \left(\frac{8}{15}\right)^{0,6},\quad 2^{-\frac{3}{4}},\quad \left(\frac{8}{15}\right)^{-0,6}$$

— положительные числа.

Определение 6. Будем называть всякое положительное действительное число a правильной дробью, если оно меньше, чем 1, и неправильной дробью, если оно больше, чем 1. Будем говорить, что положительные действительные числа a и b имеют один и тот же характер, если они одновременно — правильные или неправильные дроби, и различный характер, если одно из них — правильная, а другое — неправильная дробь.

Теорема 2 (о характере дроби). При возведении положительной дроби в положительную степень характер ее не меняется; при возведении же положительной дроби в отрицательную степень характер ее меняется на противоположный, т. е.

если $a > 0$ и $a \gtreqless 1$, а $r > 0$, то соответственно $a^r \gtreqless 1$;

если $a > 0$ и $a \gtreqless 1$, а $r < 0$, то соответственно $a^r \lesseqgtr 1$.

Доказательство. Рассмотрим все случаи, которые могут представиться:

1°. Если $r = m$, где m — целое положительное число, то, опираясь на теорему о возведении членов неравенства в степень (гл. II, § 1, п. 5), последовательно получаем:

$$a > 1,\ a^m > 1^m,\ a^m > 1;$$
$$0 < a < 1,\ a^m < 1^m,\ a^m < 1.$$

2°. Если $r = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — дробное положительное число, то, опираясь на теорему об извлечении из членов неравенства корня, а затем на теорему о возведении членов неравенства в степень, последовательно получаем (гл. II, § 3, п. 11):

$$a > 1,\ \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1},\ \sqrt[n]{a} > 1;\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m > 1^m,\ \sqrt[n]{a^m} > 1,\ a^{\frac{m}{n}} > 1;$$

$$0 < a < 1,\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{1},\ \sqrt[n]{a} < 1;\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m < 1^m,\ \sqrt[n]{a^m} < 1,\ a^{\frac{m}{n}} < 1.$$

Таким образом, если показатель r есть положительное число (случаи 1° и 2°), то при возведении положительной дроби в степень r мы получаем дробь того же характера, что и основание.

3°. Если $r = -r'$, где r' — положительное рациональное число, то

$$a^r = a^{-r'} = \frac{1}{a^{r'}}.$$

Поэтому

при $a > 1$ получаем: $a^{r'} > 1$, $\frac{1}{a^r} < 1$, $a^{-r'} < 1$;

при $0 < a < 1$ получаем: $a^{r'} < 1$, $\frac{1}{a^{r'}} > 1$, $a^{-r'} > 1$.

Таким образом, если показатель r есть отрицательное число (случай 3°), то при возведении положительной дроби в степень r мы получаем дробь, характер которой противоположен характеру основания.

Примеры.

$$\left(\frac{5}{3}\right)^4 > 1,\ \left(\frac{3}{5}\right)^4 < 1,\ \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{2}} < 1,\ \left(\frac{8}{7}\right)^{\frac{3}{2}} > 1;$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-4} < 1,\ \left(\frac{3}{5}\right)^{-4} > 1,\ \left(\frac{7}{8}\right)^{-\frac{3}{2}} > 1,\ \left(\frac{8}{7}\right)^{-\frac{3}{2}} < 1.$$

Важно заметить, что совпадение или несовпадение основания a и степени a^r по характеру зависит не от абсолютного значения показателя r, а только лишь от его знака.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать (способом от противного) теорему, обратную теореме 2:

Если степень и ее положительное основание имеют один и тот же характер, то показатель степени есть положительное число; если же степень и ее положительное основание имеют различный характер, то показатель степени есть отрицательное число, т. е.

если $a > 0$ и $a \gtrless 1$ и соответственно $a^r \gtrless 1$, то $r > 0$;

если $a > 0$ и $a \gtrless 1$ и соответственно $a^r \lessgtr 1$, то $r < 0$.

Указание. Рассмотреть 4 возможных случая и, пользуясь теоремой 2, доказать, что в каждом из них предположение, противное заключению, приводит к противоречию с условием. Например, если $a > 1$ и $a^r > 1$, то $r > 0$, так как предположение $r \leqslant 0$ влечет за собой соотношение $a^r \leqslant 1$, противоречащее условию $a^r > 1$.

2. Представляют ли собой степени

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{2}{5}},\ \left(\frac{6}{5}\right)^{-0{,}7}$$

числа, большие или меньшие, чем 1?

3. Которая из двух степеней больше:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-0{,}1} \text{ или } \left(\frac{9}{4}\right)^{0{,}2};\quad \left(\frac{5}{6}\right)^{3} \text{ или } \left(\frac{5}{6}\right)^{-3}?$$

4. Какое заключение можно сделать относительно показателя r, если:

$$1)\ \left(\frac{2}{3}\right)^r = \frac{5}{8};\ 2)\ \left(\frac{2}{3}\right)^r = \frac{8}{5}?$$

5. Какое заключение можно сделать относительно основания a, если:

$$1)\ a^{\frac{3}{4}} = 10,\ 2)\ a^{\frac{4}{3}} = 10,\ 3)\ a^{-\frac{3}{4}} = 10,\ 4)\ a^{-\frac{4}{3}} = 10?$$

Теорема 3. (о монотонности степени). При положительном основании, большем единицы, большему показателю степени соответствует и большая степень; при положительном же основании, меньшем единицы, большему показателю степени соответствует меньшая степень, т. е. если $a > 0$, $a \gtrless 1$, $r > s$, то соответственно $a^r \gtrless a^s$.

Доказательство. Для сравнения степеней a^r и a^s найдем их частное:

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}.$$

Так как $r > s$, то $r - s > 0$. Поэтому при $a > 1$ имеет место неравенство $a^{r-s} > 1$ (теорема 2) и, следовательно, неравенство $\frac{a^r}{a^s} > 1$, из которого путем умножения обеих частей на положительное число a^s находим, что $a^r > a^s$; при $0 < a < 1$ имеет место неравенство $a^{r-s} < 1$ (теорема 2) и, следовательно, неравенство $\frac{a^r}{a^s} < 1$, из которого путем умножения на положительное число a^s находим, что $a^r < a^s$.

Примеры.

$$1)\ 8^{\frac{5}{2}} > 8^{\frac{3}{2}};\ 2{,}5^{0{,}3} > 2{,}5^{0{,}1};\ \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2}{3}} > \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$2)\ \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{2}} < \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{3}{2}};\ \left(\frac{2}{5}\right)^{0{,}3} < \left(\frac{2}{5}\right)^{0{,}1};\ \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$3)\ 5^{\frac{1}{2}} > 5^{-\frac{3}{2}};\ 1{,}2^{-0{,}1} > 1{,}2^{-0{,}3};$$

$$4)\ \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}};\ \left(\frac{5}{6}\right)^{-0{,}1} < \left(\frac{5}{6}\right)^{-0{,}3};\ 0{,}9^{-4} > 0{,}9^2.$$

Важно заметить, что степень положительного основания изменяется в том же направлении, что и показатель, если основание есть неправильная дробь, и в противоположном направлении, если основание есть правильная дробь. Иначе говоря, степень положительного основания в первом случае возрастает при возрастании показателя, а во втором случае — убывает при возрастании показателя.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать (способом от противного) теорему, обратную теореме 3: При положительном основании, большем единицы, большей степени соответствует и больший показатель; при положительном же основании, меньшем единицы, большей степени соответствует меньший показатель, т. е. если $a > 0$, $a \gtrless 1$ и $a^r > a^s$, то соответственно $r \gtrless s$.

Указание. Опираясь на теорему 3, доказать, что в обоих случаях ($a > 1$ и $0 < a < 1$) предположение, противное заключению, приводит к противоречию с условием. Например, если $a > 1$ и $a^r > a^s$, то $r > s$, так как предположение $r \leqslant s$ влечет за собой соотношение $a^r \leqslant a^s$, противоречащее условию $a^r > a^s$.

2. Которая из двух степеней больше:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{8}} \text{ или } \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{7}{8}};\quad \left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1} \text{ или } \left(\frac{9}{4}\right)^{-0,2};\quad (0,1)^{\frac{9}{4}} \text{ или } (0,1)^{-\frac{3}{4}}?$$

3. Какое заключение можно сделать относительно показателей r и s, если

$$\left(\frac{9}{2}\right)^r < \left(\frac{9}{2}\right)^s;\quad \left(\frac{3}{5}\right)^r > \left(\frac{3}{5}\right)^s;\quad 0,3^r < 0,3^s?$$

4. Какое заключение можно сделать относительно положительного основания a, если

$$a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{4}{3}};\quad a^{\frac{7}{15}} < a^{-1};\quad a^{-\frac{5}{8}} > a^{\frac{1}{8}}?$$

3. Понятие о степени с иррациональным показателем. Установим это понятие на примере. Именно, разъясним, что надо понимать под выражением $3^{\sqrt{2}}$.

Число $\sqrt{2}$ определяется двойной последовательностью (гл. I, § 3, п. 1):

$1,4 < 1,41 < \ldots < a_n < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < A_n < \ldots < 1,42 < 1,5$, где a_n и A_n — приближенные квадратные корни из числа 2 с точностью до $\frac{1}{10^n}$ с недостатком и с избытком, так что

$$A_n - a_n = \frac{1}{10^n}.$$

Докажем, что и последовательности

$$(1)\qquad 3^{1,4},\ 3^{1,41},\ 3^{1,414},\ \ldots,\ 3^{a_n},\ \ldots$$

и

$$(2)\qquad 3^{1,5},\ 3^{1,42},\ 3^{1,415},\ \ldots,\ 3^{A_n},\ \ldots$$

составляют двойную последовательность, т. е. обладают следующими свойствами:

1°. Последовательность (1) — возрастающая, а последовательность (2) — убывающая.

Это следует из того, что основание 3 степеней (1) и (2) больше, чем 1, и что показатели степеней (1) возрастают, а степеней (2) убывают (теорема 3).

2°. Каждый член 3^{a_n} последовательности (1) меньше соответствующего ему — по номеру занимаемого места — члена 3^{A_n} последовательности (2).

Это следует из того, что $3 > 1$ и $a_n < A_n$ (теорема 3).

3°. Разность $3^{A_n} - 3^{a_n}$ между двумя соответствующими — по номеру занимаемого места — членами последовательностей (1) и (2) при неограниченном возрастании этого номера n стремится к нулю.

В самом деле,

$$3^{A_n} - 3^{a_n} = 3^{a_n} \cdot (3^{A_n - a_n} - 1) = 3^{a_n}\left(3^{\frac{1}{10^n}} - 1\right),$$

но $3^{a_n} < 3^{1,5}$, а разность $3^{\frac{1}{10^n}} - 1$ стремится к нулю (стр. 311). Поэтому, как бы мало ни было положительное число ε, можно так выбрать число ν, чтобы при $n > \nu$ выполнялось неравенство

$$3^{\frac{1}{10^n}} - 1 < \frac{\varepsilon}{3^{1,5}}$$

и, следовательно, неравенство

$$3^{1,5} \cdot \left(3^{\frac{1}{10^n}} - 1\right) < \varepsilon.$$

При том же условии $n > \nu$ будет выполняться и неравенство,

$$3^{a_n} \cdot \left(3^{\frac{1}{10^n}} - 1\right) < \varepsilon,$$

а это значит, что переменная $3^{a_n} \cdot \left(3^{\frac{1}{10^n}} - 1\right)$, т. е. разность $3^{A_n} - 3^{a_n}$, стремится к нулю.

Мы доказали, что последовательности (1) и (2) составляют двойную последовательность. А всякая двойная последовательность действительных чисел определяет некоторое действительное число. Это значит, что существует одно и притом только одно действительное число, находящееся на рубеже между последовательностями (1) и (2).

Это именно число и называют степенью числа 3 с иррациональным показателем $\sqrt{2};$ его записывают в виде $3^{\sqrt{2}}$, так что

$$3^{a_n} < 3^{\sqrt{2}} < 3^{A_n}.$$

Определение 7. Если b есть положительное действительное число, а α — положительное иррациональное число, приближенные значения которого с точностью до $\frac{1}{10^n}$ с недостатком и с избытком равны a_n и A_n, то единственное действительное число, определяемое при $b > 1$ двойной последовательностью

$$b^{a_1} < b^{a_2} < b^{a_3} < \ldots < b^{a_n} < \ldots < b^{A_n} < \ldots < b^{A_3} < b^{A_2} < b^{A_1},$$

а при $0 < b < 1$ — двойной последовательностью

$$b^{A_1} < b^{A_2} < b^{A_3} < \ldots < b^{A_n} < \ldots < b^{a_n} < \ldots < b^{a_3} < b^{a_2} < b^{a_1},$$

называют степенью числа b с положительным иррациональным показателем α и записывают в виде b^{α}.

Из этого определения следует, что

при $b > 1$ $b^{a_n} < b^{\alpha} < b^{A_n}$, а при $0 < b < 1$ $b^{A_n} < b^{\alpha} < b^{a_n}$.

Если же b есть положительное действительное число, a — α есть отрицательное иррациональное число, то выражение $b^{-\alpha}$ определяют равенством

$$b^{-\alpha} = \frac{1}{b^{\alpha}}.$$

и называют степенью числа b с отрицательным иррациональным показателем.

Из этих определений следует, что степень с положительным или отрицательным иррациональным показателем имеет только положительные значения и что поэтому теорема 1 (о знаке степени) относится и к степеням с иррациональными показателями.

Может быть доказано, что степень с иррациональным показателем обладает всеми свойствами степеней с рациональными показателями. В частности, действия над степенями с иррациональными показателями выполняются по тем же правилам, по которым выполняются действия над степенями с рациональными показателями. Поэтому на степень с иррациональным показателем распространяются теоремы 2 и 3 (о характере дроби и о монотонности степени).

Вычисление данной положительной степени данного положительного числа может быть выполнено либо по специально составленным таблицам, либо с помощью графика; с этими способами мы познакомимся позже (в этой главе, § 2 и 7).

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

1. Понятие о показательной функции. Определения 1—5 степени с рациональным показателем и определение 7 степени с иррациональным показателем (§ 1, п. 1 и 3) позволяют установить понятие о показательной функции.

Определение. Функция, определяемая равенством

$$y = a^{x},$$

где $a > 0$ и x — независимая переменная, называется показательной функцией.

В силу этого определения каждое значение показательной функции y есть значение степени с постоянным положительным основанием a, соответствующее данному значению показателя x этой степени.

2. Свойства показательной функции. На установленных выше свойствах степени с любым действительным показателем основаны следующие свойства показательной функции.

Свойство 1. Показательная функция $y=a^x$ определена для всех действительных значений независимой переменной x, т. е. областью ее определения служит вся числовая ось:

$$-\infty<x<+\infty.$$

Это следует из определений 1—5 и 7, § 1.

Свойство 2. Показательная функция $y=a^x$ для всех действительных значений переменной x принимает положительные значения, т. е. если $-\infty<x<+\infty$, то $a^x>0$.

В самом деле, если $a>0$, то степень a^x с любым рациональным (теорема 1) и иррациональным (определение 7) показателем есть положительное число.

Поэтому все точки графика показательной функции имеют положительные ординаты, так что весь этот график располагается над осью OX, т. е. в той полуплоскости, в которой строятся положительные ординаты.

Свойство 3. Для всех положительных значений переменной x значения показательной функции a^x имеют тот же характер, что и основание a, а для всех отрицательных значений переменной x значения этой функции имеют характер, противоположный характеру основания a.

В самом деле, если $x>0$, то при $a>1$ имеет место неравенство $a^x>1$, а при $0<a<1$ — неравенство $a^x<1$; если же $x<0$, то при $a>1$ имеет место неравенство $a^x<1$, а при $0<a<1$ — неравенство $a^x>1$ (теорема 2, § 1).

Поэтому если мы через точку (0; 1) проведем прямую KL, параллельную оси OX, то часть графика показательной функции $y=a^x$, соответствующая положительным значениям переменной x, расположится при условии $a>1$ над прямой KL, а при условии $0<a<1$ — между этой прямой и осью OX, между тем как часть графика той же функции, соответствующая отрицательным значениям переменной x, расположится при условии $a>1$ между прямой KL и осью OX, а при условии $0<a<1$ — над прямой KL (черт. 101).

Свойство 4. Если $a>1$, то a^x есть возрастающая функция, а если $0<a<1$, то a^x есть убывающая функция (гл. II, § 1, п. 9).

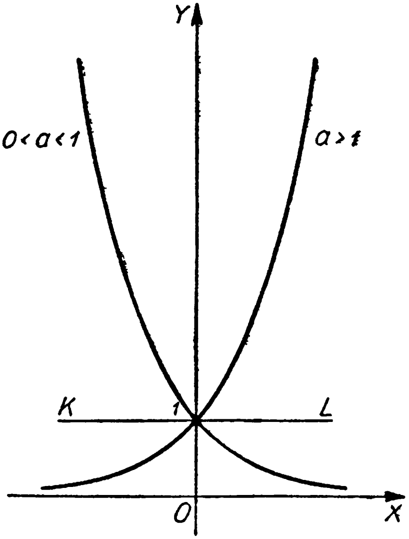
В самом деле, если $a>1$, то неравенство $x_2>x_1$ влечет за собой неравенство $a^{x_2}>a^{x_1}$, а если $0<a<1$, то неравенство $x_2>x_1$ влечет за собой неравенство $a^{x_2}<a^{x_1}$ (теорема 3, § 1).

Поэтому график функции $y=a^{x_1}$ представляет собой кривую, которая на всем своем протяжении, соответствующем изменению абсциссы x ее точек от $-\infty$ до $+\infty$, в случае $a>1$ поднимается вверх, а в случае $0<a<1$ опускается вниз, оставаясь, однако, выше оси OX (черт. 101).

Свойство 5. Если $a>1$, то при неограниченном возрастании переменной x функция a^x неограниченно возрастает, а при неограниченном убывании переменной x эта функция стремится к нулю; если же $0<a<1$, то при неограниченном возрастании переменной x функция a^x стремится к нулю, а при неограниченном убывании переменной x эта функция неограниченно возрастает, т. е.

1) если $a > 1$, то $\underset{x \to +\infty}{a^x \to +\infty}$, $\underset{x \to -\infty}{a^x \to 0}$;

2) если $0 < a < 1$, то $\underset{x \to +\infty}{a^x \to 0}$, $\underset{x \to -\infty}{a^x \to +\infty}$.



Черт. 101

Доказательство. 1) Пусть $a > 1$. В гл. VII, § 1, п. 6 было доказано, что если $a > 1$, то при неограниченном возрастании показателя n степень a^n неограниченно возрастает; это значит, что для **каждого** сколь угодно большого положительного числа M можно так выбрать соответствующее ему число ν, чтобы при $n \geqslant \nu$ выполнялось неравенство

$$a^n > M.$$

Поэтому для **всех** значений переменной x, превосходящих число ν, будет, согласно теореме 3, иметь место неравенство

$$a^x > a^\nu$$

и, следовательно, неравенство

$$a^x > M,$$

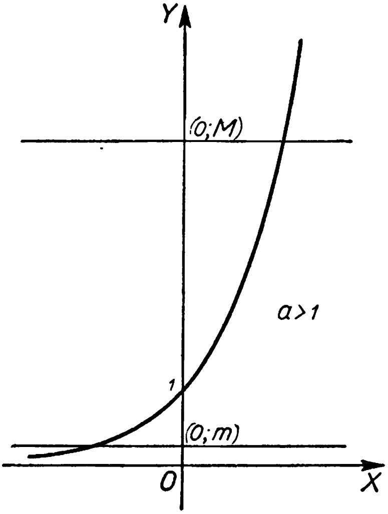
а это и значит, что при неограниченном возрастании переменной x переменная a^x стремится к $+\infty$.

Если переменная x стремится к $-\infty$, то переменная $-x$ стремится к $+\infty$. Поэтому при $x \to -\infty$ степень a^{-x} стремится к

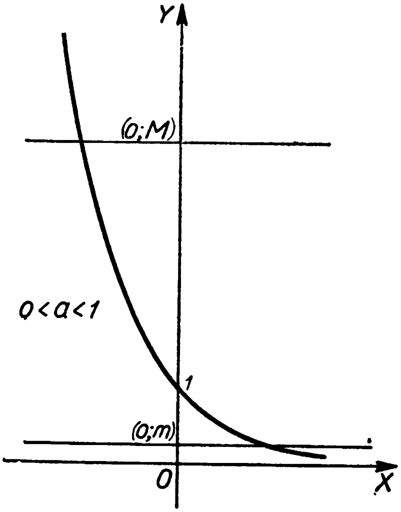
$+\infty$. Но $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$; следовательно, при $x \to -\infty$ степень a^x стремится к 0 (гл. VII, § 2, п. 3, теорема 6).

2) Пусть $0 < a < 1$. Тогда $\frac{1}{a} > 1$. Поэтому при $x \to +\infty$ степень $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ стремится к $+\infty$. Но $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$, а $a^x = 1 : \left(\frac{1}{a^x}\right)$. Поэтому при $x \to +\infty$ степень a^x стремится к 0 (гл. VII, § 2, п. 3, теорема 6).

При $x \to -\infty$ степень a^{-x} стремится к 0. Но $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$; следовательно, при $x \to -\infty$ степень a^x стремится к $+\infty$ (гл. VII, § 2, п. 3, теорема 7).



Черт. 102



Черт. 103

Из свойства 5 следует, что, как бы велико ни было положительное число M, при условии $a > 1$ график функции a^x поднимается выше прямой, проходящей через точку $(0;\ M)$ и параллельной оси OX. Точно так же, как бы мало ни было положительное число m, график этой функции по направлению справа налево опускается ниже прямой, проходящей через точку $(0;\ m)$ и параллельной оси OX, и в силу этого постепенно все больше приближается к этой оси, нигде, однако, ее не достигая (черт. 102), т. е., как говорят, приближается к оси OX асимптотически (гл. IV, § 7, п. 2).

С помощью аналогичных рассуждений найдем, как ведет себя график функции a^x при условии $0 < a < 1$ (черт. 103).

Свойство 6. Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то каждому положительному числу b соответствует одно и только одно значение независимой переменной x, при котором имеет место равенство

$$a^x = b.$$

Изложим сущность доказательства этого свойства на примере. Докажем, что существует действительное число, удовлетворяющее уравнению

$$2^x = 3.$$

Прежде всего ответим на вопрос, может ли этому уравнению удовлетворять рациональное число. Если бы этому уравнению удовлетворяло рациональное число $\frac{m}{n}$, то имело бы место равенство $2^{\frac{m}{n}} = 3$ и, следовательно, равенство $2^m = 3^n$. Но такое равенство невозможно, так как равные целые числа не могут различным образом разлагаться на простые множители. Поэтому данному уравнению может удовлетворять только иррациональное число.

Докажем, что такое число действительно существует. Для этого, замечая, что

$$2^1 < 3 < 2^2,$$

разделим промежуток (1...2) на 10 равных частей и составим возрастающую геометрическую прогрессию:

$$\div\!\div\, 2^1,\ 2^{1,1},\ 2^{1,2},\ 2^{1,3},\ 2^{1,4},\ 2^{1,5},\ 2^{1,6},\ 2^{1,7},\ 2^{1,8},\ 2^{1,9},\ 2^2.$$

Так как число 3 больше первого члена этой прогрессии и меньше ее последнего члена, а быть равным какому-либо из ее членов оно не может $\left(\text{так как } 3 \neq 2^{\frac{m}{n}}\right)$, то непременно найдутся два смежных члена этой прогрессии, между которыми заключено число 3; пусть

$$2^{1,5} < 3 < 2^{1,6}.$$

Зная это, разделим промежуток (1,5...1,6) на 10 частей и составим возрастающую геометрическую прогрессию:

$$\div\!\div\, 2^{1,50},\ 2^{1,51},\ 2^{1,52},\ 2^{1,53},\ \ldots,\ 2^{1,57},\ 2^{1,58},\ 2^{1,59},\ 2^{1,60}.$$

Так как число 3 больше первого члена этой прогрессии и меньше ее последнего члена, а членов, равных числу 3, она не содержит, то непременно найдутся два смежных члена этой прогрессии, между которыми заключено число 3: пусть

$$2^{1,58} < 3 < 2^{1,59}.$$

Зная это, разделим промежуток (1,58... 1,59) на 10 частей, составим соответствующую возрастающую геометрическую прогрессию и сравним ее члены с числом 3; пусть будет найдено неравенство

$$2^{1,585} < 3 < 2^{1,586}.$$

Очевидно, что этот процесс может быть продолжен неограниченно, причем каждый шаг его (состоящий в дальнейшем делении предыдущего промежутка на 10 частей, составлении соответствующей геометрической прогрессии и сравнении ее членов с числом 3) доставит новый десятичный знак искомого значения показателя x. В результате мы найдем двойную последовательность

$$1 < 1{,}5 < 1{,}58 < 1{,}585 < \ldots < 1{,}586 < 1{,}59 < 1{,}6 < 2,$$

определяющую иррациональное число 1,585 ..., и двойную последовательность

$$2^1 < 2^{1,5} < 2^{1,58} < 2^{1,585} < \ldots < 2^{1,586} < 2^{1,59} < 2^{1,6} < 2^2,$$

определяющую число 3. Но, согласно определению степени с иррациональным показателем, последняя двойная последовательность определяет также степень $2^{1,585\ldots}$; отсюда следует (гл. I, § 3, п. 2), что

$$2^{1,585\ldots} = 3,$$

т. е. что уравнению $2^x = 3$ удовлетворяет действительное число 1,585 ... .

Замечание. Приведенное рассуждение приводит к выводу, что число, удовлетворяющее уравнению $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, существует, но способ для разыскания этого числа будет дан в следующей главе.

Теперь докажем, что при условиях $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ уравнение $a^x = b$ может иметь только одно решение. Это следует из того, что если $x_2 > x_1$, то $a^{x_2} \gtrless a^{x_1}$, так что равенства

$$a^{x_2} = b \text{ и } a^{x_1} = b$$

не могут выполняться одновременно.

Из свойства 6 следует, что каждое данное положительное число b может быть представлено и притом единственным способом в виде степени данного положительного и отличного от 1 числа a. Например, по таблицам, с которыми мы вскоре познакомимся, можно легко найти, что

$$2 \approx 10^{0,3010}, \quad 36 \approx 10^{1,5563}, \quad 452 \approx 10^{2,6551};$$

при этом искомые показатели даны с точностью до 0,00005.

Из свойств 4—6 вытекает, что при изменении независимой переменной x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, принимает все положительные значения, составляющие открытый промежуток $(0 \ldots +\infty)$, так что этот промежуток служит областью значений этой функции.

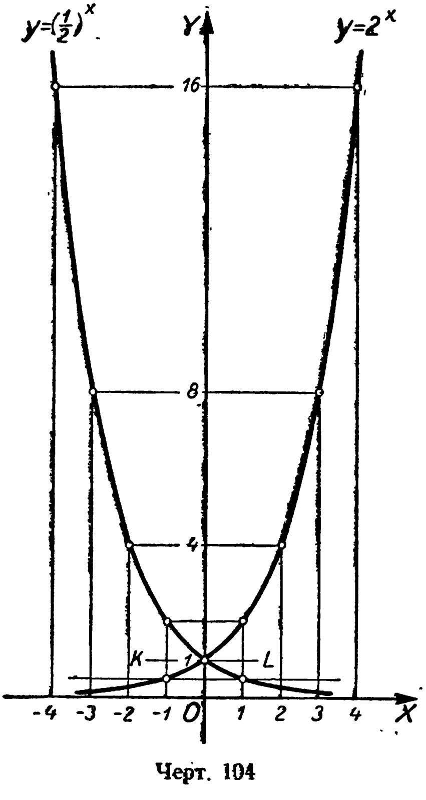
3. График показательной функции. Учитывая свойства 1—6 показательной функции, построим ее график (черт. 104).

1) Начнем с графика функции $y = 2^x$. Прежде всего заметим, что график этой (как и всякой) показательной функции пересекает ось OY в точке $(0; 1)$, так как $2^0 = 1$. Через эту точку проведем прямую KL, параллельную оси OX. Мы уже знаем (свойство 3), что часть графика, соответствующая положительным значениям переменной x, расположится над прямой KL, а часть его, соответ-

ствующая отрицательным значениям этой переменной, — в полосе между осью OX и прямой KL.

Теперь составим таблицу значений функции $y=2^x$:

x	-4	$-3\frac{1}{2}$	-3	$-2\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4
y	0,06	0,09	0,13	0,18	0,25	0,35	0,5	0,71	1	1,41	2	2,83	4	5,66	8	11,31	16



Черт. 104

Для составления таблицы мы пользовались таблицей квадратных корней (n^2):

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2};\ 2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8};\ 2^{\frac{5}{2}}=\sqrt{32};\ 2^{\frac{7}{2}}=\sqrt{128};\ \ldots;$$

$$2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ 2^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4};\ 2^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8};$$

$$2^{-\frac{7}{2}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{16};\ \ldots\ .$$

Построив по найденным координатам соответствующие им точки и соединив их плавной кривой, получим искомый график, наглядно представляющий свойства 1—6 показательной функции $y=a^x$ при условии $a>1$, на что мы обращали внимание после установления каждого из этих свойств в п. 2 настоящего параграфа.

2) Для построения графика функции $y=a^x$, где $0<a<1$, заметим, что график этой функции симметричен графику функции $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ по отношению к оси OY, так что график функции $y=a^x$, где $0<a<1$, может быть получен посредством отражения графика функции $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ в оси OY.

Например, для построения графика функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ достаточно построить отражение графика функции $y=2^x$ в оси OY. В самом деле, каждой точке $(x_1; y_1)$ одного из этих графиков соответствует симметричная ей по отношению к оси OY точка с координатами $(-x_1; y_1)$ другого графика, так как

$$2^{x_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x_1} \text{ и } 2^{-x_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}.$$

При построении графика показательной функции надо обратить внимание на некоторые его особенности:

1°. Для построения графика функции $y=2^{x-3}$ можно выполнить либо перемещение графика функции $y=2^x$ параллельно оси OX вправо на 3 единицы масштаба, либо сжатие того же графика по направлению оси OY в 2^3 раз; это объясняется тем, что

$$2^{x-3}=\frac{1}{2^3}\cdot 2^x.$$

Точно так же построение графика функции $y=2^{x+3}$ можно выполнить либо посредством перемещения графика функции $y=2^x$ параллельно оси OX влево на 3 единицы масштаба, либо посредством растяжения того же графика по направлению оси OY в 2^3 раз; это объясняется тем, что

$$2^{x+3}=2^3\cdot 2^x.$$

При сжатии или растяжении графика функции $y=2^x$ в 8 раз все ординаты этой функции соответственно уменьшатся или увеличатся в 8 раз.

2°. Для построения графика функции $y=2^{5x}$ достаточно построить график функции $y=(2^5)^x$, т. е. график показательной функции с основанием 2^5.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить на одном чертеже графики функций:

$$y=10^x \text{ и } y=\left(\frac{1}{10}\right)^x.$$

2. Построить графики функций:

$$y=2^{x-3}, \quad y=2^{x+3}.$$

3. Графически решить уравнения:

1) $2^x=x$; 2) $2^x=2x$; 3) $2^x=x^2$; 4) $2^x=x^2+1$; 5) $2^x=\sqrt{x}+1$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x$; 7) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=2x$; 8) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\sqrt{x}$.

Ответы. 1) Нет решений; 2) 1; 2; 3) —0,77; 2; 4; 4) 0; 1; 4,3; 5) 0; 1; 6) 0,65; 7) 0,38; 8) 0,5.

4. Доказать, что если число α есть корень уравнения $2^x=x^2$, то $-\alpha$ есть корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x^2$, а также уравнения $2^x=\frac{1}{x^2}$. Проиллюстрировать это на графиках. Обобщить предложение.

5. Доказать, что если число α есть корень уравнения $2^x=2x$, то $-\alpha$ есть корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^x=-2x$, а также уравнения $2^x=-\frac{1}{2x}$. Проиллюстрировать на графиках. Обобщить предложение.

Указание Обратить внимание на четность или нечетность функций и на симметрию графиков.

§ 3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМА

1. Понятие о логарифме. Если a есть положительное число, то каждому действительному числу α соответствует одно и только одно действительное число b, являющееся степенью числа a с показателем α:

$$(1) \qquad a^\alpha=b.$$

В § 2, п. 2 было доказано, что если a есть положительное число, отличное от 1, то каждому действительному числу b соответствует одно и только одно действительное число α, являющееся показателем степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Определение. Показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, называется логарифмом числа b при основании a. Для обозначения того соотношения, что число α есть логарифм числа b при основании a, пишут:

$$(2) \qquad \alpha=\log_a b,$$

где знак log есть сокращенная запись слова «логарифм» и при чтении заменяется этим словом, так что равенство (2) читается так: «α есть логарифм числа b при основании a».

Например:

$$\log_2 8=3,\ \log_{10} 10000=4,\ \log_{0,2} 0,04=2.$$

Из этого определения непосредственно следует тождество:

$$a^{\log_a b}=b;$$

в самом деле, $\log_a b$ есть показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b.

Например:

$$2^{\log_2 5}=5;\ 10^{\log_{10} 32}=32;\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 4,8}=4,8.$$

Эти тождества выражают ту мысль, что в результате последовательного выполнения двух операций: 1) нахождения логарифма α какого-либо числа b при основании a и 2) возведения этого основания a в степень, показатель которой равен найденному логарифму α, мы получим число b.

Очевидно, что нахождение степени данного числа a с данным показателем α и нахождение логарифма данного числа b при данном основании a являются взаимно обратными действиями: первое действие состоит в нахождении степени b по данному основанию a и данному показателю α, а второе — в нахождении показателя α по данному основанию a и данной степени b.

Но, подобно тому как при вычитании данной сумме и данному слагаемому дают новые названия — уменьшаемое и вычитаемое, а при делении данному произведению и данному сомножителю дают новые названия — делимое и делитель, точно так же при нахождении логарифма какого-либо числа b при данном основании a это число b называют «логарифмируемым числом», а основание a называют «основанием логарифма».

Таким образом, равенства (1) и (2) читаются по-разному, но выражают одно и то же соотношение между числами a, α, b, и поэтому каждое из них всегда, когда это требуется, можно заменить другим.

Так, равенство $\log_2 32=5$ выражает то же соотношение между числами 2, 32, 5, что и равенство $2^5=32$, и, обратно, второе равенство может быть заменено первым. В теории и на практике часто приходится применять эту замену.

Пример 1. Найти x, зная, что $\log_8 x=-\frac{3}{4}$.

Решение. Из данного равенства следует, что

$$x=8^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{8^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2^9}}=\frac{\sqrt[4]{2^3}}{8}=\frac{1}{8}\sqrt[4]{8}.$$

Пример 2. Найти x, зная, что $\log_x\sqrt{8}=\frac{2}{3}$.

Решение. Из данного равенства последовательно находим:

$$x^{\frac{2}{3}}=\sqrt{8}=2^{\frac{3}{2}};$$

$$x=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{9}{4}}=4\sqrt[4]{2}.$$

2. Свойства логарифма при любом основании.

Теорема 1. **При положительном основании отрицательные числа и число 0 не имеют логарифмов.**

Доказательство. Если бы при положительном основании a отрицательное число b имело логарифм α, то это означало бы, что при положительном основании a степень a^{α} равна отрицательному числу b, что невозможно (§ 1, п. 2, теорема 1).

Точно так же при $a>0$ невозможно и равенство $a^{\alpha}=0$ (§1, п. 2, теорема 1).

Теорема 2 (о знаке логарифма). Если основание логарифма и логарифмируемое число имеют один и тот же характер, то логарифм есть число положительное; если же основание логарифма и логарифмируемое число имеют различный характер, то логарифм есть число отрицательное, т. е. если $a>1$ и $b\gtrless 1$, то соответственно $\log_a b\gtrless 0$; если $0<a<1$ и $b\gtrless 1$, то соответственно $\log_a b\lesseqgtr 0$.

Доказательство. Пусть $\log_a b=\alpha$. Это означает, что $a^{\alpha}=b$.

В случае если $a>1$ и $b>1$ или $0<a<1$ и $b<1$, т. е. если основание a и степень b имеют один и тот же характер, показатель α не может быть ни нулем (так как $b\neq 1$), ни отрицательным числом (так как тогда — по теореме 2 (§1, п. 2) — числа a и b имели бы различный характер); следовательно, $\alpha>0$, т. е. $\log_a b>0$.

В случае же если $a>1$ и $0<b<1$ или $0<a<1$ и $b>1$, т. е. если основание a и степень b имеют различный характер, показатель α не может быть ни нулем (так как $b\neq 1$,) ни положительным числом (так как тогда — по теореме 2 (§1, п. 2) — числа a и b имели бы одинаковый характер); следовательно, $\alpha<0$, т. е. $\log_a b<0$.

Например:

1) если $\log_{10} 2=\alpha$, то $10^{\alpha}=2$; но $10>1$ и $2>1$; значит, $\alpha>0$;

2) если $\log_{10} 0{,}5=\beta$, то $10^{\beta}=0{,}5$; но $10>1$, а $0{,}5<1$; значит, $\beta<0$;

3) $\log_5 3>0$, а $\log_{0,2}3<0$;

4) $\log_{1,5} 0{,}8<0$, а $\log_{0,1} 0{,}8>0$.

Таким образом, знак логарифма числа b при каком-либо (положительном, отличном от 1) основании a зависит только от того, совпадают или не совпадают по характеру логарифмируемое число b и основание логарифма a.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какой знак имеют логарифмы:

$$\log_2 24{,}3;\ \log_{0,5} 0{,}45;\ \log_{0,3} 5{,}82?$$

2. Какое заключение можно сделать относительно логарифмируемого числа b, если

$$\log_5 b = -0{,}56;\ \log_{0,2} b = 1{,}25?$$

3. Какое заключение можно сделать относительно основания логарифмов a, если

$$\log_a 5 = 0{,}3;\ \log_a 0{,}8 = 4?$$

Теорема 3 (о монотонности логарифма). При положительном основании, большем единицы, большему числу соответствует и больший логарифм; а при положительном основании, меньшем единицы, большему числу соответствует меньший логарифм, т. е. если $a>0$, $a \gtrless 1$, $b>c$, то соответственно $\log_a b \gtrless \log_a c$.

Доказательство. Так как

$$b = a^{\log_a b},\quad c = a^{\log_a c},$$

то условие $b>c$ может быть записано в виде

$$a^{\log_a b} > a^{\log_a c}.$$

Отсюда следует (упражнение 1 на стр. 355), что при условии $a>1$ имеет место неравенство $\log_a b > \log_a c$, а при условии $0<a<1$ — неравенство $\log_a b < \log_a c$.

Например:

1) Если $\log_{10}5=\alpha$, $\log_{10}3=\beta$, то $10^\alpha=5$, $10^\beta=3$; но $5>3$, т. е. $10^\alpha>10\beta$; следовательно, $\alpha>\beta$, так как из предположения $\alpha=\beta$ вытекало бы неверное равенство $5=3$, а из предположения $\alpha<\beta$—неверное неравенство $5<3$.

2) Если $\log_{0,1} 5=\alpha$, $\log_{0,1} 3=\beta$, то $0{,}1^\alpha=5$, $0{,}1\beta=3$; но $5>3$, т. е. $0{,}1^\alpha>0{,}1^\beta$; следовательно, $\alpha<\beta$, так как из предположений $\alpha\geqslant\beta$ соответственно вытекало бы, что $5\leqslant3$.

3) $\log_{10} 5>\log_{10} 0{,}3$, так как $\log_{10}5>0$, а $\log_{10} 0{,}3<0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Который из двух логарифмов больше:

$$\log_5 0{,}8 \text{ или } \log_5 0{,}9;\ \log_{0,3}1{,}5 \text{ или } \log_{0,3}1{,}7;$$
$$\log_5 1{,}5 \text{ или } \log_5 0{,}8;\ \log_5 0{,}9 \text{ или } \log_5 9?$$

2. Какое заключение можно сделать относительно логарифмируемых чисел b и c, если

$$\log_3 b<\log_3 c;\ \log_{0,5} b>\log_{0,5} c?$$

3. Какое заключение можно сделать относительно основания логарифмов a, если

$$\log_a 2{,}3<\log_a 1{,}2;\ \log_a 0{,}7> \log_a 0{,}4?$$

Теорема 4. Если логарифмируемое число и основание логарифма возвести в одну и ту же степень, то логарифм останется без изменения, т. е. $\log_{a^\alpha} b^\alpha = \log_a b$.

Доказательство. Если $\log_a b = \beta$, то $a^3 = b$; следовательно, $a^{\beta\alpha} = b^\alpha$, т. е. $(a^\alpha)^\beta = b^\alpha$; отсюда следует, что $\log_{a^\alpha} b^\alpha = \beta = \log_a b$.

Пример.

$$\log_2 8 = 3; \ \log_{2^5} 8^5 = 3; \ \log_{2^{\frac{1}{3}}} 8^{\frac{1}{3}} = 3.$$

Теорема 5. При положительном основании логарифм числа 1 равен нулю.

В самом деле, если $a > 0$, то $a^0 = 1$; следовательно, $\log_a 1 = 0$.

Теорема 6. При положительном основании логарифм числа, равного основанию, равен 1.

В самом деле, если $a > 0$, то $a^1 = a$; следовательно, $\log_a a = 1$.

§ 4. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1. ***Определение.*** Функция, определяемая равенством

$$y = \log_a x,$$

где a есть положительное и отличное от единицы число, называется логарифмической функцией.

Из этого определения следует, что каждое значение логарифмической функции y есть логарифм при основании a некоторого значения независимой переменной x.

2. Свойства логарифмической функции.

Свойство 1. Логарифмическая функция определена (существует) только для положительных значений независимой переменной.

Это непосредственно следует из теоремы 1 (§ 3).

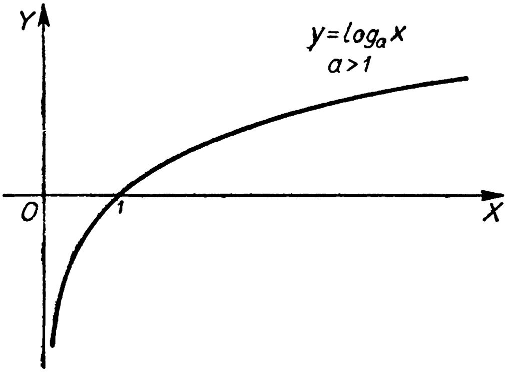
В силу свойства 1 все точки графика логарифмической функции могут быть расположены только в положительной полуплоскости по отношению к оси OY (черт. 105 и 106).

Свойство 2. Если $a > 1$, то логарифмическая функция $y = \log_a x$ имеет в промежутке $(0, 1)$ отрицательные значения, а в промежутке $(1, \infty)$ — положительные значения (черт. 105). Если же $0 < a < 1$, то логарифмическая функция $y = \log_a x$ имеет в промежутке $(0, 1)$ положительные значения, а в промежутке $(1, \infty)$ — отрицательные значения (черт. 106). Это непосредственно следует из теоремы 2 (§ 3).

Поэтому часть графика функции $y = \log_a x$, соответствующая промежутку $(0, 1)$, располагается при $a > 1$ под осью OX, а при $0 < a < 1$ — над осью OX; наоборот, часть графика этой функции, соответствующая промежутку $(1, \infty)$, располагается при $a > 1$ над осью OX, а при $0 < a < 1$ — под осью OX (черт. 105 и 106).

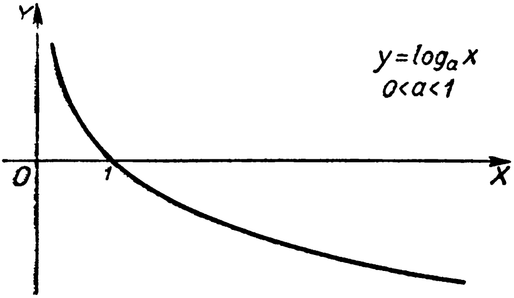
Свойство 3. Если $a>1$, то $y=\log_a x$ есть возрастающая функция; если же $0<a<1$, то $y=\log_a x$ есть убывающая функция.

Доказательство. Если $x_2>x_1$, то при $a>1$ имеет место неравенство $\log_a x_2>\log_a x_1$, а при $0<a<1$ — неравенство $\log_a x_2<\log_a x_1$ (теорема 3, §3).



Черт. 105

Поэтому график функции $y=\log_a x$ представляет собой кривую, которая на всем своем протяжении, соответствующем изменению абсциссы x ее точек от 0 до $+\infty$, в случае $a>1$ поднимается вверх, а в случае $0<a<1$ опускается вниз.



Черт. 106

Свойство 4. Если $a>1$, то при неограниченном возрастании переменной x функция $\log_a x$ неограниченно возрастает (стремится к $+\infty$), а при неограниченном приближении переменной x к нулю эта функция неограниченно убывает (стремится к $-\infty$); если же $0<a<1$, то при неограниченном возрастании переменной x функция $\log_a x$ неограниченно убывает (стремится к $-\infty$), а при неограниченном приближении переменной x к нулю эта функция неограниченно возрастает (стремится к $+\infty$).

Доказательство. Пусть M будет какое-либо положительное число.

Из свойства 3 следует, что для того, чтобы при $a>1$ выполнялось неравенство

$$\log_a x > M,$$

т. е. неравенство

$$\log_a x > \log_a a^M,$$

достаточно, чтобы переменная x удовлетворяла неравенству

$$x > a^M,$$

а для того, чтобы при том же условии выполнялось неравенство

$$\log_a x < -M,$$

т. е. неравенство

$$\log_a x < \log_a a^{-M},$$

достаточно, чтобы переменная x удовлетворяла неравенству

$$x < a^{-M}.$$

Точно так же из свойства 3 следует, что для того, чтобы при $0<a<1$ выполнялось неравенство

$$\log_a x < -M,$$

т. е. неравенство

$$\log_a x < \log_a a^{-M},$$

достаточно, чтобы переменная x удовлетворяла неравенству

$$x > a^{-M},$$

а для того, чтобы при том же условии выполнялось неравенство

$$\log_a x > M,$$

т. е. неравенство

$$\log_a x > \log_a a^M,$$

достаточно, чтобы переменная x удовлетворяла неравенству

$$x < a^M.$$

Например, для того, чтобы узнать, при каких значениях переменной x выполняется неравенство

$$\log_3 x > 10,$$

достаточно представить это неравенство в виде

$$\log_3 x > \log_3 3^{10};$$

тогда можно будет заключить, что оно имеет место при $x > 3^{10}$.

Точно так же неравенство

$$\log_3 x < -10$$

выполняется при $x < 3^{-10}$, т. е. при $x < \frac{1}{3^{10}}$.

Неравенство

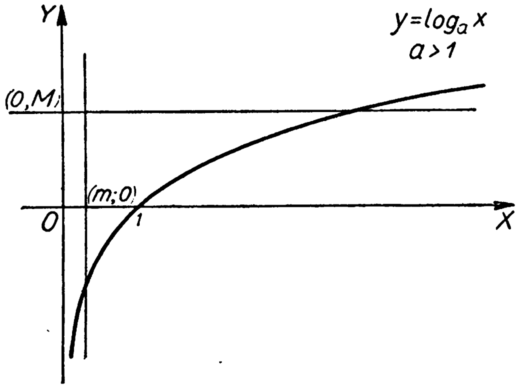
$$\log_{0,1} x > 10$$

выполняется при $x < 0,1^{10}$, а неравенство

$$\log_{0,1} x < -10$$

выполняется при $x > 0,1^{-10}$, т. е. при $x > 10^{10}$.

Из свойства 4 следует, что, как бы велико ни было положительное число M, при условии $a > 1$ график функции $\log_a x$ поднимается выше прямой, проходящей через точку (0; M) и параллельной оси OX. Точно так же, как бы мало ни было положительное число m, график этой функции по направлению справа налево входит в полосу, которую образует с осью OY прямая, проходящая через точку (m; 0) и параллельная оси OY, и в силу этого постепенно все больше приближается к этой оси, нигде, однако, ее не достигая (черт. 107), т. е. приближается к оси OY асимптотически (гл. IV, § 7, п. 2).



Черт. 107

С помощью аналогичных рассуждений установим, как ведет себя график функции $\log_a x$ при условии $0 < a < 1$.

3. График логарифмической функции. Для построения графика логарифмической функции можно было бы поступить так же, как и при построении графика показательной функции, т. е., составив таблицу значений функции $y = \log_a x$ и учитывая ее свойства 1—5, построить ее график по точкам, координаты которых указаны в таблице. Однако, как будет выяснено в следующем пункте, построение графика логарифмической функции можно полностью свести к построению графика показательной функции.

4. Связь между показательной и логарифмической функциями. Как было установлено (§ 2, п. 2), показательная функция $y = a^x$ определена для всех действительных значений независимой переменной x ($-\infty < x < +\infty$) и монотонно изменяется от 0 до $+\infty$ или от $+\infty$ до 0, причем каждое число, принадлежащее этому промежутку, является ее значением, которое она принимает один и только один раз.

Поэтому, если переменные x и y связаны между собой уравнением

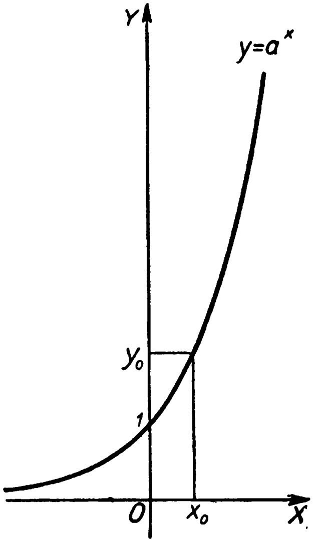
(1) $$y=a^x \quad (a>0,\ a\neq 1),$$

то не только каждому значению x_0 переменной x, принадлежащему промежутку $(-\infty, +\infty)$, соответствует значение y_0 переменной y, определяемое равенством

(2) $$y_0=a^{x_0}$$

и в силу этого принадлежащее промежутку $(0, +\infty)$, но и, наоборот, каждому числу y_0, принадлежащему промежутку $(0, +\infty)$, соответствует одно и только одно значение x_0 переменной x, которое принадлежит промежутку $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет равенству (2).

Для того чтобы по заданному числу y_0 найти соответствующее ему значение x_0 переменной x, удовлетворяющее равенству (1), достаточно по ординате y_0 точки графика показательной функции найти ее абсциссу x_0 (черт. 108).



Черт. 108

Таким образом, если функциональная зависимость переменной y от переменной x выражается уравнением (1), то в силу этого и переменная x оказывается в некоторой функциональной зависимости от переменной y. Для того чтобы найти то уравнение, которым выражается эта зависимость, решим уравнение (1) по отношению к переменной x; мы найдем уравнение

(3) $$x=\log_a y,$$

которое указывает, что в силу уравнения (1) переменная x находится в такой функциональной зависимости от переменной y, которая выражается равенством (3), т. е. что переменная x является логарифмической функцией от переменной y.

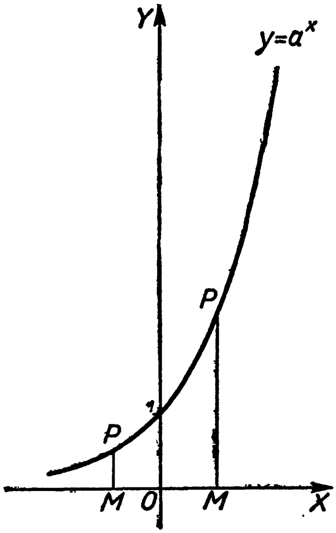
В наглядной форме это означает, что если точка M (черт. 109 а) будет перемещаться по оси OX от $-\infty$ до $+\infty$, то соответствующая ей переменная ордината MP точки P графика будет монотонно изменяться по закону (1) от 0 до $+\infty$. Если же точка N (черт. 109 б) будет перемещаться по оси OY от 0 до $+\infty$, то соответствующая ей переменная абсцисса NQ точки Q графика будет монотонно изменяться по закону (3) от $-\infty$ до $+\infty$.

Уже отсюда ясно, что для построения графика функции, заданной уравнением

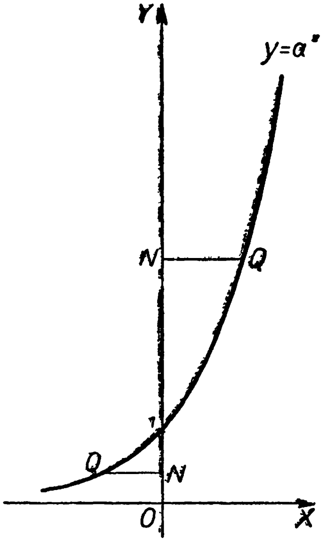
$$(4) \qquad y = \log_a x,$$

в котором функция, как обычно, обозначена через y, а независимая переменная — через x, достаточно построить график показательной функции

$$x = a^y.$$



Черт. 109 а



Черт. 109 б

Нетрудно видеть, что этот график и график функции (1) симметрично расположены по отношению к биссектрисе первого и третьего координатных углов. В самом деле, если $(m;\ n)$ есть точка графика функции (1), то

$$n = a^m.$$

Поэтому верно равенство

$$m = \log_a n,$$

т. е. $(n;\ m)$ есть точка графика функции (4).

Обратно, если точка $(m;\ n)$ есть точка графика функции (4), то

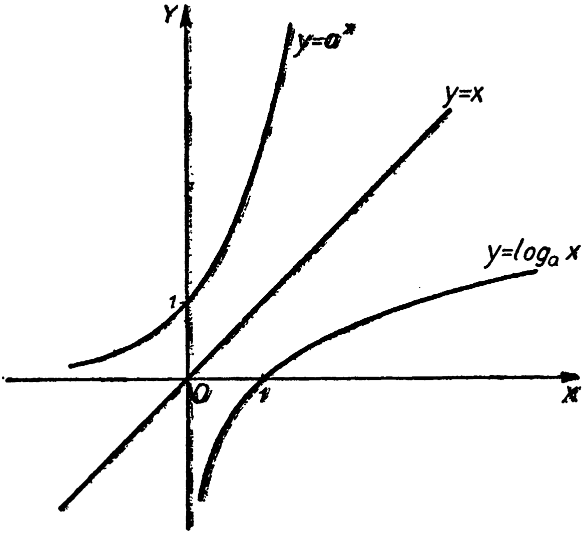
$$n = \log_a m.$$

Поэтому верно равенство

$$m = a^n,$$

т. е. $(n;\ m)$ есть точка графика функции (1).

Следовательно, каждой точке (m, n) первого (второго) графика соответствует симметрично расположенная с ней относительно указанной биссектрисы точка второго (первого) графика (гл. II, §3, п. 12). Ввиду этого каждый из этих двух графиков может быть получен как зеркальное отражение другого графика относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (черт. 110).



Черт. 110

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить графики функций:

$$y = \log_3 x,\ y = \log_{\frac{1}{3}} x;\quad y = \log_{10} x,\ y = \log_{\frac{1}{10}} x.$$

2. Построить графики функций:

$$y = 2\log_4 x,\ y = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} x.$$

Указание. Воспользоваться тождеством (§ 3, теорема 4)

$$\log_a x = \log_{a^\alpha} x^\alpha.$$

3. Построить графики функций:

$$y = \log_3(x-2),\ y = \log_{\frac{1}{2}}(x+3).$$

С помощью какого геометрического преобразования эти графики могут быть получены соответственно из графиков функций:

$$y = \log_3 x \text{ и } y = \log_{\frac{1}{2}} x?$$

4. Найти точки пересечения графиков функций:

$$y = 1{,}3^x \text{ и } y = \log_{1{,}3} x.$$

Указание. Для этого достаточно найти точки пересечения любого из этих графиков с биссектрисой $y = x$, т. е. графически решить, например, уравнение

$$1{,}3^x = x.$$

Ответ. $x_1 \approx 1{,}5$; $x_2 \approx 7{,}9$.

5. При каком основании a графики функций

$$y = a^x \text{ и } y = \log_a x$$

пересекаются в точке, имеющей абсциссу: 1) 2; 2) 27; 3) $\frac{1}{3}$.

Ответ. При основании a, удовлетворяющем уравнению:

$$1)\ a^2 = 2; \qquad 2)\ a^{27} = 27; \qquad 3)\ a^{3} = \frac{1}{3},$$

т. е. при

$$1)\ a = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \qquad 2)\ a = 27^{\frac{1}{27}} = \sqrt[27]{3^3} = \sqrt[9]{3};$$

$$3)\ a = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

§ 5. ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ И ПОТЕНЦИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

1. Логарифм произведения, частного, степени и корня. Основываясь на возможности представить каждое данное положительное число в виде степени данного положительного и отличного от 1 основания, можно доказать следующие теоремы:

Теорема 1. Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей:

$$\log_a (bc\ldots l) = \log_a b + \log_a c + \ldots + \log_a l.$$

Доказательство. Если

$$\log_a b = \beta,\ \log_{\chi} c = \gamma,\ \ldots,\ \log_a l = \lambda,$$

то

$$b = a^{\beta},\ c = a^{\gamma},\ \ldots,\ l = a^{\lambda}.$$

Следовательно,

$$bc\ldots l = a^{3+\gamma+\ldots+\lambda}.$$

Поэтому

$$\log_a(bc\ldots l) = \beta + \gamma + \ldots + \lambda = \log_a b + \log_a c + \ldots + \log_a l.$$

Теорема 2. Логарифм частного двух положительных чисел равен разности между логарифмом делимого и логарифмом делителя:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$$

Доказательство. Если

$$\log_a b = \beta,\ \log_a c = \gamma;\ \text{то } b = a^{\beta},\quad c = a^{\gamma}.$$

Следовательно,

$$\frac{b}{c} = a^{\beta-\gamma}.$$

Поэтому

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \beta - \gamma = \log_a b - \log_a c.$$

Следствие. Так как $\log_a 1 = 0$, то

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b,$$

т. е. логарифмы двух взаимно обратных чисел b и $\frac{1}{b}$ отличаются только знаком.

Поэтому каждой точке графика логарифмической функции с координатами $(b; \log_a b)$, где $b > 1$, соответствует точка этого графика с координатами $\left(\frac{1}{b}; -\log_a b\right)$, так что в точке $(1; 0)$ график логарифмической функции делится на две части, обладающие тем свойством, что ординаты точек одной из этих частей только знаком отличаются от ординат точек другой части, полностью повторяя их в отношении последовательности и абсолютных значений. Например, для построения ординаты той точки графика логарифмической функции $y = \log_3 x$, которая соответствует абсциссе $\frac{1}{4}$, достаточно найти ординату той точки этого графика, которая соответствует абсциссе 4, и отложить ее в отрицательном направлении.

Теорема 3. Логарифм степени положительного числа равен логарифму этого числа, умноженному на показатель степени:

$$\log_a (b^\alpha) = \alpha \cdot \log_a b.$$

Доказательство. Если $\log_a b = \beta$, то $b = a^\beta$. Следовательно,

$$b^\alpha = a^{\alpha\beta}.$$

Поэтому $$\log_a (b^\alpha) = \alpha\beta = \alpha \cdot \log_a b.$$

Следствие. Логарифм корня из положительного числа равен логарифму этого числа, деленному на показатель корня:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b.$$

Доказательство. Так как $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ то, согласно теореме 3, находим, что

$$\log_a \left(\sqrt[n]{b}\right) = \log_a \left(b^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \log_a b.$$

Примеры.

1. $\log_a 72 = \log_a (2^3 \cdot 3^2) = \log_a 2^3 + \log_a 3^2 = 3\log_a 2 + 2\log_a 3$.

Следовательно, для нахождения логарифма числа 72 при каком угодно основании достаточно знать логарифмы всех простых чисел, входящих в его разложение.

2. $\log_a \frac{75}{56} = \log_a \frac{3 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 7} = \log_a 3 + 2\log_a 5 - 3\log_a 2 - \log_a 7$.

3. $\log_a \sqrt[5]{99} = \log \sqrt[5]{3^2 \cdot 11} = \frac{1}{5}(2\log_a 3 + \log_a 11)$.

ВОПРОСЫ

1. Посредством каких геометрических преобразований график функции $y = \log_{10} 3x$ может быть получен из графика функции $y = \log_{10} x$?

2. **Посредством каких геометрических преобразований график функции $y = \log_{10} \frac{x}{3}$ может быть получен из графика функции $y = \log_{10} x$?**

Ответ. Либо посредством сжатия (растяжения) в 3 раза по направлению оси OX, либо посредством перенесения параллельно оси OY вверх (вниз) на отрезок $\log_{10} 3$.

При сжатии (растяжении) графика в 3 раза по направлению оси OX ордината, соответствовавшая абсциссе a, становится соответствующей абсциссе $\frac{a}{3}$ $(3a)$.

2. Логарифмирование выражений. Если арифметическое выражение составлено из данных положительных чисел посредством умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, то, пользуясь теоремами 1—3, можно логарифм этого выражения представить в зависимости от логарифмов входящих в него чисел. Это преобразование называется *логарифмированием выражения*.

Пример 1. Выполнить логарифмирование выражения:

$$x = \frac{a^2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{cd}}.$$

1) Данное выражение есть дробь; по теореме 2 имеем:

$$\log x = \log (a^2\sqrt[3]{b}) - \log \sqrt[4]{cd}.$$

2) Числитель есть произведение, первый сомножитель которого есть степень, а второй—корень; применяя сначала теорему 1, а затем теорему 3 и ее следствие, последовательно получаем:

$$\log (a^2\sqrt[3]{b}) = \log a^2 + \log \sqrt[3]{b} = 2\log a + \frac{1}{3}\log b.$$

3) Знаменатель есть корень из произведения; применяя сначала следствие из теоремы 3, а затем теорему 1, последовательно получаем:

$$\log \sqrt[4]{cd} = \frac{1}{4}\log (cd) = \frac{1}{4}(\log c + \log d).$$

Окончательно находим:

$$\log x = 2\log a + \frac{1}{3}\log b - \frac{1}{4}(\log c + \log d).$$

Пример 2. Выполнить логарифмирование выражения:

$$x = \sqrt[5]{\frac{a\sqrt[3]{\frac{b}{c}}}{d^4}}.$$

Применяя теоремы 1—3, последовательно получаем:

$$\log x = \frac{1}{5}\left[\log a + \frac{1}{3}(\log b - \log c) - 4\log d\right].$$

Пример 3. Выполнить логарифмирование выражения:

$$x = \frac{a(b-c)^4}{\sqrt[3]{(ab-c)^2}}.$$

Последовательно получаем:

$$\log x = \log a + 4\log(b-c) - \frac{2}{3}\log(ab-c).$$

3. Потенцирование выражений. Если над некоторым выражением x выполнено логарифмирование и дано равенство, представляющее логарифм выражения x в зависимости от логарифмов входящих в него чисел, то можно на основании этого равенства найти выражение x. Это преобразование называется потенцированием.

Пример 1. Выполнить потенцирование выражения:

$$2\log a - \frac{1}{2}\log b + \frac{1}{3}\log x - 3\log y.$$

Представляя данную алгебраическую сумму в виде разности

$$\left(2\log a + \frac{1}{3}\log x\right) - \left(\frac{1}{2}\log b + 3\log y\right)$$

и применяя теоремы 1—3, последовательно находим:

$$2\log a = \log a^2;\quad \frac{1}{3}\log x = \log\sqrt[3]{x};$$

$$\frac{1}{2}\log b = \log\sqrt{b};\quad 3\log y = \log y^3;$$

$$2\log a + \frac{1}{3}\log x = \log a^2 + \log\sqrt[3]{x} = \log(a^2\cdot\sqrt[3]{x});$$

$$\frac{1}{2}\log b + 3\log y = \log\sqrt{b} + \log y^3 = \log(\sqrt{b}\cdot y^3);$$

$$\log(a^2\sqrt[3]{x}) - \log(\sqrt{b}\cdot y^3) = \log\frac{a^2\sqrt[3]{x}}{y^3\sqrt{b}}.$$

Следовательно, искомое выражение есть $\dfrac{a^2\sqrt[3]{x}}{y^3\sqrt{b}}$.

Пример 2. Зная, что

$$\log x = \frac{1}{3}\log(a^2+b^2) - \frac{1}{2}[\log(a+b) + \log(a-b)],$$

найти x.

Последовательно находим:

$$\frac{1}{3}\log(a^2+b^2) = \log\sqrt[3]{a^2+b^2};$$

$$\log(a+b) + \log(a-b) = \log(a^2-b^2);$$

$$\frac{1}{2}\log(a^2-b^2) = \log\sqrt{a^2-b^2};$$

$$\log x = \log\sqrt[3]{a^2+b^2} - \log\sqrt{a^2-b^2} = \log\frac{\sqrt[3]{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Следовательно, $x = \dfrac{\sqrt[3]{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$4\log\frac{x}{2} + 3\log\frac{x}{3} = 5\log x - \log 27.$$

Посредством потенцирования придаем уравнению вид:

$$\log\left[\left(\frac{x}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{x}{3}\right)^3\right] = \log\frac{x^5}{27}.$$

Отсюда получаем уравнение:

$$x^7 = 16x^5;$$

оно имеет корни $x_{1,2,3,4,5} = 0$; $x_{6,7} = \mp 4$.

Из них годится только положительный корень 4.

Примечание. В п. 2 и п. 3 предполагается, что все основания логарифмов выбраны произвольно и что все буквы, входящие в данные выражения, имеют положительные значения.

§ 6. ДЕСЯТИЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

1. Понятие о десятичном логарифме. Вся теория логарифмов относится к логарифмам, взятым при любом положительном основании, отличном от 1.

Однако в связи с тем, что за основание устного и письменного счисления принято число 10, для применения логарифмов к вычислениям оказалось весьма выгодным и за основание логарифмов принять число 10.

Логарифмы чисел при основании 10 называются десятичными логарифмами.

Для обозначения десятичного логарифма употребляется вместо знака log знак lg, причем указание на основание 10 логарифма опускается, так что

$$\lg N = \log_{10} N.$$

Десятичные логарифмы чисел обладают рядом свойств, значительно облегчающих нахождение их и выполнение действий над ними.

Зная десятичный логарифм числа N, можно найти логарифм того же числа при любом основании a с помощью формулы:

$$\log_a N = \lg N \cdot \frac{1}{\lg a},$$

т. е. логарифм числа N при основании a равен десятичному логарифму этого числа, деленному на десятичный логарифм основания a.

Эта формула есть частный случай следующей общей формулы:

$$(1) \qquad \log_a N = \log_b N \cdot \frac{1}{\log_b a}.$$

т. е. логарифм какого-либо числа N при новом основании a равен логарифму этого числа при старом основании b, деленному на логарифм нового основания a при старом основании b.

В самом деле,

$$N = a^{\log_a N}, \; N = b^{\log_b N}.$$

Поэтому

$$a^{\log_a N} = b^{\log_b N}.$$

Найдем логарифмы этих равных чисел при основании b:

$$\log_a N \cdot \log_b a = \log_b N.$$

Отсюда

$$\log_a N = \log_b N \cdot \frac{1}{\log_b a}.$$

Полагая в этой формуле $N = b$, получаем формулу:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ или } \log_a b \cdot \log_b a = 1,$$

указывающую на то, что числа

$$\log_b a \text{ и } \log_a b$$

являются взаимно обратными.

Примеры. Зная, что $\lg 2 = 0{,}3010$, $\lg 3 = 0{,}4771$, $\lg 5 = 0{,}6990$, находим:

$$1.\ \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} = \frac{0{,}4771}{0{,}3010} = \frac{4771}{3010} \approx 1{,}585.$$

$$2.\ \log_3 2 = \frac{\lg 2}{\lg 3} = \frac{0{,}3010}{0{,}4771} = \frac{3010}{4771} \approx 0{,}631.$$

$$3.\ \log_5 10 = \frac{1}{\lg 5} = \frac{1}{0{,}699} = \frac{1000}{699} \approx 1{,}431.$$

$$4.\ \log_3 2 = \frac{1}{\lg_2 3} = \frac{1}{1{,}585} \approx 0{,}631.$$

2. Десятичные логарифмы чисел вида 10^n . Если число N есть степень числа 10, то десятичный логарифм числа N равен показателю этой степени, т. е.
если

$$N = 10^\alpha, \text{ то } \lg N = \alpha.$$

Это непосредственно следует из определения логарифма.

Могут представиться следующие случаи:

1) $\alpha = n$, где n — положительное целое число.

В этом случае

$$10^\alpha = 10^n = \underbrace{10\ldots0}_{n};\ \lg \underbrace{10\ldots0}_{n} = n,$$

т. е. десятичный логарифм целого положительного числа, которое изображается единицей, сопровождаемой n нулями, равен числу нулей n в этом изображении. Например:

$$\lg 1000 = 3, \text{ так как } 1000 = 10^3.$$

2) $\alpha = -n$, где n — положительное целое число.

В этом случае

$$10^\alpha = 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}0\ldots0}_{n}1;\ \lg \underbrace{0{,}0\ldots0}_{n}1 = -n,$$

т. е. десятичный логарифм правильной десятичной дроби, которая изображается единицей, предшествуемой n нулями, считая и 0 целых, есть отрицательное число $-n$, абсолютное значение которого n равно числу нулей в этом изображении. Например:

$$\lg 0{,}0001 = -4, \text{ так как } 0{,}0001 = 10^{-4}.$$

3. Иррациональные логарифмы целых чисел. Если N есть целое положительное число, не являющееся степенью числа 10 с целым положительным показателем, т. е. не имеющее вида $\underbrace{10\ldots0}_{n}$, то десятичный логарифм этого числа N есть число иррациональное.

В самом деле, если бы десятичный логарифм числа N был равен дроби $\frac{r}{s}$, где r и s — целые положительные числа, то имело бы место равенство

$$10^{\frac{r}{s}} = N,$$

из которого следовало бы равенство

$$10^r = N^s.$$

Но это равенство невозможно, так как его левая часть представляет собой произведение $2^r \cdot 5^r$, а правая часть либо вовсе не содержит множителей 2 и 5, либо содержит их в неодинаковом числе, а между тем равные числа могут только одним способом разлагаться на простые множители.

Например, десятичный логарифм числа 15 не может быть равен никакому рациональному числу $\frac{r}{s}$, так как, предположив, что

$$10^{\frac{r}{s}} = 15,$$

мы пришли бы к равенству

$$2^r \cdot 5^r = 3^s \cdot 5^s,$$

которое, очевидно, неверно.

Так как

$$10^1 < 15 < 10^2,$$

а при основании 10, большем, чем 1, меньшему числу соответствует и меньший логарифм, то

$$1 < \lg 15 < 2;$$

но lg 15 есть иррациональное число; следовательно, lg 15 изображается бесконечной непериодической десятичной дробью, т. е.

$$\lg 15 = 1,a_1\, a_2\, a_3 \ldots,$$

где a_1, a_2, a_3,... десятичные знаки логарифма.

Точно так же из неравенств

$$10^3 < 3456 < 10^4$$

заключаем, что

$$3 < \lg 3456 < 4,$$

т. е. что

$$\lg 3456 = 3,b_1\, b_2\, b_3 \ldots,$$

где b_1, b_2, b_3,... десятичные знаки бесконечной непериодической дроби, выражающей десятичный логарифм числа 3456.

На практике десятичный логарифм каждого целого числа, не имеющего вида $1\underbrace{0\ldots0}_{n}$, выражают приближенно, представляя его в виде конечной десятичной дроби с 3,4 или 5 десятичными знаками в зависимости от требуемой степени точности.

Например:

$$\lg 2 = 0{,}301, \text{ или } 0{,}3010, \text{ или } 0{,}30103;$$
$$\lg 15 = 1{,}176, \text{ или } 1{,}1761, \text{ или } 1{,}17609;$$
$$\lg 478 = 2{,}679, \text{ или } 2{,}6794, \text{ или } 2{,}67943.$$

4. Иррациональные логарифмы десятичных дробей. Если N есть десятичная дробь, не являющаяся степенью числа 10 с целым отрицательным показателем, т. е. не имеющая вида $\underbrace{0,0...0}_{n}1$, то десятичный логарифм этого числа N есть число иррациональное.

В самом деле, всякую десятичную дробь N, имеющую n десятичных знаков, можно представить в виде обыкновенной дроби $\frac{N'}{10^n}$, где N' есть числитель данной дроби.

Поэтому

$$\lg N = \lg N' - \lg (10^n) = \lg N' - n.$$

Но N' есть целое число, не являющееся степенью числа 10 с целым положительным показателем и, согласно условию, отличное от 1; следовательно, $\lg N'$ есть иррациональное число; вычтя из него целое число n, вновь получим иррациональное число.

Например:

$$\lg 47,8 = \lg\frac{478}{10} = \lg 478 - 1 = 2,679... - 1 = 1,679... .$$

На практике десятичный логарифм каждой десятичной дроби, не имеющей вида $\underbrace{0,0..0}_{n}1$, выражают приближенно, представляя его в виде конечной десятичной дроби с 3,4 или 5 десятичными знаками.

Например:

$$\lg 47,8 = 1,679, \text{ или } 1,6794, \text{ или } 1,67943;$$
$$\lg 4,78 = 0,679, \text{ или } 0,6794, \text{ или } 0,67943.$$

5. Характеристика и мантисса. Всякий приближенный десятичный логарифм какого-либо целого числа или десятичной дроби имеет вид десятичной дроби

$$c, m_1\, m_2\, m_3\, m_4\, m_5\,,$$

где c — ее целая часть, т. е. число целых единиц, а m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 — ее десятичные знаки. Эта дробь есть сумма целого числа c и правильной десятичной дроби $0, m_1\, m_2\, m_3\, m_4\, m_5$.

Целая часть c десятичной дроби, выражающей логарифм какого-либо числа, называется характеристикой этого логарифма, а его дробная часть $0, m_1\, m_2\, m_3\, m_4\, m_5$ — мантиссой этого логарифма.

Например, логарифм 4,9715 имеет характеристику 4 и мантиссу 0,9715.

Так как каждое целое число можно рассматривать как десятичную дробь, все десятичные знаки которой — нули, то и логарифмы чисел, имеющих вид $1\underbrace{0...0}_{n}$ или $\underbrace{0,0...0}_{n}1$, можно представить в виде десятичных дробей:

$$\lg 1000 = 3,0000; \lg 0,001 = -3,0000,$$

называя целые числа 3 и —3 их характеристиками, а правильные дроби 0,0000 — их мантиссами.

Характеристики десятичных логарифмов целых чисел и десятичных дробей находятся по простым правилам, которые будут выведены в п. 6—8. Для нахождения же мантисс десятичных логарифмов пользуются специальными таблицами, об устройстве и способе употребления которых будет изложено в § 7.

6. Десятичные логарифмы неправильных десятичных дробей. Относя к неправильным десятичным дробям и все целые числа, допустим, что N есть неправильная десятичная дробь, целая часть которой изображается n цифрами. При этом условии число N заключается между двумя смежными степенями числа 10:

$$10^{n-1} \leqslant N < 10^n.$$

Отсюда (по теореме 3, § 3) следует, что

$$n-1 \leqslant \lg N < n.$$

Поэтому

$$\lg N = (n-1) + m, \text{ где } 0 \leqslant m < 1;$$

если число m мы представим в виде правильной десятичной дроби $0, m_1 m_2 m_3 m_4$, имеющей десятичные знаки m_1, m_2, m_3, m_4, то найдем, что

$$\lg N = (n-1),\ m_1\ m_2\ m_3\ m_4,$$

т. е. число $\lg N$ имеет характеристику $n-1$ и мантиссу $0, m_1 m_2 m_3 m_4$.

Например, целая часть десятичной дроби 324,56 изображается 3 цифрами; поэтому

$$10^2 < 324,56 < 10^3.$$

Отсюда следует, что

$$2 < \lg 324,56 < 3,$$

т. е. что $\lg 324,56 = 2 + 0, m_1 m_2 m_3 m_4 = 2, m_1 m_2 m_3 m_4$.

Значит, характеристика логарифма неправильной десятичной дроби равна числу цифр, которыми изображается ее целая часть, уменьшенному на 1.

7. Десятичные логарифмы правильных десятичных дробей. Допустим, что требуется найти логарифм дроби 0,002356. В изображении этой дроби первой цифре, отличной от нуля, т. е. цифре 2, предшествует 3 нуля (считая и 0 целых). Поэтому если мы перенесем в этой дроби запятую на 3 цифры вправо, то мы получим неправильную десятичную дробь 2,356, целая часть которой будет изображаться только одной цифрой, ввиду чего характеристика десятичного логарифма этой дроби будет равна 0. По таблицам мы найдем мантиссу 0,3722 этого логарифма, так что окажется, что

$$\lg 2,356 = 0,3722.$$

Но

$$\lg 0,002356 = \lg (2,356 \cdot 10^{-3}) = \lg 2,356 - 3 = 0,3722-3.$$

Если мы выполним вычитание, то получим отрицательное число — 2,6278, как мы и ожидали получить, так как при основании 10 логарифмы всех правильных дробей — отрицательные числа. Найденный логарифм имеет отрицательную характеристику (—2) и отрицательную мантиссу (—0,6278). Однако в целях упрощения вычислений логарифм, имеющий отрицательную характеристику и отрицательную мантиссу, представляют в другом виде: именно, заменяя разность 0,3722 — 3 суммой (—3) + 0,3722, записывают эту сумму в форме десятичной дроби $\bar{3},3722$, указывающей, что выражаемый ею логарифм имеет отрицательную характеристику (—3) и положительную мантиссу (+0,3722):

$$\lg 0{,}002356 = \bar{3}{,}3722.$$

Пользуясь этим обозначением, мы можем сказать, что характеристика десятичного логарифма правильной десятичной дроби, в изображении которой до первого отличного от нуля десятичного знака имеется 3 нуля, считая и 0 целых, равна числу — 3, т. е. взятому со знаком минус числу этих нулей.

Вообще, если N есть правильная десятичная дробь, имеющая вид

$$\underbrace{0{,}0\ldots0}_{k}\,\alpha\beta\gamma\ldots\lambda, \text{ где } \alpha \neq 0,$$

то, перенося в этой дроби запятую на k цифр вправо, мы получим неправильную десятичную дробь $\alpha,\ \beta\gamma\ldots\lambda$, целая часть которой будет изображаться только одной цифрой, ввиду чего характеристика десятичного логарифма этой дроби будет равна 0. Если

$$\lg \alpha,\ \beta\gamma\ldots\lambda = 0,\ m_1\ m_2\ m_3\ m_4,$$

то

$$\lg \underbrace{0{,}0\ldots0}_{k}\,\alpha\beta\gamma\ldots\lambda = \lg(\alpha,\ \beta\gamma\ldots\lambda\cdot 10^{-k}) = \lg \alpha,\ \beta\gamma\ldots\lambda - k =$$

$$= \bar{k},\ m_1\ m_2\ m_3\ m_4.$$

Значит, характеристика десятичного логарифма правильной десятичной дроби, в изображении которой до первого отличного от нуля десятичного знака имеется k нулей, считая и 0 целых, равна числу —k, т. е. взятому со знаком минус числу этих нулей.

Логарифмы вида $\bar{k},\ m_1\ m_2\ m_3\ m_4$ называются логарифмами с отрицательными характеристиками.

8. Логарифмы, отличающиеся только характеристикой.

Теорема. Если в данной десятичной дроби мы перенесем запятую на k десятичных знаков вправо или влево, то мантисса десятичного логарифма данной дроби останется без изменения, а характеристика этого логарифма соответственно увеличится или уменьшится на k единиц.

Доказательство. Если b есть некоторая десятичная дробь (правильная или неправильная, в виде которой может быть представлено и каждое целое число), то перенесение в этой дроби запятой вправо или влево на k десятичных знаков равносильно умножению ее соответственно на 10^k или на 10^{-k}. Но

$$\lg(b \cdot 10^k) = \lg b + k; \ \lg(b \cdot 10^{-k}) = \lg b - k.$$

Следовательно, если $\lg b$ имеет вид $c, m_1 m_2 m_3 m_4$, то

$$\lg(b \cdot 10^k) = c, m_1 m_2 m_3 m_4 + k = (c + k), m_1 m_2 m_3 m_4;$$
$$\lg(b \cdot 10^{-k}) = c, m_1 m_2 m_3 m_4 - k = (c - k), m_1 m_2 m_3 m_4.$$

Например, если $\lg 3,1416 = 0,4972$, то

$$\begin{aligned} \lg 31,416 &= 0,4972 + 1 = 1,4972; \\ \lg 3141,6 &= 0,4972 + 3 = 3,4972; \\ \lg 31416 &= 0,4972 + 4 = 4,4972; \\ \lg 0,31416 &= 0,4972 - 1 = \bar{1},4972; \\ \lg 0,0031416 &= 0,4972 - 3 = \bar{3},4972. \end{aligned}$$

§ 7. ТАБЛИЦЫ ДЕСЯТИЧНЫХ ЛОГАРИФМОВ

1. Виды таблиц. В зависимости от того, с какой степенью точности считают необходимым выполнить вычисления, употребляют: 1) таблицы, которые содержат мантиссы логарифмов всех целых чисел от 1 до 9999 включительно, вычисленные с 4 десятичными знаками (четырехзначные таблицы), и 2) таблицы, которые содержат мантиссы логарифмов всех целых чисел от 1 до 99999 включительно, вычисленные с 5 десятичными знаками (пятизначные таблицы).

По этим таблицам можно решать две задачи: прямую, состоящую в нахождении логарифма данного числа, и обратную, состоящую в нахождении числа по данному его логарифму.

Однако для упрощения вычислений, необходимых при решении обратной задачи, четырехзначные «таблицы мантисс» логарифмов обычно сопровождаются четырехзначными «таблицами антилогарифмов», т. е. чисел, соответствующих данным мантиссам логарифмов.

Употребляемые в средней школе «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса содержат таблицы, носящие названия: «I. Мантиссы логарифмов» и «II. Антилогарифмы».

2. Устройство и употребление таблиц I и II.

1°. Таблица I имеет 2 входа. В первом слева вертикальном столбце, помеченном сверху и снизу буквой N (N — сокращение слова *Numerus*— число), помещены две первые цифры чисел, логарифмы которых ищутся. Справа от этого первого столбца последовательно расположены 10 столбцов, над и под которыми — в первой и последней строке рядом с буквой N—помещены числа 0, 1, 2,... ..., 8, 9, представляющие собой третью цифру данного числа.

В этих 10 вертикальных столбцах и содержатся четырехзначные мантиссы логарифмов трехзначных чисел. Мантисса логарифма данного трехзначного числа находится на пересечении той строки, в которой помещены две первые цифры этого числа, с тем столбцом, над или под которым стоит его третья цифра.

Например, мантисса логарифма числа 357 находится на пересечении строки, определяемой числом 35, и столбца, определяемого числом 7; эта мантисса есть 5527.

Ту же мантиссу имеют логарифмы всех чисел, отличающиеся от числа 357 только положением запятой:

$$\lg 357 = 2{,}5527; \qquad \lg 3{,}57 = 0{,}5527;$$

$$\lg 35700 = 4{,}5527; \ \lg 0{,}357 = \overline{1}{,}5527.$$

Для того чтобы с помощью той же таблицы I можно было находить также мантиссы логарифмов четырехзначных чисел, в ней вслед за 10 столбцами мантисс помещены 9 столбцов «поправок на четвертую цифру» данного четырехзначного числа, напечатанных курсивом; эти столбцы соответствуют числам 1, 2,..., 8, 9, стоящим над и под каждым из них.

Если требуется найти мантиссу логарифма четырехзначного числа, то, не обращая внимания на его четвертый знак, находят мантиссу логарифма трехзначного числа и к этой мантиссе прибавляют поправку на четвертую цифру данного числа, помещенную на той же строке таблицы поправок и в столбце, соответствующем этой четвертой цифре.

Например, мантисса логарифма числа 3578 есть 5527 + 10, т. е. 5537; следовательно,

$$\lg 3578 = 3{,}5537; \qquad \lg 35{,}78 = 1{,}5537;$$

$$\lg 35780 = 4{,}5537; \qquad \lg 0{,}03578 = \overline{2}{,}5537.$$

2°. Таблица II содержит «Антилогарифмы». **Антилогарифмом** числа a называется число, логарифм которого есть a.

В первом слева вертикальном столбце, помеченном сверху и снизу буквой m (m — сокращение слова *mantissa* — мантисса), помещены две первые цифры данных мантисс логарифмов, по которым ищутся соответствующие им числа. Справа от этого первого столбца последовательно расположены 10 столбцов, над и под которыми — в первой и последней строке рядом с буквой m — помещены числа 0, 1, 2,..., 8, 9, представляющие собой третью цифру данной мантиссы.

В этих 10 вертикальных столбцах и содержатся четырехзначные антилогарифмы. Антилогарифм, соответствующий данной трехзначной мантиссе, находится на пересечении той строки, в которой помещены две первые цифры этой мантиссы, с тем столбцом, над или под которым стоит ее третья цифра.

Например, антилогарифм, соответствующий мантиссе 663, находится на пересечении строки, определяемой числом 66, и столбца, определяемого числом 3; этот антилогарифм есть 4603.

Поэтому логарифмам

$$3{,}663;\ 5{,}663;\ 1{,}663;\ \bar{2}{,}663$$

соответствуют числа

$$4603;\ 460300;\ 46{,}03;\ 0{,}04603.$$

Для того чтобы с помощью той же таблицы II можно было учитывать и 4-й знак мантиссы данного логарифма, в ней вслед за 10 столбцами антилогарифмов помещены 9 столбцов «поправок на четвертую цифру» мантиссы данного четырехзначного логарифма, напечатанных курсивом; эти столбцы соответствуют числам 1, 2,... ...,8, 9, стоящим над и под каждым из них.

Если требуется найти антилогарифм четырехзначного логарифма, то, не обращая внимания не четвертый знак мантиссы данного логарифма, находят антилогарифм соответствующего трехзначного логарифма и к этому логарифму прибавляют поправку на четвертую цифру мантиссы данного логарифма, помещенную на той же строке таблицы поправок и в столбце, соответствующем этой четвертой цифре.

Например, если $\lg x = 3{,}6638$, то, найдя по мантиссе 663 соответствующий ей антилогарифм 4603, прибавляют к нему поправку на четвертую цифру 8, равную 9, и получают число 4612.

Поэтому логарифмам

$$3{,}6638;\ 5{,}6638;\ 1{,}6638;\ \bar{2}{,}6638$$

соответствуют числа

$$4612;\ 461200;\ 46{,}12;\ 0{,}04612.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти с помощью логарифмирования степени:

$$5^{10};\ (3845)^{10};\ (648{,}9)^{12}.$$

2. Найти с помощью логарифмирования корни:

$$\sqrt[3]{12};\ \sqrt[3]{267};\ \sqrt[3]{5{,}8};\ \sqrt[5]{9{,}817}.$$

3. Действия над логарифмами.

1°. *Замена вычитания сложением.* Пусть требуется вычесть логарифм 3,4271. Очевидно, что это вычитание может быть заменено прибавлением отрицательного числа — 3,4271. Но число — 3,4271 есть сумма отрицательного целого числа (— 3) и отрицательной правильной дроби (— 0,4271). Если же мы прибавим к первому слагаемому отрицательное число (— 1), а ко второму — положительное число (+1), то результат можно будет записать в виде $\bar{4}{,}5729$; это число будет представлять собой сумму отрицательного числа (—4) и положительной правильной дроби 0,5729. Итак,

(1) $$-3{,}4271 = (-4) + 0{,}5729 = \bar{4}{,}5729.$$

Пусть требуется вычесть логарифм $\bar{2}{,}4271$; это вычитание может быть заменено прибавлением числа $-\bar{2}{,}4271$. Так как

$$\bar{2}{,}4271 = (-2) + 0{,}4271,$$

то

$$-\bar{2}{,}4271 = (+2) + (-0{,}4271).$$

Если же мы, как и в первом примере, прибавим к первому слагаемому (—1), а ко второму (+1), то получим, что

(2) $$-\bar{2}{,}4271 = (+1) + (+0{,}5729) = 1{,}5729.$$

На основании равенств (1) и (2) можно вывести следующее правило: для того чтобы вычесть логарифм, достаточно прибавить другой логарифм, который составляется из первого так: к характеристике прибавляется положительная единица и у результата знак изменяется на противоположный, а мантисса вычитается из 1 (для чего все ее цифры вычитаются из 9, а последняя значащая цифра — из 10).

Например:

$$-1{,}6903 = \bar{2}{,}3097; \ -0{,}4972 = \bar{1}{,}5028;$$
$$-\bar{4}{,}5812 = 3{,}4188; \ -\bar{1}{,}0735 = 0{,}9265;$$
$$-2{,}5730 = \bar{3}{,}4270 \text{ (здесь последняя значащая цифра 3).}$$

2°. *Действия над логарифмами с отрицательными характеристиками.* Каждый логарифм с отрицательной характеристикой есть алгебраическая сумма целого отрицательного числа и положительной правильной дроби; этим определяются особенности действий над логарифмами, среди которых имеются логарифмы с отрицательными характеристиками.

Сложение. Для того чтобы выполнить сложение нескольких логарифмов (с положительными мантиссами), достаточно найти арифметическую сумму их мантисс и алгебраическую сумму их характеристик. Например:

$$\begin{array}{r}
\lg 200 = 2{,}3010 \\
\lg 0{,}07 = \bar{2}{,}8451 \\
\lg 0{,}12 = \bar{1}{,}0792 \\
-\lg 65 = \bar{2}{,}1871 \\
\hline
\lg \dfrac{200 \cdot 0{,}07 \cdot 0{,}12}{65} = \bar{2}{,}4124
\end{array}$$

Умножение на целое положительное число. Для того чтобы найти произведение логарифма с отрицательной характеристикой на целое положительное число, надо найти алгебраическую сумму произведений мантиссы и характеристики на это число. Для этого находят произведение мантиссы на данное число и целую часть этого произведения прибавляют к произведению характеристики на то же число. Например:

$$\begin{array}{rl} 3\lg 0{,}07 = & \bar{2}{,}8451 \\ & \times 3 \\ \hline & \bar{4}{,}5353 \end{array}$$

$$\lg 0{,}07^3 = \bar{4}{,}5353$$

Деление на целое положительное число. При делении логарифма с отрицательной характеристикой на целое положительное число могут представиться два случая:

1) Если характеристика логарифма делится на данное число, то находят частное от ее деления на это число и к нему присоединяют в качестве мантиссы частное от деления мантиссы логарифма на то же число. Например:

$$\frac{1}{3}\lg 0{,}007 = \frac{1}{3}\cdot\bar{3}{,}8451 = \bar{1}{,}2817;$$

$$\frac{1}{2}\lg\ 0{,}07 = \frac{1}{2}\cdot\bar{2}{,}8451 = \bar{1}{,}4226.$$

2) Если характеристика логарифма не делится на данное число, то ее дополняют отрицательными единицами до ближайшего отрицательного целого числа, делящегося на данный делитель, а к мантиссе прибавляют столько же положительных единиц, после чего выполняют деление так, как в случае 1. Например:

$$\frac{1}{3}\lg\ 0{,}07 = \frac{1}{3}\cdot\bar{2}{,}8451 = \frac{1}{3}\left(\bar{3} + 1{,}8451\right) = \bar{1}{,}6150;$$

$$\frac{1}{5}\lg 0{,}00156 = \frac{1}{5}\cdot\bar{3}{,}1931 = \frac{1}{5}\left(\bar{5} + 2{,}1931\right) = \bar{1}{,}4386;$$

$$\lg\sqrt[3]{0{,}07} = \bar{1}{,}6150;\quad \lg\sqrt[5]{0{,}00156} = \bar{1}{,}4386.$$

Пример 1. Найти числовое значение выражения

$$x = \frac{4a^3bc^2}{\sqrt[4]{7d}}$$

при $a = 0{,}271$; $b = 6{,}15$; $c = 44{,}82$; $d = 0{,}059$.

Вычисления выполняем в следующем порядке:

1) Делим страницу, предназначенную для вычислений, на два равных столбца.

2) Устно логарифмируем данное выражение и слагаемые записываем в виде столбца слева:

$$\begin{array}{l}
\lg 4 = \\
3\lg a = \\
\lg b = \\
2\lg c = \\
\frac{1}{4}(-\lg 7d) =
\end{array}$$

3) Затем, пользуясь таблицами и выполняя черновые вычисления в виде столбца справа, заполняем левый столбец, так что запись вычислений окончательно приобретает следующий вид:

$$\begin{array}{rl@{\qquad}r}
\lg 4 & = 0,6021 & \\
3\lg a & = \overline{2},2990 & \lg a = \overline{1},4330 \\
\lg b & = 0,7889 & \\
2\lg c & = 3,3030 & \lg c = 1,6515 \\
\frac{1}{4}(-\lg 7d) & = 0,0960 & 7d = 0,413;\ \lg 7d = \overline{1},6160; \\
 & & -\lg 7d = 0,3840 \\
\hline
\lg x & = 3,0890; & \\
x & = 1227. &
\end{array}$$

Пример 2. Найти числовое значение выражения

$$x = \frac{ab\sqrt[3]{\pi}}{cd\sqrt{2}}$$

при $a = 0,0028$; $b = 6,969$; $c = 0,001465$; $d = 0,04$.

Применяя указанную выше схему, последовательно находим:

$$\begin{array}{rl@{\qquad}r}
\lg a & = \overline{3},4472 & \\
\lg b & = 0,8432 & \\
\frac{1}{3}\lg \pi & = 0,1657 & \lg \pi = 0,4972 \\
-\lg c & = 2,8342 & \lg c = \overline{3},1658 \\
-\lg d & = 1,3979 & \lg d = \overline{2},6021 \\
-\frac{1}{2}\lg 2 & = \overline{1},8495 & \lg 2 = 0,3010 \\
\hline
\lg x & = 2,5377; & \\
x & = 344,9. &
\end{array}$$

4. Устройство и употребление пятизначных таблиц логарифмов. Пятизначные таблицы логарифмов устроены на основании тех же принципов, что и четырехзначные. Вместе с тем они отличаются следующими особенностями:

1°. Пятизначные таблицы логарифмов содержат мантиссы логарифмов данных чисел (от 1 до 999999), с помощью которых можно решать обе задачи — прямую и обратную. Поэтому отдельных таблиц антилогарифмов, соответствующих пятизначным мантиссам, пятизначные таблицы не содержат.

2°. Из соображений экономии места и удобства пользования таблицей в столбцы мантисс включены только 3 последних знака их, а два первых знака мантисс, одинаковых для определенной группы мантисс, вынесены вперед и помещены перед первым столбцом мантисс.

3°. Поправки на пятую цифру данного числа даны не в виде таблицы готовых поправок, как в четырехзначных таблицах, а в виде расчетных табличек, которые указывают 1, 2,...,8, 9 десятых долей каждой разности d двух смежных табличных мантисс, называемой табличной разностью; отсюда эти таблички получили свое название — partes proportionales (сокращенно: P. P.), т. е. пропорциональные части.

Например, если $d = 7$, то табличка P. P, имеет следующий вид:

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

Пример 1. Найти $\lg 35{,}764$.

Сначала находим, что $\lg 3576 = 3{,}55340$. Затем устно вычисляем табличную разность d между найденной мантиссой и следующей: $d = 352-340 = 12$. В табличке P. P. для 12 отыскиваем поправку Δ на пятую цифру 4 данного числа: $\Delta = 4{,}8$. Округляем эту поправку до 5 и прибавляем ее к найденному логарифму:

$$\lg 3576{,}4 = 3{,}55345$$

Следовательно,

$$\lg 35{,}764 = 1{,}55345.$$

Пример 2. Найти число x, зная, что $\lg x = \bar{2},45927$.

По таблицам находим ближайшую меньшую мантиссу 45 924. Ей соответствует число 2879. Табличная разность $d = 15$ (939 —924): разность Δ между данной мантиссой и ближайшей меньшей равна 3 (927 — 924). Обращаясь к табличке P. P., находим в правом столбце поправку 3,0; ей соответствует в левом столбце число 2; это значит, что найденное число должно быть увеличено на 2 десятых единицы последнего разряда. Поэтому данной мантиссе соответствует число 28 792. Учитывая теперь характеристику данного логарифма, окончательно заключаем, что $x = 0{,}028792$.

Пример 3. Найти $\lg 0{,}6764$.

На пересечении строки для числа 676 и столбца для четвертой цифры 4 находится число 020, сопровождаемое впереди звездочкой (*020). Это значит, что две первые цифры мантиссы надо взять не из строки для числа 676, а из следующей строки, т. е. что эти цифры составляют не число 82, а число 83. Поэтому

$$\lg 0{,}6764 = \bar{1}{,}83020.$$

Примечание. Смысл этой звездочки надо учитывать и при обратной операции. Так, мантисса логарифма $\bar{1}{,}83020$ составится из числа 83 и числа 020, находящегося не в той строке, в которой помещено число 83, а в предыдущей строке, где число 020 обозначено звездочкой (*020).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти посредством логарифмирования степени:

$$1{,}4326^3;\ 0{,}98654^5;\ 0{,}0038^4.$$

2. Найти посредством логарифмирования корни:

$$\sqrt[5]{0{,}2};\quad \sqrt[3]{0{,}07776};\quad \sqrt[4]{\frac{5}{16}}.$$

3. Найти числовое значение выражения:

$$x = \sqrt[5]{\frac{0{,}5142}{375}}.$$

Ответ. $x = 0{,}26756$.

4. Вычислить длину ребра куба, объем которого равен:

1) $0{,}47893\ м^3$; 2) $0{,}054327\ м^3$.

Ответ. 1) 0,78238 *м*; 2) 0,37874 *м*.

5. Вычислить длину l секундного маятника, принимая $g = 9{,}8088$ (для Парижа).

Указание. Воспользоваться формулой: $l = \frac{g}{\pi^2}$,

Ответ. $l = 0{,}99382$.

6. Вычислить время t, в течение которого тело, падающее в пустоте, без начальной скорости, с высоты $l = 4810$ *м*, достигнет земли.

Указание. Воспользоваться формулой: $t = \sqrt{\frac{2l}{g}}$.

Ответ. $t = 31{,}32$ сек.

7. Вычислить радиус R медного шара, вес P которого равен 3,785 *кг*, зная, что плотность меди $\delta = 8{,}427$.

Указание. Воспользоваться формулой:

$$R = \sqrt[3]{\frac{3P}{4\pi\delta}}.$$

Ответ. $R = 0{,}475$ *дм*.

5. **Интерполирование.** При пользовании таблицами квадратов чисел и квадратных корней из чисел мы применяли интерполирование, т. е. вычисление квадратов и квадратных корней тех чисел, которые заключены между числами, помещенными в таблицах.

При пользовании теми четырехзначными таблицами логарифмов, в которых поправки на 4-ю цифру данного числа не приводятся, а также — пятизначными таблицами логарифмов приходится применять интерполирование.

Как было выяснено (гл. I, § 2, п. 5), сущность интерполирования состоит в том, что данную функцию $y = f(x)$ на протяжении некоторого достаточно малого промежутка (a, b) рассматривают как линейную функцию и пользуются основным свойством этой функции, состоящим в том, что ее приращения пропорциональны вызвавшим их приращениям независимой переменной.

На каком основании можно применить этот прием к логарифмической функции?

1) Логарифмическая функция растет очень медленно, и ее график на небольшом промежутке почти сливается с прямой.

2) Это подтверждается наблюдением за изменением табличных значений логарифмической функции: если $x > 100$, то равным приращениям Δx независимой переменной x соответствуют весьма близкие к равным приращения Δy функции $\lg x$. Например, если x принимает значения 301, 302, 303,...,309, 310, то $\Delta x = 1$, а Δy = 14, 14, 15, 14, 14, 14, 15, 14, 14 десятитысячных; если же x принимает значения 301,1; 301,2; 301,3; ...; 301,9, 302, то $\Delta x = 0{,}1$, а Δy = 1,4; 1,5; 1,4; 1,5; 1,4; 1,5; 1,4 1,4; 1,5 десятитысячных.

По этим причинам на промежутках, длина которых не превышает 1, функцию $y = \lg x$ можно рассматривать как линейную и ее приращения можно считать пропорциональными вызвавшим их приращениям независимой переменной.

Пользуясь этим, и выполняют интерполирование при решении прямой и обратной задачи.

I. Прямая задача.

Пример 1. Найти $\lg 567{,}8$.

По четырехзначным таблицам находим, что $\lg 567 = 2{,}7536$.

При увеличении числа 567 на 1 его логарифм увеличивается на 7 десятитысячных; но данное число 567,8 больше, чем число 567, на 0,8. Для того чтобы узнать, на сколько десятитысячных увеличится при этом логарифм числа 567, обозначаем это искомое число через Δ и составляем пропорцию:

$$\Delta : 7 = 0{,}8 : 1;$$

отсюда находим, что

$$\Delta = 7 \cdot 0{,}8 = 5{,}6 \text{ (десятитысячных).}$$

Следовательно,

$$\lg 567{,}8 = 2{,}7536 + 0{,}00056 = 2{,}75416;$$

ограничиваясь 4 десятичными знаками, окончательно получаем, что $\lg 567{,}8 = 2{,}7542$.

Пример 2. Найти $\lg 5678{,}9$.

По пятизначным таблицам находим, что

$$\lg 5678 = 3{,}75420.$$

При увеличении числа 5678 на 1 его логарифм увеличивается на 7 стотысячных; но данное число больше, чем число 5678, на 0,9. Составляем пропорцию:

$$\Delta : 7 = 0{,}9 : 1;$$

отсюда находим, что

$$\Delta = 7 \cdot 0{,}9 = 6{,}3 \text{ стотысячных.}$$

Следовательно,

$$\lg 5678{,}9 = 3{,}754263;$$

ограничиваясь 5 десятичными знаками, окончательно получаем, что

$$\lg 5678{,}9 = 3{,}75426.$$

Итак, если данное трехзначное или четырехзначное число N получает приращение 1, то его логарифм получает приращение d, равное так называемой табличной разности, т. е. разности между мантиссами логарифмов чисел $N+1$ и N; если же данное число N получает приращение $0{,}\alpha$, то его логарифм получает приращение Δ, вычисляемое из пропорции:

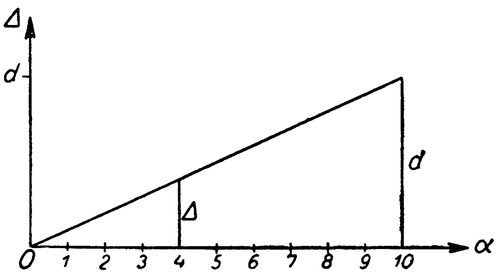
$$\Delta : d = 0{,}\alpha : 1;$$

поэтому

$$\Delta = d \cdot 0{,}\alpha. \tag{1}$$

По этой формуле и вычисляют приращение Δ логарифма числа N, соответствующее приращению $0{,}\alpha$ этого числа.

Геометрически эту формулу можно представить в следующем виде (черт. 111)·



Черт. 111

При пользовании «Четырехзначными математическими таблицами» В. М. Брадиса поправки на четвертую цифру вычислять не надо, так как в этих таблицах они указаны. Но при пользовании другими четырехзначными таблицами поправки на четвертую цифру приходится вычислять по формуле (1). Точно так же при пользовании пятизначными таблицами необходимо по той же формуле вычислять поправки на пятую цифру.

Пример 3. Найти lg 3,14159.

Для нахождения этого логарифма по четырехзначным таблицам предварительно округляем данное число до числа с 4 цифрами, т. е. заменяем его числом 3,142.

Логарифм этого числа имеет характеристику 0, а мантиссу — такую же, как и число 314,2. Найдем ее, для чего расположим вычисления следующим образом:

$$\begin{array}{lll}
\text{для} & 314 & 4969 \\
\text{для} & \quad 0{,}2 & \Delta=3 \\
\hline
\lg & 3{,}142= & 0{,}4972
\end{array}$$

Поправка 3, соответствующая четвертой цифре 2, дана в «Таблицах» Брадиса во втором столбце таблицы поправок. Но ее можно было вычислить по формуле (1):

$$d = 14;\ \Delta = 14 \cdot 0{,}2 = 2{,}8;\ \text{округляем: } \Delta = 3.$$

Для нахождения логарифма числа 3,14159 по пятизначным таблицам предварительно округляем это число до числа с 5 цифрами, т. е. заменяем его числом 3,1416.

Логарифм этого числа имеет характеристику 0, а мантиссу — такую же, как и число 3141,6.

Найдем ее, располагая вычисления, как выше:

$$\begin{array}{llll}
\text{для} & 3141 & 49707 & d=14 \\
\text{для} & \quad 0{,}6 & \Delta=8 & \\
\hline
\lg & 3{,}1416= & 0{,}49715 &
\end{array}$$

Поправку 8 мы нашли по формуле (1), умножая табличную разность 14, выписанную справа, на приращение 0,6 числа и округляя полученное произведение 8,4 до 8.

Пример 4. Найти lg 0,0057968.

По пятизначным таблицам находим:

$$\begin{array}{llll}
\text{для} & 5796 & 76313 & d=7 \\
\text{для} & \quad 0{,}8 & \Delta=6 & \\
\hline
\lg & 0{,}0057968= & \bar{3}{,}76319 &
\end{array}$$

Поправку 6 находим по формуле (1):

$$\Delta = 7 \cdot 0{,}8 = 5{,}6;\ \text{округляем: } \Delta = 6.$$

При пользовании четырехзначными таблицами мы предварительно округлили бы данное число до числа 0,005797 и затем нашли бы:

$$\begin{array}{lll}
\text{для} & 579 & 7627 \\
\text{для} & \quad 0{,}7 & \Delta=5 \\
\hline
\lg & 0{,}005797= & \bar{3}{,}7632
\end{array}$$

Поправку 5 нашли бы из таблиц или путем вычисления:

$$d = 7;\ \Delta = 7 \cdot 0{,}7 = 4{,}9;\ \text{округляем: } \Delta = 5.$$

II. Обратная задача.

Пример 1. Найти число x, зная, что $\lg x = 2{,}3456$.

Пользуясь «Таблицами» В. М. Брадиса, находим в таблице антилогарифмов (таблица II) число, соответствующее мантиссе 345; оно оказывается равным 2213. Теперь находим поправку h на четвертый знак мантиссы, т. е. на число 6; она указана на пересечении той строки, в которой помещено число 2213, с 6-м столбцом таблицы поправок: $h = 3$. Следовательно, мантиссе 3456 соответствует число $2213 + 3 = 2216$. Учитывая же характеристику логарифма 2,3456, заключаем, что ему соответствует число 221,6. Итак, $x = 221{,}6$.

Если мы не будем пользоваться таблицей поправок, то найдем поправку на четвертую цифру 6 данной мантиссы путем следующих соображений: если мантисса 3450 получит приращение 10 десятитысячных, то число 2213 получит приращение 5 (2218—2213); если же мантисса 3450 получит приращение 6 десятитысячных (3456—3450), то число 2213 получит такое приращение h, которое удовлетворяет пропорции:

$$h : 5 = 6 : 10;$$

поэтому

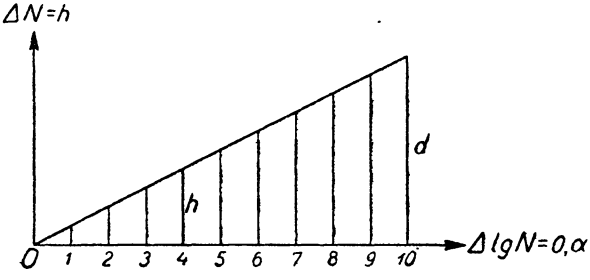
$$h = \frac{5 \cdot 6}{10} = 5 \cdot 0{,}6 = 3.$$

Обобщая этот пример, приходим к формуле:

$$h = d \cdot 0{,}\alpha, \tag{2}$$

где α — четвертый десятичный знак данной мантиссы, d — разность между двумя смежными табличными числами, соответствующими ближайшей меньшей и ближайшей большей мантиссе по отношению к данной, а h — искомая поправка на десятичный знак α.

Геометрически эту формулу можно представить в следующем виде (черт. 112):



Черт. 112

Пример 1 можно решить, не обращаясь к таблице антилогарифмов, а пользуясь таблицей мантисс логарифмов. Для этого мы находим в таблице мантисс логарифмов две мантиссы, между которыми заключается данная мантисса 3456, — именно ближайшую меньшую мантиссу 3444 и ближайшую бо́льшую мантиссу 3464, а также соответствующее мантиссе 3444 число 221 и проводим следующее рассуждение: приращению 20 ближайшей меньшей мантиссы соответствует приращение 1 числа 221; приращению же 12 (3456—3444) той же мантиссы соответствует такое приращение h числа 221, которое удовлетворяет пропорции:

$$h \cdot 1 = 12 : 20;$$

поэтому $h = \frac{12}{20} = 0{,}6$, т. е. h составляет 6 десятых единицы того разряда, которому принадлежит последняя цифра числа 221. Следовательно, искомое число x имеет изображение 2216. Учитывая характеристику 2 его логарифма 2,3456, получаем, что $x = 221{,}6$.

Вычисления располагаются так:

$$\begin{array}{rr|l}
 & \lg x = 2, & 3456 \\
\text{для } 3444 & & 221 \\
d = 20 & & \\
\Delta = 12 & h & = 0{,}6 \\
\hline
 & x = & 221{,}6
\end{array}$$

Пример 2. Найти число x, зная, что $\lg x = \overline{1}{,}45962$.

Пользуясь пятизначными таблицами логарифмов, находим две мантиссы, между которыми заключается данная, и выписываем меньшую из них 45954. Этой мантиссе соответствует число 2881. Разность d между ближайшей большей мантиссой и ближайшей меньшей мантиссой равна 15, а разность между данной мантиссой и ближайшей меньшей мантиссой равна 8. Следовательно, искомое приращение h числа 2881 найдется из пропорции:

$$h : 1 = 8 : 15;$$

поэтому $h = \frac{8}{15} \approx 0{,}5$. Искомое число x имеет изображение 28815. Учитывая характеристику $\overline{1}$ его логарифма, получаем, что $x = 0{,}28815$.

Вычисления располагаются так:

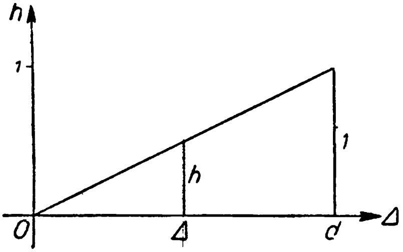
$$\begin{array}{lll}
 & \lg x = \overline{1}{,}45962 & \\
\text{для } 45954 & & 2881 \\
d = \quad 15 & & \\
\Delta = \quad 8 & & h = 0{,}5 \\
\hline
 & & x = 0{,}28815
\end{array}$$

Приведенные два примера нахождения числа по данному логарифму его с помощью таблицы мантисс позволяют вывести следующую формулу, по которой можно вычислять четвертую (по 4-значным таблицам) или пятую (по 5-значным таблицам) цифру искомого числа:

$$(3) \qquad h = \frac{\Delta}{d},$$

где d — разность между ближайшей большей и ближайшей меньшей мантиссой, Δ — разность между данной мантиссой и ближайшей меньшей мантиссой и h — искомое приращение числа, найденного по таблице.

Геометрически эту формулу можно представить в следующем виде (черт. 113):



Черт. 113

Пример 3. Найти число x, зная, что $\lg x = \bar{2},81769$.
Вычисления:

$$\begin{array}{ll}
\text{для } 81763 & 6571 \\
d = 7 & \\
\Delta = 6 & h = 0{,}9 \\
\hline
 & x = 0{,}065719
\end{array}$$

Пример 4. Найти число x, зная, что $\lg x = 0{,}82095$.
Вычисления:

$$\begin{array}{ll}
\text{для } 82092 & 6621 \\
d = 7 & \\
\Delta = 3 & h = 0{,}4 \\
\hline
 & x = 6{,}6214
\end{array}$$

Пример 5. Найти радиус шара, объем которого равен 1543 *дм*^{3}.

Решение. Если длина радиуса этого шара равна x *дм*, то

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = 1543,$$

откуда

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1543}{4\pi}}.$$

Выполняем логарифмирование:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcll}
\lg 3 &=& 0{,}47712 & & & & \\
\lg 1543 &=& 3{,}18837 & & & & \\
-\lg 4 &=& \bar{1}{,}39794 & \lg 4 &=& 0{,}60206 & \\
-\lg \pi &=& \bar{1}{,}50285 & \lg \pi &=& 0{,}49715 & \text{(дается в таблицах)} \\
\cline{1-3}
\frac{1}{3}\lg x &=& 2{,}56628 & & & & \\
\lg x &=& 0{,}85543 & \text{для } 85540 & & & 7168 \\
 & & & d &=& 6 & \\
 & & & \Delta &=& 3 & h = 0{,}5 \\
\hline
x &=& 7{,}1685 & & & & x = 7{,}1685
\end{array}$$

Примечание. В примерах 3—5 поправка h может быть взята из таблиц Р. Р. или найдена по формуле (3).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти посредством логарифмирования числовые значения выражений

$$\frac{ab^2}{c^3}, \quad \sqrt[3]{(a+b)c^2}, \quad \sqrt[5]{ab^3(b+c)}$$

при $a = 1235{,}6$; $b = 4647{,}1$; $c = 2081{,}7$.

2. Найти сторону квадрата, равновеликого кольцу, образованному двумя концентрическими окружностями, имеющими радиусы

$$R = 1{,}345\,\text{м и } r = 0{,}3458\,\text{м}.$$

3. Найти значения переменной $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при n, равном 10, 50, 100, 1000.

4. Проверить посредством логарифмирования, что уравнение

$$1{,}3^x = x$$

имеет приближенные корни: $x_1 = 1{,}484$ и $x_2 = 7{,}862$.

ГЛАВА X

ФУНКЦИИ И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ

Обзор изученных функций и их графиков

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИЯХ

1. **Понятие о функции.** В § 1 гл. IV было установлено понятие о функции и о способах задания функции. Понятию о функции было дано следующее определение.

Определение 1. Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторому множеству чисел, соответствует вполне определенное значение переменной y, то переменная x называется независимой переменной или аргументом, а переменная y — зависимой переменной или функцией переменной x.

Функция является заданной, если 1) указано множество тех значений независимой переменной, которые она может принимать или которые рассматриваются, и 2) указан закон соответствия, т. е. правило, позволяющее по каждому рассматриваемому значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции y.

2. **Общее обозначение функциональной зависимости.** Для того чтобы задать переменную y как функцию переменной x, употребляется, как известно, три способа — табличный, графический и аналитический (гл. IV, § 1, п. 2). Аналитический способ состоит в том, что задают формулу (равенство), указывающую, какую систему операций надо выполнить над данным значением независимой переменной (аргумента), чтобы найти соответствующее значение зависимой переменной (функции).

Этими операциями служат как известные действия (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с любым показателем), обозначаемые соответствующими знаками действий, так и операции, обозначаемые специальными знаками:

$$\log, \sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}.$$

Но во всех тех случаях, когда ведутся общие математические рассуждения, относящиеся к любой системе операций, с помощью которой задана функция, эту систему операций обозначают какой-либо одной буквой — чаще всего буквами f, F, φ, Φ, напоминающими первую букву слова «функция», но и другими буквами — g, G, ψ, Ψ и т. п.

Таким образом, запись

$$y = f(x)$$

обозначает, что переменная y есть функция переменной x и что для нахождения значения функции y по заданному значению аргумента x надо над этим значением аргумента x выполнить некоторую определенную систему операций f.

Если желают указать, что рассматриваются неодинаковые функции, т. е. функции, заданные неодинаковыми (в каких-либо отношениях) системами операций, то употребляют для этих функций неодинаковые обозначения: f, F, φ; g, G, ψ; f_1, f_2, f_3 и т. п.

Равенства $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = f_1(x)$ читаются так: «игрек равно эф от икс», «игрек равно фи от икс», «игрек равно эф первому от икс».

Если проводимое рассуждение относится к любой функции или к любой функции некоторого класса, с помощью какой бы системы операций она ни задавалась, то буква f одновременно обозначает каждую из возможных (в условиях данного рассуждения) систем операций и ни в какой конкретизации не нуждается.

Если же речь идет о функции, заданной определенной системой операций, то, обозначая правую часть равенства, определяющего эту функцию, например, через $f(x)$, понимают под буквой f обозначение именно той системы операций, с помощью которой функция $f(x)$ задается. Так, если пишут

$$f(x) = \frac{x + \lg(1+x)}{2^x - 1},$$

то под буквой f понимают обозначение именно тех операций, посредством которых может быть найдено каждое значение аналитического выражения, составляющего правую часть написанного равенства.

Для обозначения того факта, что функция

$$F(x) = \frac{2x-1}{3x^2-1}$$

при значениях 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ переменной x получает соответственно значения $\frac{1}{2}$, 0, $2(\sqrt{2}-1)$, пишут:

$$F(1) = \frac{1}{2}, F\left(\frac{1}{2}\right) = 0, F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Вообще, если задана некоторая функция $F(x)$, то значение, которое эта функция принимает при $x=a$, обозначают через $F(a)$.

УПРАЖНЕНИЯ[*]

1. $f(x)=\dfrac{x-3}{2+x}$. Найти: $f(0)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(-3)$; $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$; $f(\sqrt{3})$, $f(2a)$.

Ответы. $-\dfrac{3}{2}$; $-\dfrac{2}{3}$; 0; 6; $-\dfrac{7}{3}$; $5\sqrt{3}-9$; $\dfrac{2a-3}{2+2a}$.

2. $\varphi(t) = t^3 - 1$. Найти: $\varphi(1)$; $\varphi(a)$; $\varphi(a+1)$; $\varphi(a-1)$.

Ответы. 0; a^3-1; a^3+3a^2+3a; a^3-3a^2+3a-2.

3. $F(z) = 3^{1-z}$. Найти: $F(0)$; $F(1)$; $F(2)$; $F(-1)$; $F(2{,}5)$.

Ответы. 3; 1; $\dfrac{1}{3}$; 9; $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

4. $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Решить уравнения:

1) $f(x) = f(0)$; 2) $f(x) = f(-1)$.

Ответы. 1) 0; 2; 2) -1; 3.

5. $\psi(z) = z^5 - 9z$. Доказать, что $\psi(-z) = -\psi(z)$.

Решение. $\psi(-z) = (-z)^5 - 9(-z) = -z^5+9z = -(z^5-9z) = -\psi(z)$.

6. $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Найти: $\varphi(2x)$; $2\varphi(x)$; $\varphi(x^2)$; $[\varphi(x)]^2$.

Ответы. $\dfrac{2x+1}{2x-1}$; $\dfrac{2x+2}{x-1}$; $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$.

7. $\psi(x) = 2\sin 2x + \cos x$. Найти: $\psi(0)$; $\psi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$; $\psi(1)$; $\psi(2)$.

Ответы. 1; $2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $2\sin 2 + \cos 1$; $2\sin 4 + \cos 2$.

8. $g(x) = \arccos(2x-1)$. Найти $g(0)$; $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Ответы. π; $\dfrac{\pi}{2}$.

9. $G(x) = x^5 - x^3 + 5x$. Доказать, что $G(-x) = -G(x)$.

10. $\varphi(x) = x^2 - 2\cos x$. Доказать, что $\varphi(-a) = \varphi(a)$.

11. $\psi(x)=2\sin\dfrac{x}{2} - 3\cos 2x$. Доказать, что $\psi(x+4\pi) = \psi(x)$.

12. $\Phi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Доказать, что $\Phi(-x) = \Phi(x)$.

Решение. $\Phi(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}=\Phi(x)$.

3. Область определения функции.

Определение 2. Множество всех значений аргумента, для которых задается функция, называется областью ее определения. Если M есть это множество, то говорят, что функция определена на множестве M.

---

[*] При составлении «Упражнений» для главы X использован «Сборник задач по математическому анализу» Н. А. Давыдова, П. П. Коровкина, В. Н. Никольского.

Если функция $y=f(x)$ задана аналитически (и область ее определения не указана), то под областью ее определения обычно понимается множество тех действительных значений аргумента x, при которых аналитическое выражение $f(x)$, определяющее функцию, не теряет числового смысла и принимает лишь действительные значения. Ввиду этого область определения функции, заданной аналитически, называют также ее областью существования.

Примеры.

1. Для функции:	областью определения служат все значения аргумента x, удовлетворяющие неравенствам:
1) $y=\frac{2x-1}{x^2-3x+2}$;	$x<1,\ 1<x<2,\ x>2$;
2) $y=\sqrt{6-2x}$;	$6-2x\geqslant 0$, т. е. $x\leqslant 3$;
3) $y=4-\lg x$;	$x>0$;
4) $y=\arcsin x$;	$-1\leqslant x\leqslant 1$;
5) $y=\arccos(2+x)$;	$-1\leqslant 2+x\leqslant 1$, т. е. $-3\leqslant x\leqslant -1$;
6) $y=\sin\lg\frac{1}{2x-1}$;	$2x-1>0$, т. е. $x>\frac{1}{2}$;
7) $y=\frac{\lvert x\rvert}{x}$;	$x\neq 0$, т. е. $x<0$ и $x>0$.

2. Для функции

$$y=\sqrt{3-x}+\arccos\frac{x-2}{3}$$

областью определения служат все значения аргумента x, удовлетворяющие системе неравенств:

$$3-x\geqslant 0,\quad -1\leqslant\frac{x-2}{3}\leqslant 1,$$

т. е. неравенствам $-1\leqslant x\leqslant 3$.

3. Функция $y=\operatorname{tg} x$ определена для всех значений аргумента x, удовлетворяющих неравенствам:

$$(2n-1)\frac{\pi}{2}<x<(2n+1)\frac{\pi}{2},$$

где n—целое число.

4. Функция $y=E(x)$, где $E(x)$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее числа x (целая часть числа x), определена для всех действительных значений аргумента x.

5. Функция $y=\arcsin(2+3^x)$ не определена ни для одного действительного значения аргумента x, так как неравенства

$$-1\leqslant 2+3^x\leqslant 1$$

не имеют решения.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти области определения следующих функций:

1) $y = x^3 - 3x+2$; 2) $y = \frac{x}{x-1}$; 3) $y = \frac{1}{x^2+2x-3}$; 4) $y = \sqrt{4-x^2}$; 5) $y = \log(3x-4)$; 6) $y = \arcsin(2x-5)$; 7) $y = \arcsin(\sin x)$; 8) $y = \log(x-3) + \sqrt{16-x^2}$; 9) $y = x - |x|$; 10) $y = \sqrt{|x|-x}$.

Ответы.

1) $-\infty < x < +\infty$; 2) $x<1$ и $x>1$; 3) $x<-3$, $-3<x<1$, $x>1$; 4) $-2 \leqslant x \leqslant 2$; 5) $x > \frac{4}{3}$; 6) $2 \leqslant x \leqslant 3$; 7) $-\infty < x < +\infty$; 8) $3 < x \leqslant 4$; 9) $-\infty < x < +\infty$; 10) $-\infty < x < +\infty$.

2. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$ и 2) $g(x) = \sqrt{x(x-1)}$.

Ответ. 1) $x \geqslant 1$; 2) $x<0$ и $x>1$.

3. Найти области определения функций:

1) $f(x) = \log(x-1) + \log(x-2)$ и 2) $g(x) = \log(x-1)(x-2)$.

Ответ. 1) $x>2$; 2) $x<1$ и $x>2$.

4. По двум данным сторонам a и b треугольника и заключенному между ними переменному углу φ площадь его S находится по формуле

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\varphi.$$

Найти область определения функции S.

Ответ. $0<\varphi<\pi$.

4. Четные и нечетные функции.

1°. При рассмотрении функции $y=x^2$ и ее графика (гл. IV, § 6, п. 2) мы обратили внимание на ту ее особенность, что при каждых двух значениях x_0 и $-x_0$ независимой переменной x, отличающихся только знаком, эта функция принимает одно и то же значение x_0^2.

Очевидно, что этой особенностью обладают также функции

$$y=x^4;\ y=\sqrt[3]{x^2};\ y=\cos x;\ y=|x|.$$

Ввиду того что все эти функции ведут себя в отношении указанного свойства так, как четные степени независимой переменной, они называются четными функциями.

Определение 1. Функция, обладающая тем свойством, что при значениях аргумента, отличающихся только знаком, она принимает равные значения, называется четной функцией.

Из этого определения следует, что для того, чтобы данная функция $f(x)$ была четной, необходимо и достаточно, чтобы во всей области ее определения выполнялось тождество

$$f(-x)=f(x).$$

В противоположность четным функциям функции

$$y=x,\quad y=x^3,\quad y=\sqrt[3]{x},\quad y=\sin x$$

при каждых двух значениях x_0 и $-x_0$ аргумента x, отличающихся только знаком, принимают значения, также отличающиеся только знаком, т. е. ведут себя в этом отношении так, как нечетные степени независимой переменной. Поэтому эти функции называются нечетными функциями.

Определение 2. Функция, обладающая тем свойством, что при значениях аргумента, отличающихся только знаком, она принимает значения, также отличающиеся только знаком, называется нечетной функцией.

Из этого определения следует, что для того, чтобы данная функция $f(x)$ была нечетной, необходимо и достаточно, чтобы во всей области ее определения выполнялось тождество

$$f(-x) = -f(x).$$

Однако не надо думать, что каждая функция непременно является четной или нечетной. Имеется много функций, которые не могут быть отнесены ни к тому, ни к другому классу. Таковы, например, функции: $y=2x^3+3$; $y=2^x$; $y=\sin(x-1)$.

Пример 1. Функция $y=x^4-2x^2+1$ — четная, функция $y=x^3-2x$ — нечетная, а функция $y=x^3-2x+1$ — ни четная, ни нечетная.

Пример 2. Функция $y=\sqrt[3]{x^2}$ — четная, функция $y=\sqrt[3]{x}$ — нечетная, а функция $\sqrt{x}$ — ни четная, ни нечетная, так как она определена в области, содержащей числа только одного знака.

Пример 3. Функции $y=x\sin x$ и $y=x\sin\frac{1}{x}$ — четные, так как

$$(-x)\cdot\sin(-x)=x\cdot\sin x,\quad (-x)\cdot\sin\frac{1}{(-x)}=(-x)\cdot\sin\left(-\frac{1}{x}\right)=x\sin\frac{1}{x}.$$

Пример 4. Функция $y=\frac{1}{|x|}$ — четная, а функция $y=\frac{x}{|x|}$ — нечетная, так как $\frac{-x}{|-x|}=-\frac{x}{|x|}$.

Пример 5. Из функций

$$y=\log(1-x)+\log(1+x) \quad \text{и} \quad y=\log\frac{1+x}{1-x}$$

первая четная, а вторая нечетная, так как

$$\log(1+x)+\log(1-x)=\log(1-x)+\log(1+x);$$

$$\log\frac{1-x}{1+x}=\log(1-x)-\log(1+x)=-\log\frac{1+x}{1-x}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти четные и нечетные функции среди следующих функций:

1) $y=\frac{1}{1+x^2}$; 2) $y=\frac{x}{1+x^2}$; 3) $\frac{1}{x}$; 4) $y=2-|x|$; 5) $y=\frac{|\sin x|}{\sin x}$; 6) $y=\cos 2x$; 7) $y=x+\sin x$; 8) $y=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{-x+1}$; 9) 2^x+2^{-x}.

Ответы. Функции 1), 4), 6), 8), 9) — четные; функции 2), 3), 5), 7) — нечетные.

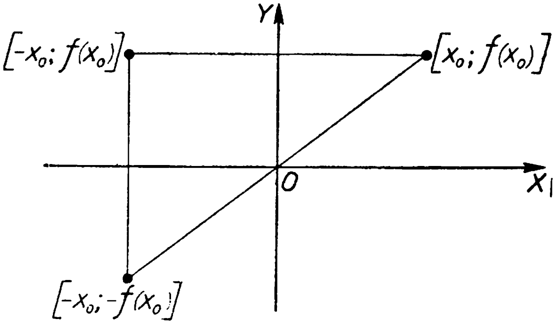
2. Доказать, что функция $y=\frac{(1+2^x)^2}{2^x}$ — четная.

2°. Если $f(x)$ есть четная функция, то в силу равенства $f(-x)=f(x)$ каждой точке $[x_0;\ f(x_0)]$ графика функции $f(x)$ соответствует точка $[-x_0;\ f(x_0)]$ этого графика, симметричная ей относительно оси OY. Ввиду этого график каждой четной функции представляет собой кривую, для которой ось OY служит осью симметрии, так что для построения графика четной функции достаточно построить ту его часть, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем дополнить эту часть графика другой его частью, представляющей собой геометрическое место точек, симметричных найденным точкам относительно оси OY, или, как говорят, «отражение» найденных точек относительно оси OY.

Мы уже пользовались этим свойством четных функций при построении графиков функций $y=x^2$, $y=\cos x$.

Если $f(x)$ есть нечетная функция, то в силу равенства $f(-x)=-f(x)$ каждой точке $[x_0;\ f(x_0)]$ графика функции $f(x)$ соответствует точка $[-x_0,\ -f(x_0)]$ этого графика, симметричная ей относительно начала координат O. Ввиду этого график каждой нечетной функции представляет собой кривую, для которой начало координат O служит центром симметрии, так что для построения графика нечетной функции достаточно построить ту его часть, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем дополнить эту часть графика другой его частью, представляющей собой геометрическое место точек, симметричных найденным точкам относительно начала координат O.

Впрочем, для построения точки $[-x_0;\ -f(x_0)]$, симметричной точке $[x_0,\ f(x_0)]$ относительно начала координат O, можно поступить иначе: сначала построить точку $[-x_0;\ f(x_0)]$, представляющую собой отражение точки $[x_0;\ f(x_0)]$ относительно оси OY, а затем точку $[-x_0;\ -f(x_0)]$, представляющую собой отражение точки $[-x_0;\ f(x_0)]$ относительно оси абсцисс (черт. 114).



Черт. 114

УПРАЖНЕНИЯ

Пользуясь четностью или нечетностью следующих функций, построить (по точкам) их графики:

1) $y = x^4$; 2) $y = \frac{1}{1+x^2}$; 3) $y = |x|$;

4) $y = x^3 - 2x$; 5) $y = \frac{1}{x^3}$; 6) $y = \frac{x}{1+x^2}$.

5. **Периодические функции.** В курсе тригонометрии было установлено, что функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ являются периодическими, т. е. обладающими тем свойством, что принимаемые ими значения повторяются всякий раз, когда независимая переменная x пробегает определенный для каждой функции промежуток, называемый периодом функции. Именно, для функций $\sin x$ и $\cos x$ этим периодом служит число 2π, а для функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$—число π.

Для доказательства того, что тригонометрические функции обладают этим свойством — периодичностью, устанавливают справедливость тождеств:

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x;$$
$$\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x,$$

откуда следуют тождества:

$$\sin(x+2n\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2n\pi) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(x+n\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x+n\pi) = \operatorname{ctg} x,$$

где n — любое целое число.

В курсах математического анализа приводятся примеры и других — не тригонометрических — функций, являющихся периодическими*. Мы эти другие функции рассматривать не будем, а ограничимся лишь тем, что дадим общее определение периодической функции.

Определение 3. Если существует отличное от нуля число l, обладающее тем свойством, что для каждого значения аргумента x функции $f(x)$ имеет место равенство

$$f(x+l) = f(x),$$

то функция $f(x)$ называется периодической, а число l — ее периодом.

Из этого определения следует, что если l есть период функции, то и числа $2l$, $3l, \ldots, nl, \ldots$, а также числа $-l, -2l, \ldots, -nl, \ldots$, где n — натуральное число, являются периодами этой функции. В самом деле, если число x_0 принадлежит области определения функции $f(x)$, имеющей период l, то и число x_0+l принадлежит этой области; но тогда и число $(x_0+l)+l$ принадлежит той же области, причем

---

* Например, функция $x - E(x)$, где $E(x)$ есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x, имеет период 1.

$$f[(x_0+l)+l]=f(x_0+l)=f(x_0),$$

так что

$$f(x_0+2l)=f(x_0).$$

Последовательно переходя от точки x_0+2l к точкам x_0+3l, x_0+4l, ..., x_0+nl, ..., докажем, что

$$f(x_0+nl)=f(x_0).$$

Аналогично докажем, что

$$f(x_0-nl)=f(x_0).$$

Для тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ число 2π, а для функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ число π являются наименьшими положительными периодами.

Покажем на примерах, как можно найти периоды некоторых тригонометрических функций.

Пример 1. $f(x)=\sin ax$, где $a>0$. Найдем число h, при котором для всякого значения x аргумента имеет место равенство

$$\sin a(x+h)=\sin ax. \tag{1}$$

Для этого достаточно, чтобы разность

$$a(x+h)-ax$$

была равна $2k\pi$, где k — целое число. Это выполняется при условии $ah=2k\pi$, т. е. при

$$h=\frac{2k\pi}{a}.$$

Таким образом, всякое число вида $\frac{2k\pi}{a}$ удовлетворяет требованию (1). Наименьшим из положительных этих чисел является число $\frac{2\pi}{a}$.

Итак, функция $\sin 3x$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$, функция $\sin \frac{x}{5}$ — период $2\pi : \frac{1}{5}$, т.е. 10π, функция $\sin\frac{3}{5}x$ — период $2\pi : \frac{3}{5}=\frac{10\pi}{3}$; вообще функция $\sin ax$, где $a>0$, имеет период $\frac{2\pi}{a}$.

Пример 2. $f(x)=\sin(ax+b)$, где $a>0$. Найдем число h, при котором для всякого значения x аргумента имеет место равенство

$$\sin[a(x+h)+b]=\sin(ax+b). \tag{2}$$

Это выполняется при условии

$$[a(x+h)+b]-(ax+b)=2k\pi,$$

т. е. при

$$h=\frac{2k\pi}{a}.$$

Наименьшим из положительных периодов является число $\frac{2\pi}{a}$.

Таким образом, период функции $\sin(ax+b)$ зависит только от коэффициента a при аргументе x и равен числу $\frac{2\pi}{a}$.

Пример 3. $f(x)=\cos(ax+b)$, где $a>0$. Тем же путем установим, что эта функция имеет период $\frac{2\pi}{a}$.

Пример 4. $f(x)=\operatorname{tg}(ax+b)$, где $a>0$. Принимая во внимание, что функция $\operatorname{tg} x$ имеет период π, тем же путем найдем, что функция $\operatorname{tg}(ax+b)$, где $a>0$, имеет период $\frac{\pi}{a}$.

Пример 5. $f(x)=\sin^2 x$. Так как

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

а период функции $\cos 2x$ равен π (пример 3), то период функции $\sin^2 x$ равен π.

Пример 6. $f(x)=\cos^2 x$. Эта функция имеет период π.

Пример 7. $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$. Так как

$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x},$$

а период функции $\cos 2x$ равен π, то период функции $\operatorname{tg}^2 x$ равен π.

Пример 8. $f(x)=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$. Так как

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

то функция $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ имеет период 2π.

Пример 9. $f(x)=\cos\frac{3x}{2}+\sin\frac{x}{3}$. Первое слагаемое не изменяется при прибавлении к значению x аргумента числа вида $\left(2k\pi:\frac{3}{2}\right)$, т. е. вида $\frac{4k\pi}{3}$; второе слагаемое не изменяется при прибавлении к значению x аргумента числа вида $\left(2k'\pi:\frac{1}{3}\right)$, т. е. вида $6k'\pi$. Вся сумма останется без изменения при прибавлении к числу x числа h, имеющего одновременно вид $\frac{4k\pi}{3}$ и $6k'\pi$. Для нахождения этого числа достаточно подобрать такие целые числа k и k' которые удовлетворяют равенству

$$\frac{4k\pi}{3} = 6k'\pi,$$

т. е. равенству

$$2k = 9k';$$

так как наименьшее общее кратное чисел 2 и 9 есть 18, то очевидно, что последнее равенство выполняется при $k=9$, $k'=2$; поэтому

$$h = \frac{4 \cdot 9 \cdot \pi}{3} = 12\pi; \quad h = 6 \cdot 2 \cdot \pi = 12\pi,$$

т. е. искомый период рассматриваемой функции есть 12π.

Пример 10. $f(x) = \cos 2x - \operatorname{tg} x$. По способу, указанному в примере 9, последовательно получаем:

$$2k\pi : 2 = k'\pi; \ k = k' = 1; \ h = \pi.$$

Впрочем, этот результат непосредственно следует из того, что каждое из слагаемых имеет период π.

Пример 11. $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{4} - \sin 3x$. Последовательно получаем: $k\pi : \frac{1}{4} = 2k'\pi : 3$; $4k = \frac{2}{3}k'$; $6k = k'$; $k=1$, $k'=6$; следовательно, $h = 4\pi$.

Пример 12. $f(x) = \sin \frac{2x}{5} + \cos \frac{5x}{3} + \operatorname{tg} \frac{3x}{5}$.

Последовательно получаем:

$$2k\pi : \frac{2}{5} = 2k'\pi : \frac{5}{3} = k''\pi : \frac{3}{5}; \quad 5k = \frac{6k'}{5} = \frac{5k''}{3};$$

$$75k = 18k' = 25k''; \text{ н. о. к. } (75;\ 18;\ 25) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2;$$

$$k=6,\ k'=25,\ k''=18; \text{ следовательно, } h = 30\pi.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти периоды функций:

1) $y = \sin \pi x$; 2) $y = 1 + \cos \frac{\pi}{2} x$; 3) $y = \sin(x+1)$;
4) $y = \cos(x-2)$; 5) $y = \arcsin(\sin x)$; 6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

Ответы. 2; 4; 2π; 2π; 2π; π.

2. Доказать, что функция $y = \sin x^2$ — непериодическая.

6. Возрастающие и убывающие (монотонные) функции.

1°. Как было установлено в главе II (§1, п. 3), степень x^r положительного основания x с положительным рациональным показателем r обладает тем свойством, что с возрастанием основания x этой степени возрастает и степень; это значит, что если x_1 и x_2 — два любых положительных значения основания x, удовлетворяющие неравенству $x_1 < x_2$, то непременно имеет место также неравенство $x_1^r < x_2^r$, где r — положительное рациональное число.

Так как основание x, по условию, изменяется в промежутке $(0...+\infty)$, то указанное свойство степени x^r выражают еще так: функция $y=x^r$, где r — положительное рациональное число, в промежутке $(0...+\infty)$ возрастает.

Но при сделанных предположениях относительно основания x и показателя r из неравенства $x_1^r<x_2^r$ следует неравенство $\frac{1}{x_1^r}>\frac{1}{x_2^r}$, которое может быть записано в виде $x_1^{-r}>x_2^{-r}$. Поэтому можно сказать, что с возрастанием положительного основания x степени x^{-r} с отрицательным рациональным показателем эта степень убывает; иначе говоря, функция $y=x^{-r}$, где r — положительное рациональное число, в промежутке $(0...+\infty)$ убывает.

На основании приведенных двух свойств, которыми обладают функции

$$y=x^r \quad \text{и} \quad y=x^{-r},$$

где r — положительное рациональное число, имеет место следующие предложения:

1) Функция $y=x^m$, где m — целое положительное число, в промежутке $(0...+\infty)$ возрастает.

2) Функция $y=x^{-m}$, где m — целое положительное число, в промежутке $(0...+\infty)$ убывает.

3) Функция $y=x^{\frac{m}{n}}$, где m и n — целые положительные числа, в промежутке $(0...+\infty)$ возрастает.

4) Функция $y=x^{-\frac{m}{n}}$, где m и n —целые положительные числа, в промежутке $(0...+\infty)$ убывает.

2°. Посмотрим, какой характер имеет изменение этих функций в промежутке $(-\infty...0)$.

Для ответа на этот вопрос примем во внимание следующее.

Если m есть четное число или m — четное, а n — нечетное число, то функции вида 1) — 4) четные, а если m — нечетное число или m и n — нечетные числа, то функции вида 1) — 4) нечетные.

Если четная функция $y=f(x)$, определенная на всей числовой оси, в промежутке $(0...+\infty)$ возрастает, то в промежутке $(-\infty...0)$ она убывает. В самом деле, если неравенство $0<x_1<x_2$ влечет за собой неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, то при четности функции $f(x)$ следует, что неравенство $-x_2<-x_1<0$ влечет за собой неравенство $f(-x_1)<f(-x_2)$; следовательно, в промежутке $(-\infty...0)$ функция $f(x)$ убывает.

Точно так же докажем, что если четная функция $y=f(x)$ в промежутке $(0...+\infty)$ убывает, то в промежутке $(-\infty...0)$ она возрастает.

Если нечетная функция $y=f(x)$, определенная на всей числовой оси, в промежутке $(0...+\infty)$ возрастает, то в промежутке $(-\infty...0)$ она также возрастает. В самом деле, если неравенство $0<x_1<x_2$ влечет за собой неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, то при нечетности функции $f(x)$ следует, что неравенство $-x_2<-x_1<0$ влечет за собой неравенство $-f(-x_1) < -f(-x_2)$, т. е. неравенство $f(-x_2) < f(-x_1)$; следовательно, в промежутке $(-\infty ... 0)$ функция $f(x)$ также возрастает.

Точно так же докажем, что если нечетная функция $y = f(x)$ в промежутке $(0 ... +\infty)$ убывает, то и в промежутке $(-\infty ... 0)$ она убывает.

Применяя эти общие соображения к отдельным видам функций, приходим к следующим выводам:

1) Нечетная функция $y = x^{2k-1}$, где k — целое положительное число, возрастающая в промежутке $(0 ... +\infty)$, возрастает также в промежутке $(-\infty ... 0)$.

Следовательно, функции $y = x$ (биссектриса первого и третьего координатных углов), $y = x^3$ (кубическая парабола) возрастают на всей числовой оси.

2) Из п. 1 следует, что функция $y = \frac{1}{x^{2k-1}}$, где k — целое положительное число, во всей ее области определения, т. е. в промежутках $(-\infty ... 0)$ и $(0 ... +\infty)$, убывает. Таковы функции $y = \frac{1}{x}$ (гипербола первого порядка), $y = \frac{1}{x^3}$ (гипербола третьего порядка).

3) Четная функция $y = x^{2k}$, где k — целое положительное число, возрастающая в промежутке $(0 ... +\infty)$, в промежутке $(-\infty ... 0)$ убывает. Таковы функции $y = x^2$ (парабола второго порядка), $y = x^4$ (парабола четвертого порядка).

4) Из п. 3 следует, что функция $y = \frac{1}{x^{2k}}$, где k — целое положительное число, в промежутке $(-\infty ... 0)$ возрастает, а в промежутке $(0 ... \infty)$ убывает. Таковы функции $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^4}$.

5) Четная функция $y = x^{\frac{2k}{2l-1}}$, где k и l — целые положительные числа, возрастающая в промежутке $(0 ... +\infty)$, в промежутке $(-\infty ... 0)$ убывает. Таковы, например, функции $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^{\frac{4}{3}}$, $y = x^{\frac{2}{5}}$.

6) Из п. 5 следует, что функция $y = x^{-\frac{2k}{2l-1}}$, где k и l — целые положительные числа, в промежутке $(-\infty ... 0)$ возрастает, а в промежутке $(0 ... +\infty)$ убывает. Таковы, например, функции $y = x^{-\frac{2}{3}}$, $y = x^{-\frac{4}{3}}$, $y = x^{-\frac{2}{5}}$.

7) Нечетная функция $y = x^{\frac{2k-1}{2l-1}}$, где k и l — целые положительные числа, возрастающая в промежутке $(0 ... +\infty)$, в промежутке

$(-\infty\ldots0)$ также возрастает. Таковы, например, функции $y=x^{\frac{3}{5}}$, $y=x^{\frac{5}{3}}$.

8) Из п. 7 следует, что функция $y=x^{-\frac{2k-1}{2l-1}}$, где k и l — целые положительные числа, как в промежутке $(-\infty\ldots0)$, так и в промежутке $(0\ldots+\infty)$ убывает. Таковы, например, функции $y=x^{-\frac{3}{5}}$, $y=x^{-\frac{5}{3}}$.

Для того чтобы сразу сказать, какой характер изменения имеет функция $y=x^r$, где r — рациональное число, достаточно помнить, что в промежутке $(0\ldots+\infty)$ она при $r>0$ возрастает, а при $r<0$ убывает, а в промежутке $(-\infty\ldots0)$ в случае ее четности изменяет характер своего изменения на противоположный, а в случае ее нечетности имеет тот же характер.

Очевидно, что такой же характер изменения имеет функция $y=ax^r$, где r — рациональное число и $a>0$. Напротив, эта функция имеет противоположный характер изменения при $a<0$.

3°. Как известно, показательная функция $y=a^x (a>0,\ a\neq1)$ при $a>1$ возрастает и при $0<a<1$ убывает на всей числовой оси (гл. IX, § 2, п. 2), а логарифмическая функция $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$ при $a>1$ возрастает и при $0<a<1$ убывает в промежутке $(0\ldots+\infty)$ (гл. IX, § 4, п. 2).

4°. Функция $y=\operatorname{tg} x$ в каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi,\ -\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$, где n — целое число, возрастает, а функция $y=\operatorname{ctg} x$ в каждом из промежутков $(0+n\pi,\ \pi+n\pi)$, где n — целое число, убывает.

5°. Функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ бесконечное число раз переходят от возрастания к убыванию и, наоборот, от убывания к возрастанию.

Именно:

1) функция $\sin x$ возрастает в каждом промежутке вида

$$\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$$

и убывает в каждом промежутке вида

$$\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ \frac{3\pi}{2}+2n\pi\right),$$

где n — целое число;

2) функция $\cos x$ убывает в каждом промежутке вида $(0+2n\pi,\ \pi+2n\pi)$ и возрастает в каждом промежутке вида $(-\pi+2n\pi,\ 0+2n\pi)$, где n — целое число.

6°. Как мы увидим на примерах в дальнейшем, алгебраические функции переходят от возрастания к убыванию вообще конечное число раз.

§ 2. СВОЙСТВА ОТДЕЛЬНЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

1. Целая рациональная функция. Функции

$$y = ax + b,\ y = ax^2 + bx + c,\ y = x^3$$

представляют собой частные случаи функции

$$y = a_0x^m + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{m-2}x^2 + a_{m-1}x + a_m,$$

где m — целое положительное число. Эта функция называется целой рациональной функцией m-й степени.

Она определена для всех действительных значений независимой переменной x и обладает следующими общими свойствами:

1) Целая рациональная функция m-й степени имеет не больше, чем m, действительных корней, так что ее график может иметь с осью OX не больше, чем m, общих точек, в которых он пересекает эту ось или касается ее (в случае, если этой точке соответствуют равные корни).

Например, в зависимости от того, является ли дискриминант D целой рациональной функции ax^2+bx+c положительным числом, нулем или отрицательным числом, график этой функции имеет с осью OX 2 общие точки (пересекается с ней), 1 общую точку (касается ее в точке, соответствующей двойному корню) или 0 общих точек (не имеет общих точек).

График функции x^3 имеет с осью OX единственную общую точку (касается ее в точке, соответствующей тройному корню 0).

2) Очевидно, что целая рациональная функция может изменить знак только в том случае, если она проходит через нуль. Однако это условие, являясь необходимым, не является достаточным.

Позже мы выясним, что целая рациональная функция непременно меняет знак в том случае, если независимая переменная проходит через значение, которое служит корнем функции, имеющим нечетную кратность, т. е. если функция не имеет равных корней (все корни — первой кратности) или имеет нечетное число (3, 5,...) равных корней. Наоборот, если независимая переменная проходит через корни четной кратности, то функция не меняет знака.

Например, функции

$$y = 3x - 6,\ y = (x - 1)^3$$

при переходе переменной x соответственно через значения 2 и 1 меняют знак, а функция

$$y = (x + 1)^2$$

при переходе переменной x через значение — 1 не меняет знака.

Функция

$$y = x^2 - 5x + 6$$

при переходе переменной x через значения 2 и 3 меняет знак, а функция

$$y = (x + 1)(x - 2)^2$$

при переходе переменной x через значение — 1 меняет знак, а при переходе этой переменной через значение 2 не меняет знака.

2. Дробная рациональная функция. Функции

$$\frac{a}{x},\ \frac{a}{cx+d},\ \frac{ax+b}{cx+d},\ \frac{a}{x^2},\ \frac{ax+b}{cx^2+dx+e},\ \frac{a}{x^m}$$

представляют собой частные случаи функции

$$y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-2}\,x^2+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2\,x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}\,x^2+b_{n-1}\,x+b_n},$$

где m и n — целые положительные числа. Эта функция называется дробной рациональной функцией.

Она определена для всех действительных значений независимой переменной x, отличных от корней знаменателя, и обладает следующими общими свойствами:

1) Дробная рациональная функция обращается в нуль при каждом значении независимой переменной x, при котором числитель выражающей эту функцию дроби обращается в нуль, а знаменатель имеет значение, отличное от нуля. Точки, соответствующие значениям независимой переменной x, обращающим функцию y в нуль, являются общими точками графика функции и оси OX, в которых эти линии пересекаются или касаются. При этом касание, как и в случае целой рациональной функции, имеет место в тех точках, которым соответствуют равные корни.

Например, графики функций

$$y=\frac{x-1}{x+1};\quad y=\frac{x^2-5x+6}{x+2};\quad y=\frac{x^3-27}{x+3}$$

пересекают ось OX соответственно в точках:

$$x=1;\ x=2 \text{ и } x=3;\ x=3,$$

а графики функций

$$y=\frac{(x-1)^2}{x+1};\quad y=\frac{x^2}{x^2+1};\quad y=\frac{x^3}{x^2+1}$$

касаются оси OX соответственно в точках:

$$x=1;\ x=0;\ x=0.$$

2) Очевидно, что дробная рациональная функция может изменить знак в том случае, если она проходит через нуль. Однако это условие не является необходимым. Дробная рациональная функция может изменить знак и в том случае, если независимая переменная переходит от значений, расположенных влево от точки, в которой функция не определена, к значениям, расположенным вправо от этой точки.

Например, функция

$$y = \frac{x+1}{x-1},$$

знак которой, очевидно, совпадает со знаком функции

$$y = (x + 1)\,(x - 1),$$

меняет знак при переходе независимой переменной как через значение — 1, так и от значений, расположенных влево от точки 1, к значениям, расположенным вправо от нее.

Но функция

$$y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$$

меняет знак при переходе независимой переменной через значение — 1, но не меняет знака при переходе этой переменной от точек, расположенных влево от точки 1, к точкам, расположенным вправо от нее.

Нетрудно сообразить, что и здесь вопрос об изменении знака решается в зависимости от того, является ли точка, в которой функция не определена, корнем знаменателя, имеющим нечетную или четную кратность.

3. Степенная функция с рациональным показателем. Эта функция имеет вид $y = x^r$, где r — рациональное число.

1°. Если r есть целое положительное число m или целое отрицательное число $-m$, то степенная функция $y = x^r$ представляет собой соответственно целую рациональную функцию $y = x^n$ или дробную рациональную функцию $y = \frac{1}{x^m}$, общие свойства которых рассмотрены в пунктах 1 и 2.

2°. Если же r есть положительная или отрицательная несократимая дробь $\pm\frac{m}{n}$, то степенная функция $y = x^r$ представляет собой соответственно функцию вида $y = \sqrt[n]{x^m}$ или вида $y = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$.

Функция $y = \sqrt[n]{x^m}$ определена при нечетном n на всей числовой оси, а при четном n — только в промежутке $(0 \ldots +\infty)$, включающем в себя число 0. Область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ получается из области определения функции $y = \sqrt[n]{x^m}$ посредством исключения из нее точки $x = 0$.

Характер изменения этих функций в области определения каждой из них подробно рассмотрен в § 1, п. 6.

4. Трансцендентные функции.

1°. В главе IX были рассмотрены три трансцендентные функции:

1) Степенная функция $y = x^{\alpha}$ с иррациональным показателем α.

2) Показательная функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

3) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

2°. В курсе тригонометрии рассматриваются трансцендентные функции:

1) $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$;

2) $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arc\,tg} x$; $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

Термин «трансцендентная функция» имеет следующий смысл: функция $y = f(x)$ называется трансцендентной, если она не удовлетворяет никакому уравнению вида $P(x, y) = 0$, где $P(x, y)$ есть целая рациональная функция относительно переменных x и y.

Слово «трансцендентный» обозначает буквально «превосходящий» (подразумевается, по Эйлеру, превосходящий силу алгебраических методов, что соответствует в точности приведенному выше определению).

§ 3. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

1. Порядок исследования функций. Для того чтобы исследовать функцию и установить те ее свойства, на основании которых может быть построен ее график, целесообразно придерживаться следующего порядка:

1) Найти область определения функции.

2) Исследовать ее на четность и нечетность. При наличии четности или нечетности дальнейшее исследование функции и построение ее графика выполнять только для промежутка $(0 \ldots +\infty)$.

3) Исследовать функцию на периодичность. Если функция окажется периодической, то дальнейшее ее исследование и построение графика выполнять только в пределах одного периода.

4) Найти, если это возможно, корни функции, т. е. значения независимой переменной, при которых функция имеет значение 0 и, следовательно, ее график пересекает ось абсцисс.

5) В связи с п. 4) найти промежутки, внутри которых функция сохраняет определенный знак (см. дальше п. 2).

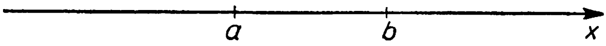
6) Найти область изменения функции и в связи с этим ее наибольшие и наименьшие значения, а также промежутки, в которых она возрастает или убывает (см. дальше п. 3).

7) Если функция в некоторой точке не определена, то установить, не обращается ли она в этой точке в бесконечность.

2. Нахождение промежутков, в которых функция сохраняет определенный знак. Если

$$F(x) = (x - a)(x - b),$$

где a, b — числа, расположенные в порядке их возрастания, то, нанеся эти числа на числовую ось (черт. 115):



Черт. 115

разобьем ее на 3 промежутка:

$$(-\infty,\ a),\quad (a,\ b),\quad (b,\ \infty).$$

Если $x < a < b$, то $x-a<0$, $x-b<0$, $(x-a)(x-b)>0$;
если $a<x<b$, то $x-a>0$, $x-b<0$, $(x-a)(x-b)<0$;
если $a<b<x$, то $(x-a)>0$, $(x-b)>0$, $(x-a)(x-b)>0$.

Это можно записать в виде таблицы:

Промежутки	$x-a$	$x-b$	$(x-a)(x-b)$	Примечание
$-\infty\ .\ .\ .\ a$	—	—	+	2 минуса
$a\ .\ .\ .\ b$	+	—	—	1 минус
$b\ .\ .\ .+\infty$	+	+	+	0 минусов

Итак, произведение $(x-a)(x-b)$ двух линейных двучленов имеет в трех указанных промежутках попеременно знаки +, —, +, начиная со знака +, так как в первом промежутке 2 сомножителя имеют отрицательные значения, во втором — 1 сомножитель, а в третьем — 0 сомножителей.

С помощью тех же соображений придем к выводу, что функция

$$F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

где a, b, c, d — числа, расположенные в порядке возрастания и делящие числовую ось на 5 промежутков: $(-\infty,\ a)$, $(a,\ b)$, $(b,\ c)$, $(c,\ d)$, $(d,\ +\infty)$, имеет в этих промежутках попеременно знаки +, —, +, —, +, начиная со знака +, как это можно заключить из следующей таблицы:

Промежутки	$x-a$	$x-b$	$x-c$	$x-d$	$F(x)$	Примечание
$-\infty\ .\ .\ .\ a$	—	—	—	—	+	4 минуса
$a\ .\ .\ .\ b$	+	—	—	—	—	3 минуса
$b\ .\ .\ .\ c$	+	+	—	—	+	2 минуса
$c\ .\ .\ .\ d$	+	+	+	—	—	1 минус
$d\ .\ .\ .\ \infty$	+	+	+	+	+	0 минус

Очевидно, что к тому же выводу мы придем при наличии любого четного числа сомножителей.

Если $F(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, где a, b, c — числа, расположенные в порядке возрастания и делящие числовую ось на 4 промежутка: $(-\infty, a)$, (a, b), (b, c), $(c, +\infty)$, то произведение $F(x)$ имеет в этих промежутках попеременно знаки —, +, —, +, начиная со знака —, так как в первом промежутке 3 сомножителя имеют отрицательные значения, во втором — 2 сомножителя, в третьем — 1 сомножитель и в четвертом — 0 сомножителей.

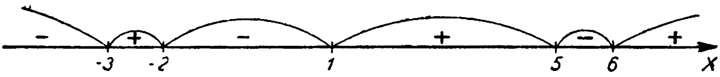
Очевидно, что к тому же выводу мы придем при наличии любого нечетного числа сомножителей.

Важно заметить, что в приведенных рассуждениях существенное значение имеет тот факт, что во всех сомножителях коэффициентами при переменной x служат положительные числа.

Пример 1. Если

$$F(x) = (x-1)(x+2)(x-5)(x+3)(x-6),$$

то, располагая корни сомножителей на числовой оси в возрастающем порядке и относя к каждому из образовавшихся 6 промежутков попеременно знаки + и —, начиная со знака — (ввиду наличия нечетного числа сомножителей), получим ответ на вопрос в виде графической схемы (черт. 116):



Черт. 116

Переводим эту схему на язык неравенств:

$$F(x) < 0 \text{ при } -\infty < x < -3,\ -2 < x < 1,\ 5 < x < 6;$$

$$F(x) > 0 \text{ при } -3 < x < -2,\ 1 < x < 5,\ 6 < x < +\infty.$$

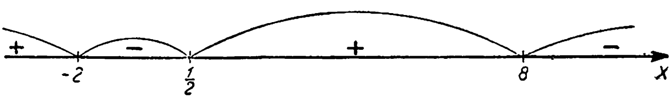
Пример 2. Если

$$F(x) = (x+2)(8-x)(2x-1),$$

то представляем данное равенство в виде

$$F(x) = -(x+2)(x-8)\,2\left(x-\frac{1}{2}\right).$$

Поэтому ответ получится в виде схемы (черт. 117):



Черт. 117

Знак —, стоящий перед произведением, заставляет чередовать знаки + и —, начиная не со знака — (ввиду наличия нечетного числа сомножителей), а со знака +. Ответ запишется с помощью неравенств:

$$F(x) < 0 \text{ при } -2 < x < \frac{1}{2},\ 8 < x < +\infty;$$

$$F(x) > 0 \text{ при } -\infty < x < -2, \frac{1}{2} < x < 8.$$

Пример 3. Если

$$F(x) = (3x-5)(1-2x)(4-x),$$

где в четном числе случаев коэффициентами при переменной x служат отрицательные числа, то представляем данное равенство в виде

$$F(x) = (3x-5)(2x-1)(x-4).$$

Пример 4. Если

$$F(x) = (x-a)^2 (x-b)^3 (x-c),$$

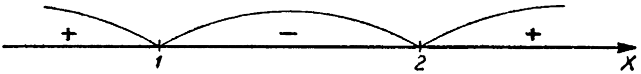
то очевидно, что степени $(x-a)^2$ и $(x-b)^2$ с четными показателями, как не влияющие на знак произведения, можно опустить, после чего знак функции $F(x)$ совпадет со знаком функции

$$G(x) = (x-b)(x-c).$$

Например, если

$$F(x) = (x-1)(x-2)^3 (x-3)^2,$$

то, опуская произведение $(x-2)^3$ $(x-3)^2$, знак функции $F(x)$ можно определить с помощью схемы (черт. 118):



Черт. 118

Из нее следует, что

$$F(x) > 0 \text{ при } -\infty < x < 1,\ 2 < x < +\infty;$$

$$F(x) < 0 \text{ при } 1 < x < 2.$$

При этом из промежутка $(2, +\infty)$ должно быть исключено не отмеченное на оси число 3, при котором функция $F(x)$ принимает не положительное, а нулевое значение.

Пример 5. Для определения знака функции

$$F(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)}$$

ее можно свести к функции

$$G(x) = (x-a)(x-b)(x-c),$$

так как знак отношения двух чисел совпадает со знаком их произведения.

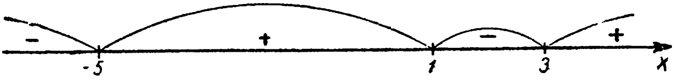
Например, если

$$F(x)=\frac{(2x-6)(x+5)}{(x-1)},$$

то, заменяя эту функцию функцией

$$G(x)=(2x-6)(x+5)(x-1),$$

определяем знак функции $G(x)$ с помощью схемы (черт. 119):



Черт. 119

Так как

$$G(x)<0 \text{ при } -\infty<x<-5,\ 1<x<3;$$
$$G(x)>0 \text{ при } -5<x<1,\ 3<x<+\infty,$$

то тот же знак будет иметь в указанных промежутках и функция $F(x)$.

Пример 6. Для определения знака функции

$$F(x)=(x^2+x+1)(x-5)$$

заменяем ее функцией

$$G(x)=x-5,$$

так как трехчлен x^2+x+1 имеет отрицательный дискриминант -3 и, следовательно, для всех значений переменной x сохраняет знак коэффициента при x^2, т. е. знак $+$.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти промежутки, в которых сохраняет определенный знак функция:

1) $(-3x+2)(x+1)(4x-5)$; 2) $(x-3)^2(5x+2)^3(-x+2)(-3x+1)$;

3) $\frac{x(x+2)}{x^2-1}$; 4) $\frac{-2x+3}{(3x+1)(x-4)}$; 5) $\frac{(4x^2-1)(x+2)^2}{x^3(x+1)(x-2)^5}$; 6) $\frac{3x+4}{x-2}-1$;

7) $\frac{-3x+1}{2x+1}+2$; 8) $\frac{2x-5}{-x+3}+1$; 9) $\frac{2}{x-1}-\frac{5}{2x-1}$; 10) $\frac{-4}{3x+1}-\frac{3}{2-x}$.

3. Нахождение области изменения функции. Функция y, заданная уравнением

(1) $$y=ax^2+bx+c,$$

определена для всех действительных значений переменной x. Попытаемся найти область изменения функции y, соответствующую области ее определения $(-\infty, +\infty)$. Для этого решим уравнение (1) по отношению к переменной x:

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a}. \tag{2}$$

Очевидно, что переменная x будет получать действительные значения при том и только при том условии, если будет выполняться соотношение

$$b^2 - 4ac + 4ay \geqslant 0,$$

которое при $a>0$ равносильно соотношению

$$y \geqslant \frac{4ac - b^2}{4a},$$

а при $a<0$ — соотношению

$$y \leqslant \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Следовательно, при $a>0$ областью изменения функции y служит промежуток

$$\left(\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right),$$

а при $a<0$ — промежуток

$$\left(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}\right),$$

так что при $a>0$ функция y имеет наименьшее значение $\frac{4ac - b^2}{4a}$, а при $a<0$ — наибольшее значение $\frac{4ac - b^2}{4a}$.

Из равенства (2) следует, что наименьшее или наибольшее значение функция y принимает при $x = -\frac{b}{2a}$.

Пример 1. Найти область изменения функции

$$y = -2x^2 + x + 3.$$

Решение. Решаем данное уравнение по отношению к переменной x:

$$x = \frac{1 \mp \sqrt{25 - 8y}}{4}. \tag{3}$$

Отсюда находим, что область изменения функции определяется соотношением

$$25 - 8y \geqslant 0,$$

т. е. что эта область представляет собой промежуток

$$\left(-\infty, \frac{25}{8}\right);$$

ввиду этого данная функция имеет наибольшее значение, равное $\frac{25}{8}$; из равенства (3) находим, что это значение она принимает при $x=\frac{1}{4}$.

Пример 2. Найти область изменения функции

$$y=\frac{x}{1+x^2}.$$

Решение. Решаем уравнение

$$yx^2-x+y=0$$

по отношению к переменной x:

$$x=\frac{1\mp\sqrt{1-4y^2}}{2y}. \tag{4}$$

Область изменения данной функции определяется соотношением

$$1-4y^2\geqslant 0.$$

Придав ему вид

$$(2y+1)(2y-1)\leqslant 0,$$

устанавливаем, что оно имеет место при

$$-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Из соотношений (5) следует, что данная функция y имеет наименьшее значение $-\frac{1}{2}$ и наибольшее значение $\frac{1}{2}$, между которыми заключаются все ее значения; из равенства (4) находим, что значение $-\frac{1}{2}$ функция y принимает при $x=-1$, а значение $\frac{1}{2}$ — при $x=1$.

Так как знаменатель $1+x^2$ при всех значениях переменной x имеет положительное значение, то знак функции y совпадает со знаком числителя x, так что

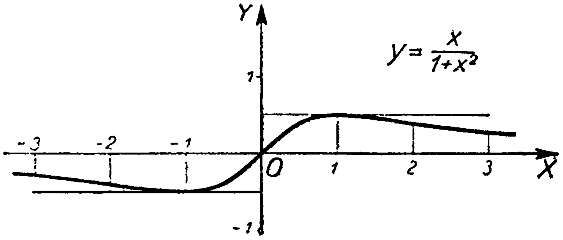
$$y\geqslant 0 \text{ при } x\geqslant 0 \text{ и } y\leqslant 0 \text{ при } x\leqslant 0.$$

Наконец, придавая функции y вид

$$y=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1},$$

находим, что $\lim\limits_{x\to\mp\infty} y=0$; ввиду этого график функции y как при $x\to-\infty$, так и при $x\to+\infty$ неограниченно приближается к оси OX.

Теперь мы располагаем всеми данными для построения графика (черт. 120):



Черт. 120

Пример 3. Найти область изменения функции

$$y=\frac{(x-3)(x+1)}{2x+3}=\frac{x^2-2x-3}{2x+3}.$$

Решение. Решаем уравнение

$$x^2-2(y+1)x-3y-3=0$$

по отношению к переменной x:

$$x_{1,2}=y+1\mp\sqrt{y^2+5y+4}\ . \tag{6}$$

Область изменения данной функции определяется соотношением

$$y^2+5y+4\geqslant 0.$$

Придав ему вид

$$(y+1)(y+4)\geqslant 0,$$

устанавливаем, что оно имеет место при

$$y\leqslant -4 \text{ и } y\geqslant -1. \tag{7}$$

Так как знаменатель $2x+3$ при $x=-\frac{3}{2}$ обращается в нуль, то график данной функции претерпевает в точке $-\frac{3}{2}$ разрыв и состоит из двух непрерывных частей, соответствующих промежуткам:

$$\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right),\ \left(-\frac{3}{2},\ +\infty\right).$$

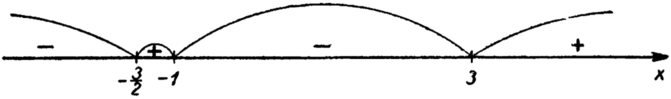
Как следует из равенства (6), значение -4 функция y принимает при $x=-3$, т. е. в промежутке $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$, а значение -1

при $x=0$, т. е. в промежутке $\left(-\frac{3}{2},\ +\infty\right)$. Поэтому данная функция имеет в промежутке $\left(-\infty,\ -\frac{3}{2}\right)$ наибольшее значение — 4, а в промежутке $\left(-\frac{3}{2},\ +\infty\right)$ —наименьшее значение — 1.

Для нахождения промежутков, в которых данная функция имеет определенный знак, рассматриваем произведение

$$(x-3)(x+1)(2x+3)$$

трех двучленов, наносим их корни на числовую ось и указываем знак, который имеет произведение в каждом промежутке:



Черт. 121

Из этой графической схемы (черт. 121) заключаем, что

$$y<0 \text{ при } x<-\frac{3}{2} \text{ и } -1<x<3,$$

$$y>0 \text{ при } -\frac{3}{2}<x<-1 \text{ и } x>3.$$

Представляя функцию y в виде

$$y=\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}},$$

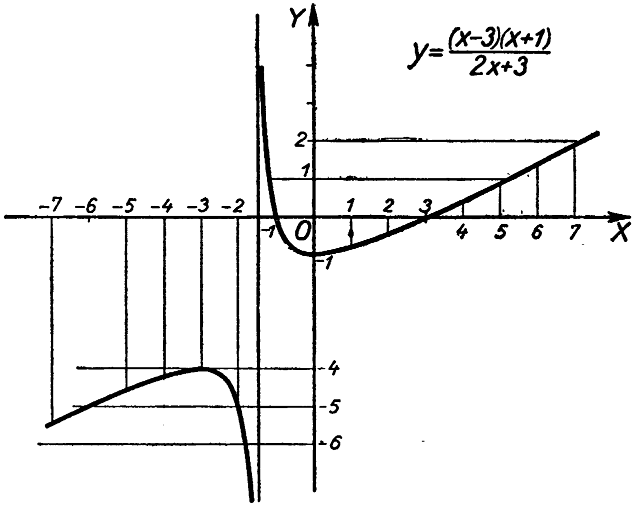
находим, что при $x\to\mp\infty$ функция $\frac{1}{y}$ есть бесконечно малая и что, следовательно, функция y стремится к бесконечности, а именно к $-\infty$ при $x\to-\infty$ $\left(\text{при } x<-\frac{3}{2}\right)$ и к $+\infty$ при $x\to+\infty$ (при $x>3$).

Наконец, принимая во внимание, что

$$\lim_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{2x+3}{x^2-2x-3}=0,$$

делаем вывод, что функция y при $x\to-\frac{3}{2}$ стремится к бесконечности, а именно к $-\infty$, если переменная x неограниченно приближается к числу $-\frac{3}{2}$ слева $\left(\text{при } x<-\frac{3}{2}\right)$, и к $+\infty$, если она приближается к этому числу справа $\left(\text{при } x>-\frac{8}{2}\right)$.

Установленные данные позволяют построить график (черт. 122).



Черт. 122

Пример 4. Найти область изменения функции

$$y=\frac{x^2-5}{2x-4}.$$

Решение. Решаем уравнение

$$x^2-2yx+4y-5=0$$

по отношению к переменной x:

$$x_{1,2}=y\mp\sqrt{y^2-4y+5}. \tag{8}$$

Область изменения данной функции определяется соотношением

$$y^2-4y+5\geqslant 0.$$

Но так как дискриминант этого трехчлена есть отрицательное число, а коэффициент при y^2 положительное число, то для всех действительных значений переменной y имеет место неравенство

$$y^2-4y+5>0,$$

так что каждое действительное число есть значение функции y, соответствующее двум действительным значениям переменной x, определяемым равенством (8). Следовательно, областью изменения функции служит промежуток $(-\infty, +\infty)$, причем она не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

1. $y = \dfrac{4x^2+1}{x^2-2x+1}$.

Ответ. y имеет наименьшее значение $\dfrac{4}{5}$ при $x = -\dfrac{1}{4}$.

2. $y = \dfrac{1-2x^2}{x^2+4x+4}$.

Ответ. y имеет наибольшее значение $\dfrac{2}{7}$ при $x = -\dfrac{1}{4}$.

3. $y = \dfrac{x^2+4}{x^2+2x+1}$.

Ответ. y имеет наименьшее значение $\dfrac{4}{5}$ при $x = 4$.

4. $y = \dfrac{x^2+21}{x-2}$.

Ответ. y имеет наименьшее значение 14 при $x = 7$ и наибольшее значение -6 при $x = -3$.

5. $y = \dfrac{x^2-10x+21}{2x-15}$.

Ответ. y имеет наименьшее значение 4 при $x = 9$ и наибольшее значение 1 при $x = 6$.

6. $y = \dfrac{x^2+4x-36}{2(x-5)}$.

Ответ. y имеет наибольшее значение 4 при $x = 2$ и наименьшее значение 10 при $x = 8$.

7. $y = \dfrac{2x-3}{x^2-2x+3}$.

Ответ. y имеет наибольшее значение $\dfrac{1}{2}$ при $x = 3$ и наименьшее значение -1 при $x = 0$.

8. $y = \dfrac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$.

Ответ. y имеет наибольшее значение 4 при $x = 1$ и наименьшее значение -5 при $x = -2$.

9. $y = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-1}$.

Ответ. y не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

§ 4. ПОНЯТИЕ О ПРЕДЕЛЕ ФУНКЦИИ

1. Определение понятия. В главе VII (§ 2, п. 3) было установлено следующее понятие о пределе непрерывно изменяющейся переменной:

Определение 1. Если число a обладает тем свойством, что к каждому как угодно малому положительному числу ε соответствует такое значение x_1 переменной x, начиная с которого значения переменной x становятся принадлежащими промежутку $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, то число a называется пределом переменной x.

Иначе говоря, число a называется пределом переменной x, если для каждого как угодно малого положительного числа ε можно так выбрать соответствующее ему значение x_1 переменной x, чтобы все значения, которые переменная x принимает вслед за значением x_1, удовлетворяли неравенству

$$|x-a|<\varepsilon.$$

Если переменная y есть функция от переменной x, определяемая равенством

$$y=f(x),$$

то при изменении переменной x изменяется и переменная y. Но переменная x может изменяться различным образом. В том случае, когда переменная x, изменяясь, стремится к некоторому пределу a, часто имеет место и такой случай, что и переменная y стремится к некоторому пределу b.

Принимая во внимание определение 1 предела непрерывно изменяющейся переменной, мы можем дать следующее определение понятия о пределе функции.

Определение 2. Число b называется пределом функции $f(x)$ при стремлении переменной x к пределу a, если каждому как угодно малому положительному числу ε соответствует такое значение x_1 переменной x, что для всех значений этой переменной, которые она принимает при своем стремлении к числу a вслед за значением x_1, будет выполняться неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

т. е. соотношение

$$b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon.$$

Таким образом, для того чтобы доказать, что число b есть предел функции $f(x)$ при стремлении переменной x к пределу a, надо установить, что, как бы мал ни был промежуток $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$, окружающий число b, можно указать, при каком приближении переменной x к своему пределу a значения функции $f(x)$ начнут принадлежать промежутку $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$.

Тот факт, что функция $f(x)$ при стремлении переменной x к пределу a стремится к пределу b, записывают в виде соотношения:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

и выражают словами так: «предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, есть b».

Пример 1. Доказать, что если $a>0$, то

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}\,.$$

Рассмотрим разность $\sqrt{x} - \sqrt{a}$. Требуется доказать, что, как бы мало ни было данное положительное число ε, ему соответствует такое значение x_1 независимой переменной x, начиная с которого имеет место неравенство

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon. \tag{1}$$

Чтобы доказать это утверждение, постараемся решить неравенство (1). С этой целью придадим ему вид

$$\left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| < \varepsilon,$$

т. е. вид

$$\frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \varepsilon. \tag{2}$$

Так как $\sqrt{x}$ есть положительное число, то $\sqrt{x} + \sqrt{a} > \sqrt{a}$, а

$$\frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}\,.$$

Поэтому если будет иметь место неравенство

$$\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon, \tag{3}$$

то тем более будет выполняться и неравенство (2).

Но неравенство (3) имеет место при условии, если

$$|x-a| < \varepsilon \sqrt{a}\,. \tag{4}$$

Следовательно, если мы, пользуясь тем, что переменная x стремится к пределу a, выберем такое значение x_1 этой переменной, начиная с которого будет выполняться неравенство (4), то, начиная с того же значения x_1, будет выполняться и неравенство (3) и, следовательно, неравенство (2), а это и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать, что

$$\lim_{x\to \alpha} a^x = a^\alpha\,, \text{ где } a>0 \text{ и } a\neq 1.$$

Рассмотрим разность $a^x - a^\alpha$. Требуется доказать, что, как бы мало ни было данное положительное число ε, ему соответствует такое значение x_1 независимой переменной x, начиная с которого имеет место система неравенств:

$$(1)\qquad a^\alpha - \varepsilon < a^x < a^\alpha + \varepsilon.$$

Чтобы доказать это утверждение, решим систему (1).

Так как $a^\alpha > 0$, то можно выбрать число ε так, чтобы и разность $a^\alpha - \varepsilon$ имела положительное значение. При этом условии система неравенств (1) явится следствием системы:

$$(2)\qquad \lg(a^\alpha - \varepsilon) < x \lg a < \lg(a^\alpha + \varepsilon),$$

где $\lg a > 0$ при $a > 1$ и $\lg a < 0$ при $0 < a < 1$.

Поэтому система (1) будет удовлетворяться, начиная со значения x_1, подчиненного при $a > 1$ требованию

$$\frac{\lg(a^\alpha - \varepsilon)}{\lg a} < x_1 < \frac{\lg(a^\alpha + \varepsilon)}{\lg a},$$

а при $0 < a < 1$ — требованию

$$\frac{\lg(a^\alpha - \varepsilon)}{\lg a} > x_1 > \frac{\lg(a^\alpha + \varepsilon)}{\lg a}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исходя из определения предела функции, доказать, что

1) $\lim\limits_{x \to 1} (4x + 2) = 6$;

2) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$;

3) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$.

Указание. См. пример 1.

2. Исходя из определения предела функции, доказать, что

1) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

Указание. Если $0 < \varepsilon < 1$, то $|\sin x| < \varepsilon$ при условии $|x| < \arcsin \varepsilon$.

2) $\lim\limits_{x \to 3} 2^x = 8$.

Указание. Если $0 < \varepsilon < 8$, то неравенство $8 - \varepsilon < 2^x < 8 + \varepsilon$ выполняется при условии $\lg(8 - \varepsilon) < x \lg 2 < \lg(8 + \varepsilon)$.

3) $\lim\limits_{x \to 2} \lg x = \lg 2$.

Указание. Систему неравенств $-\varepsilon < \lg \frac{x}{2} < \varepsilon$ можно представить в виде $\lg 10^{-\varepsilon} < \lg \frac{x}{2} < \lg 10^{\varepsilon}$; эта система является следствием системы

$$10^{-\varepsilon} < \frac{x}{2} < 10^{\varepsilon}.$$

2. Теоремы о пределах функций. Если y есть функция от переменной x, то изменение переменной x в каком-либо (конечном или бесконечном) промежутке вызывает некоторое изменение функции y. Поэтому к функции y полностью применимы все теоремы о пределах переменных (гл. VII, § 2, п. 4). Но по отношению к переменным, которые являются функциями, эти теоремы получают следующие формулировки.

Теоремы 1—3. Если две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные в одной и той же области, при стремлении переменной x к пределу a имеют соответственно пределы b и c, то и функции

1) $k \cdot f(x) + l \cdot g(x)$, где k и l — действительные числа,

2) $f(x) \cdot g(x)$,

3) $\frac{f(x)}{g(x)}$ при условии, что $c \neq 0$,

при стремлении переменной x к пределу a имеют пределы, а именно:

1) $\lim\limits_{x \to a} [k \cdot f(x) + l \cdot g(x)] = kb + lc;$

2) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = bc;$

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$

Если при $x \to a$ функция $g(x)$ имеет предел 0, то это может явиться следствием того, что число a служит корнем функции $g(x)$. Может случиться, что в то же время число a есть корень функции $f(x)$ и что в силу этого дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ допускает сокращение. Тогда для нахождения предела этой дроби при $x \to a$ необходимо предварительно выполнить это сокращение.

Пример.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right)}{x^{\frac{1}{2}} - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(x + x^{\frac{1}{2}} + 1\right)}{x^{\frac{1}{2}} - 1} = \lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{2}}\left(x + x^{\frac{1}{2}} + 1\right) = 3.$$

Из теорем 1—3 непосредственно вытекают следующие предложения:

1°. Так как при $x \to a$ степень x^m, где m — целое положительное число, имеет предел a^m (гл. VII, § 2, п. 4), т. е.

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m,$$

то (теорема 1)

$$\lim_{x\to a}[a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m] =$$
$$= a_0a^m + a_1a^{m-1} + a_2a^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\cdot a + a_m,$$

т. е. предел целой рациональной функции от переменной x при стремлении ее к пределу a равен значению, которое эта функция имеет при $x = a$.

2°. Если число a не служит корнем целой рациональной функции

$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n,$$

то (теорема 3)

$$\lim_{x\to a}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n} = \frac{a_0a^m + a_1a^{m-1} + \ldots + a_{m-1}a + a_m}{b_0a^n + b_1a^{n-1} + \ldots + b_{n-1}a + b_n},$$

т. е. предел дробной рациональной функции от переменной x при ее стремлении к пределу a равен значению, которое эта функция имеет при $x = a$.

При этом, как указано, предполагается, что число a не является корнем знаменателя дроби. Если же число a служит корнем знаменателя дроби, то предел этой дроби при $x\to a$ может существовать только в том случае, если число a служит в то же время корнем ее числителя, ввиду чего дробь может быть сокращена на множитель $x - a$.

Пример:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3)(x^2-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3)(x+1)}{x-2} = \frac{4\cdot 2}{-1} = -8.$$

3°. В примере 1 на странице 431 было доказано, что если $a > 0$, то

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a},$$

т. е. предел, к которому стремится функция $\sqrt{x}$ от переменной x при стремлении ее к пределу a, равен значению, которое эта функция имеет при $x = a$.

Позже будет доказано, что если $a > 0$, а n есть целое положительное число, то

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

4°. В примере 2 и упражнении 2 на страницах 431—432 было установлено, что при сделанных относительно чисел a и α оговорках

$$\lim_{x\to\alpha} a^x = a^\alpha, \quad \lim_{x\to\alpha}\log_a x = \log_a\alpha.$$

Вывод. Если $f(x)$ есть одна из функций, рассмотренных в пунктах 1, 2, 3, 4, т. е. 1) целая рациональная функция, 2) дробная рациональная функция, 3) корень целой положительной степени, 4) показательная и логарифмическая функция, то при сделанных относительно числа a оговорках нахождение предела этой функции при $x \to a$ может быть выполнено по формуле

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

т. е. этот предел равен значению, которое функция $f(x)$ имеет при $x = a$.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти предел функции:

1) $2(x+3) - \frac{x}{x-2}$ при $x \to 4$.

2) $x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x}$ при $x \to 1$.

3) $\frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$ при $x \to -2$.

4) $\frac{t(t-1)}{2(t^2-1)}$ при $t \to 1$.

5) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$ при $x \to 2$.

6) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ при $h \to 0$.

7) $\frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ при $x \to 0$.

Указание. Сократить дробь на $\sqrt{x}$.

8) $\frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}$ при $x \to 1$.

Указание. Умножить числитель и знаменатель на произведение сопряженных с ними выражений.

9) $\frac{2^x - 1}{2 \quad + 1}$ при $x \to 3$.

Ответы. 1) 12; 2) -1; 3) $-\frac{3}{4}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{8}$; 6) $3x^2$; 7) -1; 8) $\frac{1}{2}$; 9) 0,7.

3. Предел функции на бесконечности. До сих пор мы рассматривали поведение функции $f(x)$ в том случае, когда независимая переменная стремится к некоторому конечному пределу a. Но функция $f(x)$ может иметь определенный предел и в том случае, когда переменная x стремится к $+\infty$ или к $-\infty$.

***Определение* 2.** Число b называется пределом функции $f(x)$ при стремлении x к $+\infty$ или $-\infty$, если каждому как угодно малому положительному числу ε соответствует такое значение x_1 переменной x, что для всех значений этой переменной, которые она принимает при своем стремлении к $+\infty$ или $-\infty$ вслед за значением x_1, будет выполняться неравенство

$$|f(x)-b|<\varepsilon,$$

т. е. соотношение

$$b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon.$$

Таким образом, для того чтобы доказать, что число b есть предел функции $f(x)$ при стремлении переменной x к $+\infty$ или $-\infty$, надо установить, что, как бы мал ни был промежуток $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, окружающий число b, можно указать, при сколь большом (в случае $x\to+\infty$) или сколь малом (в случае $x\to-\infty$) значении переменной x значения функции начнут попадать в промежуток $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$.

Тот факт, что функция $f(x)$ при стремлении переменной x к $+\infty$ или $-\infty$ стремится к пределу b, записывают в виде соотношения

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=b$$

и выражают словами так: «предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к $-\infty$ или $+\infty$, есть b».

Пример 1. В главе VII (§ 1, п. 5) была доказана теорема: Если переменная x стремится к $+\infty$ или $-\infty$, то переменная $\frac{1}{x}$ — бесконечно малая.

Теперь эту теорему можно записать в виде

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Отсюда следует (теорема 1), что если a — отличное от нуля действительное число, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{x}=0.$$

Этот результат позволяет обосновать следующее свойство графика функции $y=\frac{a}{x}$ (гиперболы): как при неограниченном возрастании, так и при неограниченном убывании переменной x соответствующие ветви этого графика неограниченно приближаются к оси OX, т.е. для достаточно больших по абсолютной величине положительных и отрицательных значений переменной x соответствующие точки графика, оставаясь при $ax>0$ над осью OX и при $ax<0$ под осью OX, становятся как угодно близкими к оси OX, так что ось OX является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{a}{x}$.

Пример 2. Если

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}\,, \text{ где } c \neq 0,\ ad \neq bc,$$

то

$$\lim_{x \to \mp\infty} y = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x\left(a + \frac{b}{x}\right)}{x\left(c + \frac{d}{x}\right)} = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}} = \frac{a}{c}.$$

Отсюда следует, что график рассматриваемой функции имеет горизонтальную асимптоту, именно прямую $y = \frac{a}{c}$, параллельную оси OX и расположенную на расстоянии $\left|\frac{a}{c}\right|$ от нее.

Пример 3. Если $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, то

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.$$

Пример 4. Если $y = 2^x$, то

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} 2^x = 0.$$

4. Неограниченно возрастающие и неограниченно убывающие функции. В главе VII (§ 2; п. 4) мы рассматривали неограниченно возрастающие и неограниченно убывающие переменные.

1°. *Определения.* Если независимая переменная x функции $f(x)$ стремится к пределу a или к бесконечности (какого-либо знака), то функция $f(x)$ может оказаться неограниченно возрастающей или неограниченно убывающей переменной.

Определения 1—2. Если каждому как угодно большому положительному числу M соответствует такое значение x_1 независимой переменной x, что для всех значений, которые она принимает при своем стремлении к a или ∞ вслед за значением x_1, выполняется неравенство

$$f(x) > M,$$

то функция $f(x)$ называется неограниченно возрастающей или стремящейся к $+\infty$.

Если же каждому как угодно большому положительному числу M соответствует такое значение x_1 независимой переменной x, что для всех значений, которые она принимает при своем стремлении к a или ∞ вслед за значением x_1, выполняется неравенство

$$f(x) < -M,$$

то функция $f(x)$ называется неограниченно убывающей или стремящейся к $-\infty$.

Тот факт, что функция $f(x)$ при $x \to a$ или $x \to \mp\infty$ стремится к $+\infty$ или $-\infty$, записывают в виде соотношений:

$$\underset{x \to a}{f(x)} \to +\infty, \quad \underset{x \to a}{f(x)} \to -\infty;$$

$$\underset{x \to \mp\infty}{f(x)} \to +\infty, \quad \underset{x \to \mp\infty}{f(x)} \to -\infty.$$

Примеры.

1) При неограниченном возрастании основания x степени x^r с рациональным основанием r эта степень в случае $r > 0$ неограниченно возрастает, а в случае $r < 0$ — стремится к нулю (гл. VII, §2, п. 4).

Поэтому при $x \to +\infty$: функция x^2 стремится к $+\infty$; функция $\frac{1}{x^2}$ — к 0; функция $x^{\frac{1}{2}}$ стремится к $+\infty$, функция $x^{-\frac{1}{2}}$ — к 0;

2) $2^x \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \to +\infty$ при $x \to -\infty$;

4) $\log_{10} x \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

5) $\log_{10} x \to -\infty$ при $x \to 0$;

6) $\log_{\frac{1}{2}} x \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

7) $\log_{\frac{1}{2}} x \to +\infty$ при $x \to 0$.

2°. *Свойства функций, стремящихся к бесконечности.* Установленные в главе VII (§ 2, п. 4) свойства неограниченно возрастающих и убывающих переменных в применении к функциям, стремящимся к $+\infty$ или $-\infty$, могут быть выражены в следующей форме:

Теорема 1. Если функция $f(x)$ при x, стремящемся к пределу или к бесконечности, стремится к бесконечности, то функция $\frac{1}{f(x)}$ стремится к нулю.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ в некотором промежутке (конечном или бесконечном) сохраняет знак и при x, принадлежащем этому промежутку и стремящемся к пределу a или к бесконечности, стремится к нулю, то функция $\frac{1}{f(x)}$ стремится к $+\infty$ (при $f(x) > 0$) или к $-\infty$ (при $f(x) < 0$).

Теорема 3. Если при x, стремящемся к пределу a или к бесконечности, функция $f(x)$ стремится к пределу b, отличному от нуля, а функция $g(x)$ — к $\mp\infty$, то произведение $f(x) \cdot g(x)$ стремится к $\mp\infty$ при $b > 0$ и к $\pm\infty$ при $b < 0$.

3°. *Поведение рациональных функций на бесконечности.* Теоремы 1—3 позволяют установить поведение целой рациональной функции и дробной рациональной функции на бесконечности, т. е. при $x \to \mp\infty$.

Теорема 4. Если независимая переменная x неограниченно возрастает (стремится к $+\infty$), то целая рациональная функция m-й степени (1) стремится к бесконечности, имеющей тот же знак, что и коэффициент a_0 при x^n. Если же независимая переменная x неограниченно убывает (стремится к $-\infty$), то функция (1) при m четном стремится к бесконечности, имеющей тот же знак, что и коэффициент a_0 при x^m, а при m нечетном — к бесконечности, имеющей знак, противоположный знаку коэффициента a_0 при x^m.

Докажем это на примерах.

Пример 1. Если

$$y = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, \tag{1}$$

то, представляя это уравнение в виде

$$y = x^3\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3}\right)$$

и принимая во внимание, что по теореме о пределе суммы переменных

$$\lim_{x \to +\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3}\right) = a_0$$

и что

$$x^3 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{(пример 1 на стр. 438)},$$

находим, что если $x \to +\infty$, то функция y стремится к $+\infty$ при $a_0 > 0$ и к $-\infty$ при $a_0 < 0$ (теорема 3).

Точно так же, из того, что

$$\lim_{x \to -\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3}\right) = a_0$$

и

$$x^3 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \quad [x^3 = -(-x)^3],$$

следует, что если $x \to -\infty$, то функция y стремится к $-\infty$ при $a_0 > 0$ и к $+\infty$ при $a_0 < 0$.

Пример 2. Если

$$y = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4, \tag{2}$$

то, представляя это уравнение в виде

$$y = x^4\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x_4}\right)$$

и принимая во внимание, что

$$\lim_{x \to \mp\infty}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_4}{x^4}\right) = a_0$$

и что

$$\underset{x \to \mp\infty}{x^4 \to +\infty} \quad [x^4 = (\pm x)^4],$$

находим, что если $x \to \mp\infty$, то функция y стремится к $+\infty$ при $a_0 > 0$ и к $-\infty$ при $a_0 < 0$.

Это свойство целой рациональной функции легко запомнить, если пользоваться следующими мнемоническими равенствами:

$(+\infty)^m = (+\infty)$;

$(-\infty)^m = (+\infty)$ при m четном и $(-\infty)$ при m нечетном, а также правилом знаков при умножении чисел.

Например, если

$$y = -2x^5 + 3x^4 - x + 1,$$

то

$$y \to +\infty \quad \text{при } x \to -\infty,$$
$$y \to -\infty \quad \text{при } x \to +\infty.$$

В силу доказанного свойства целой рациональной функции ее график начинается с ветви, приходящей из бесконечности, и заканчивается ветвью, уходящей в бесконечность.

Теорема 5. Если независимая переменная x неограниченно возрастает (стремится к $+\infty$) или неограниченно убывает (стремится к $-\infty$), то поведение дробной рациональной функции

$$(3) \qquad y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n}$$

зависит от того, имеют ли многочлены, служащие числителем и знаменателем представляющей ее дроби, одинаковые или различные степени. Именно:

1) если $m = n$, то при $x \to \mp\infty$ функция y стремится к пределу $\frac{a_0}{b_0}$, равному отношению коэффициентов a_0 и b_0;

2) если $m<n$, то при $x \to \mp\infty$ функция y стремится к пределу 0;

3) если $m>n$, то при $x \to \mp\infty$ функция y стремится к бесконечности, знак которой может быть установлен дополнительно.

Докажем это на примерах.

Пример 1. Если

$$y = \frac{a_0x^2 + a_1x + a_2}{b_0x^2 + b_1x + b_2},$$

то, представляя это уравнение в виде

$$y = \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2}},$$

находим (теорема 1), что

$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{a_0+0+0}{b_0+0+0} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Пример 2. Если

$$y = \frac{a_0x+a_1}{b_0x^2+b_1x+b_2},$$

то, представляя его уравнение в виде

$$y = \frac{\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x^2}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}},$$

находим (теорема 1) , что

$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{0+0}{b_0+0+0} = 0.$$

Пример 3. Если

$$y = \frac{a_0x^2+a_1x+a_2}{b_0x+b_1},$$

то, как установлено было в примере 2, функция

$$\frac{1}{y} = \frac{b_0x+b_1}{a_0x^2+a_1x+a_2}$$

при $x \to \mp\infty$ стремится к 0.

Поэтому, если дополнительно известно, что функция $\frac{1}{y}$ при своем приближении к 0 сохраняет определенный знак, то согласно теореме 2 функция y стремится соответственно к $-\infty$ или к $+\infty$.

Например, функция

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

имеет при $x<1$ отрицательное значение, а при $x>1$ положительное значение. Поэтому функция

$$\frac{1}{y} = \frac{x-1}{x^2}$$

при $x\to-\infty$ стремится к 0, сохраняя отрицательное значение, а при $x\to+\infty$ стремится к 0, сохраняя положительное значение, в силу чего

$$y\to-\infty \quad \text{при } x\to-\infty;$$
$$y\to+\infty \quad \text{при } x\to+\infty.$$

Наоборот, функция

$$y = \frac{x^3}{x-1},$$

знак которой, очевидно, совпадает со знаком функции

$$y = x\,(x-1),$$

имеет при $x<0$ и $x>1$ положительное значение. Поэтому функция

$$\frac{1}{y}=\frac{x-1}{x^3}$$

при $x\to\mp\infty$ стремится к 0, сохраняя положительное значение, в силу чего

$$y\to+\infty \text{ при } x\to\mp\infty.$$

В силу теоремы 5 мы можем сделать следующие заключения о графике дробной линейной функции (3):

1) если $m=n$, то график функции (3) имеет горизонтальную асимптоту, именно прямую, параллельную оси OX и расположенную на расстоянии $\left|\frac{a_0}{b_0}\right|$ от нее;

2) если $m<n$, то ось OX служит асимптотой этого графика;

3) если $m>n$, то этот график приходит из положительной или отрицательной бесконечности и уходит в положительную или отрицательную бесконечность.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти пределы функций:

1) $\dfrac{x-1}{x+2}$ при $x\to\mp\infty$.

2) $\dfrac{2-x}{2x}$ при $x\to\mp\infty$.

3) $\dfrac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x-3}$ при $x\to\mp\infty$.

4) $\dfrac{10x^2+3x+1}{x^3-x^2-x}$ при $x\to\mp\infty$.

5) $\sqrt{x^2+1}-x$ при $x\to+\infty$.

Указание. Умножить и разделить на сопряженное выражение.

6) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ при $x\to\mp\infty$.

7) $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ при $x\to+\infty$.

Указание. Представить функцию в виде:

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}},$$

8) x^5-3x^4+6x-1 при $x\to-\infty$,

9) $\dfrac{x^2+2}{x}$ при $x\to+\infty$.

10) $\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}$ при $x\to\mp\infty$.

Ответы. 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) 0; 5) 0; 6) 0; 7) 1; 8) $-\infty$; 9) $+\infty$; 10) 0.

5. Односторонние пределы. До сих пор, рассматривая предел функции $f(x)$ при стремлении переменной x к числу a, мы допускали, что переменная x, неограниченно приближаясь к этому числу, может принимать значения, лежащие как слева, так и справа от него, лишь бы они принадлежали области определения функции.

Но в ряде случаев бывает необходимо установить, имеет ли функция $f(x)$ предел при условии, если переменная x, неограниченно приближаясь к числу a, будет принимать только те значения из области определения функции, которые лежат либо справа от числа a, либо слева от него.

Если функция $f(x)$ при этом ограничении, налагаемом на область изменения переменной x, стремящейся к пределу a, имеет предел b, то говорят, что функция $f(x)$ имеет односторонний предел b и именно левосторонний (левый) или правосторонний (правый) предел в зависимости от того, слева или справа от числа a находятся те значения, которые принимает переменная x при неограниченном приближении к числу a.

Наличие левостороннего (левого) или правостороннего (правого) предела функции $f(x)$ при $x\to a$ обозначают соответственно так:

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x<a)}} f(x) = b; \qquad \lim_{\substack{x\to a\\(x>a)}} f(x) = b.$$

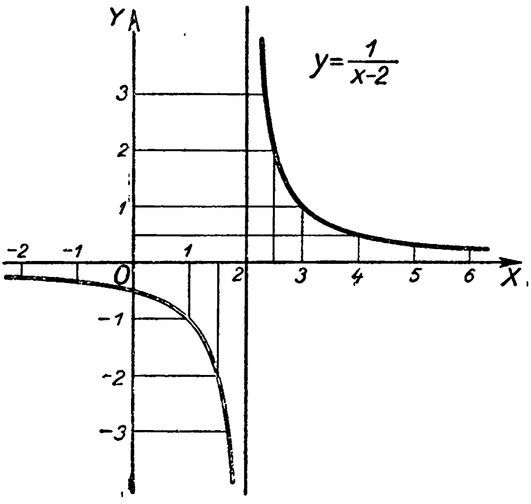
Понятие о левом и правом пределе распространяется и на тот случай, когда при неограниченном приближении независимой переменной к какому-либо числу слева или справа функция стремится к $-\infty$ или $+\infty$.

Пример 1. Функция $y=\sqrt{x}$ определена только для неотрицательных значений переменной x. Поэтому в точке $x=0$ она может иметь только правосторонний предел; именно:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} \sqrt{x} = 0.$$

Пример 2. Функция $y=\frac{1}{x-2}$ не определена только в точке $x=2$. Функция $x-2$ при $x\to 2$ стремится к нулю и при $x<2$ имеет отрицательное значение, а при $x>2$ — положительное значение; поэтому функция $\frac{1}{x-2}$ при x, стремящемся к числу 2 слева, стремится к $-\infty$, а при x, стремящемся к числу 2 справа, стремится к $+\infty$ (п. 4, теорема 2), так что при переходе через точку $x = 2$ функция $\frac{1}{x-2}$ делает «скачок» от $-\infty$ к $+\infty$.

Этот результат имеет следующий геометрический смысл: 1) график функции $y = \frac{1}{x-2}$ имеет в ее точке разрыва вертикальную асимптоту; 2) при неограниченном приближении переменной x к точке 2 слева ординаты графика неограниченно убывают, а при неограниченном приближении этой переменной к точке 2 справа — ординаты графика неограниченно возрастают (черт. 123).



Черт. 123

Пример 3. Функция

$$y = \frac{1}{x(x-2)}$$

не определена только в точках $x = 0$ и $x = 2$. Очевидно, что

$$y\,0 > \text{ при } x < 0 \text{ и } x > 2,$$

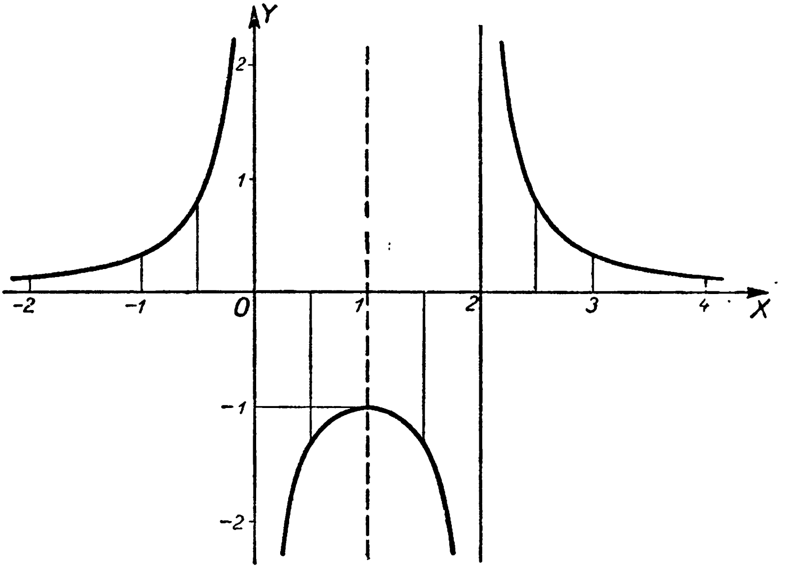
$$y < 0 \text{ при } 0 < x < 2.$$

Функция $\frac{1}{y} = x\,(x-2)$ при $x \to 0$ стремится к нулю и при $x < 0$ имеет положительное значение, а при $x > 0$ — отрицательное значение; поэтому функция y при x, стремящемся к 0 слева, стремится к $+\infty$, а при x, стремящемся к 0 справа, стремится к $-\infty$, т. е.

при переходе переменной x через точку O делает скачок от $+\infty$ к $-\infty$.

Функция $\frac{1}{y} = x(x-2)$ при $x \to 2$ стремится к нулю и при $x < 2$ имеет отрицательное значение а при $x > 2$ — положительное значение; поэтому функция y при x, стремящемся к 2 слева, стремится к $-\infty$, а при x, стремящемся к 2 справа, — к $+\infty$, т. е. при переходе переменной x через точку 2 делает скачок от $-\infty$ к $+\infty$.

Следовательно, график функции y в ее точках разрыва 0 и 2 имеет вертикальные асимптоты (черт. 124).



Черт. 124

Пример 4. Функция

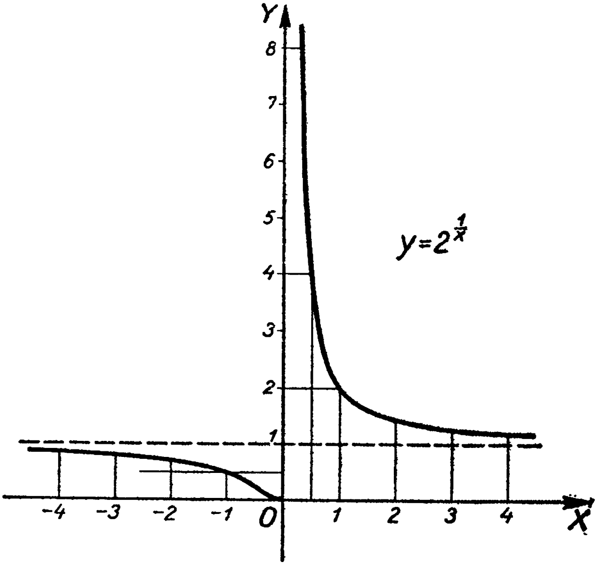
$$y = 2^{\frac{1}{x}}$$

не определена только в точке $x = 0$.

При x, стремящемся к 0 справа и, следовательно, принимающем только положительные значения, функция $\frac{1}{x}$ стремится к $+\infty$; поэтому при $x \to 0$ $(x > 0)$ функция y также стремится к $+\infty$.

При x, стремящемся к 0 слева и, следовательно, принимающем только отрицательные значения, функция $\frac{1}{x}$ стремится к $-\infty$; поэтому при $x \to 0$ $(x < 0)$ функция y стремится к 0 (черт. 125).

Таким образом, функция $2^{\frac{1}{x}}$ имеет при $x \to 0$ левый предел и правый предел, но эти пределы не совпадают, так что общего (двустороннего) предела при $x \to 0$ функция $2^{\frac{1}{x}}$ не имеет.



Черт. 125

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти правый и левый пределы функций

$$f(x) = \frac{x}{x} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{|x|}{x}$$

при $x \to 0$.

Ответы. Правые пределы: 1, 1; левые пределы: 1, -1.

2. Найти правый и левый пределы функции

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

при $x \to 1$.

Ответ. 3.

3. Установить, как изменяются функции

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

при $x \to 0$ слева и справа. Построить графики.

Ответ. $f(x) \to \mp\infty$; $g(x) \to +\infty$.

4. Установить, как изменяется функция

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

при $x \to 0$ слева и справа. Построить график.

Ответ. $f(x) \to 1$ и $f(x) \to 0$.

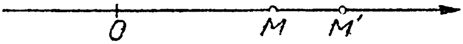
Производная функция

§ 5. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

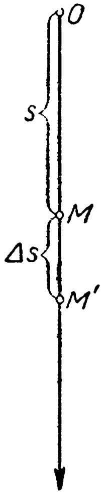
1. Задача о вычислении скорости движущейся точки. Допустим, что некоторая точка движется в определенном направлении по прямой линии, или, как говорят, совершает прямолинейное движение. Если эта точка начала свое движение из некоторого положения O (черт. 126 а) и через t секунд пришла в положение M, то говорят, что она заняла положение M в момент t. Пусть теперь, продолжая свое движение в том же направлении, та же точка в момент t' заняла новое положение M'. Обозначив путь OM, который точка прошла за t секунд, через s, мы можем сказать, что, когда промежуток времени t получил приращение Δt, равное разности $t'-t$, путь s получил приращение Δs, равное длине отрезка MM':

$$\Delta t = t' - t,\ \Delta s = \overline{MM'}.$$

На участке MM' точка могла двигаться равномерно или неравномерно. Но если бы она двигалась равномерно, то ее скорость была бы равна отношению $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, т. е. частному $\frac{\overline{MM'}}{t'-t}$.



Черт. 126 а



Черт. 126 б

Пример 1. Известно, что если материальная точка совершает свободное падение (в пустоте — чтобы не учитывать сопротивления воздуха) и за t секунд, отсчитываемых от начала падения, перемещается из начального положения O в некоторое положение M (черт. 126 б), то пройденный ею путь OM будет иметь значение s метров, вычисляемое по формуле

$$(1) \qquad s = \frac{gt^2}{2},$$

где $g=9{,}81$.

Поэтому, если за следующие 3 сек. эта точка пройдет путь MM', то по формуле (1) найдем, что

$$\overline{MM'} = \frac{g(t+3)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}(6t+9)\ м.$$

Таким образом, приращению времени Δt, равному 3 сек., соответствует приращение пути Δs, равное $\frac{g}{2}(6t+9)$ *м*.

Путь MM' был пройден падающей точкой неравномерно (равноускоренно). Но если бы эта точка прошла тот же путь MM' за те же 3 сек., двигаясь равномерно, т. е. с одной и той же скоростью, то ее скорость была бы равна отношению $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, т. е. имела бы значение

$$\frac{\overline{MM'}}{3}=\frac{g(6t+9)}{6}=\frac{g(2t+3)}{2}\ \frac{м}{сек}.$$

Например, оказалось бы, что при $t=10$ эта скорость была бы равна $11{,}5g\frac{м}{сек}$, т. е. приближенно $112{,}8\frac{м}{сек}$. Следовательно, тот путь, который падающая точка прошла неравномерно (равноускоренно) за 11-ю, 12-ю и 13-ю секунды, при равномерном движении мог бы быть пройден с постоянной скоростью $112{,}8\frac{м}{сек}$.

Посредством тех же рассуждений мы можем прийти к выводу, что:

если $\Delta t=1$ сек., то $\Delta s=\frac{g(t+1)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=\frac{g}{2}(2t+1)м$;

если $\Delta t=0{,}1$ сек., то $\Delta s=\frac{g(t+0{,}1)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=\frac{g}{2}(0{,}2t+0{,}01)м$;

если $\Delta t=0{,}01$ сек., то $\Delta s=\frac{g(t+0{,}01)^2}{2}-\frac{gt^2}{2}=$

$$=\frac{g}{2}(0{,}02t+0{,}0001)\ м.$$

Следовательно,
за 11-ю секунду точка прошла $10{,}5\ g$ *м*;
за 1-ю десятую долю 11-й секунды — $1{,}005\ g$ *м*;
за 1-ю сотую долю 11-й секунды — $0{,}10005\ g$ *м*.

Если бы в течение этих промежутков времени точка двигалась равномерно, то ее постоянная скорость

за 11-ю секунду была бы равна $\frac{10{,}5}{1}g=10{,}5\,g\frac{м}{сек}$;

за 1-ю десятую долю 11-й секунды — $\frac{1{,}005}{0{,}1}g=10{,}05\,g\frac{м}{сек}$;

за 1-ю сотую долю 11-й секунды — $\frac{0{,}10005}{0{,}01}g=10{,}005\,g\frac{м}{сек}$.

Легко заметить, что если $t=10$, а Δt пробегает последовательность значений

(2) $\quad 1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ldots,$

все больше приближающуюся к нулю, то отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ пробегает последовательность значений

(3) $\quad 10{,}5\ g;\ 10{,}05\ g;\ 10{,}005\ g;\ldots,$

все больше приближающуюся к числу $10\ g$.

Это наблюдение наводит на мысль о том, что если приращение Δt будет пробегать какую-либо последовательность значений

(4) $\quad h_1,\ h_2,\ h_3 \ldots,\ h_n,\ldots,$

стремящуюся к нулю, то отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет стремиться к некоторому пределу, зависящему от того, какому промежутку времени t, протекшему после начала движения, мы последовательно даем приращения (4).

Это действительно имеет место. В самом деле, если $\Delta t = h_n$, то

$$\Delta s = \frac{g(t+h_n)^2}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2}(2th_n + h_n^2),$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g(2th_n + h_n^2)}{2h_n} = \frac{g}{2}(2t + h_n);$$

поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h_n \to 0} \frac{g}{2}(2t + h_n) = gt.$$

Например, если по истечении 10-й секунды приращение Δt будет принимать последовательность значений (2), стремящуюся к 0, то отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет стремиться к пределу $(gt)_{t=10}$, т.е. к пределу $10g$, как мы это и нашли выше.

Если по истечении 20-й секунды приращение Δt будет принимать последовательность значений (2), стремящуюся к нулю, то отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет стремиться к пределу $(gt)_{t=20}$, т. е. к пределу $20\ g$.

Вообще, если по истечении t-й секунды приращение Δt будет принимать последовательность значений (4), стремящуюся к 0, то отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ будет стремиться к пределу gt.

Отдадим себе отчет в том, какой физический смысл имеет полученный нами результат.

Мы видели выше, что если бы падающая точка в течение 11-й секунды двигалась не ускоренно, как это было в действительности, а равномерно, то ее скорость была бы равна $10{,}5\,g\,\frac{м}{сек}$; при равномерном движении в течение 1-й десятой доли 11-й секунды скорость падающей точки была бы равна $10{,}05\,g\,\frac{м}{сек}$, а при равномерном движении в течение 1-й сотой доли 11-й секунды ее скорость была бы равна $10{,}005\,g\,\frac{м}{сек}$.

Определение 1. Если точка, совершающая неравномерное прямолинейное движение, за некоторый промежуток времени h секунд проходит путь s метров, то та постоянная скорость, с которой точка могла бы пройти тот же путь s за то же время h при равномерном движении, называется средней скоростью точки за рассматриваемый промежуток времени.

Если точка совершает свободное падение, т. е. движется по закону:

$$s = \frac{gt^2}{2}, \text{ где } g=9{,}81 \text{ м},$$

то ее средняя скорость за 11-ю секунду, за 1-ю десятую долю 11-й секунды, за 1-ю сотую долю 11-й секунды и т. д. будет соответственно равна $10{,}5\,g$; $10{,}05\,g$; $10{,}005\,g$;...$\frac{м}{сек}$; при этом, если промежуток времени Δt, за который мы рассматриваем среднюю скорость v_m падающей точки, будет уменьшаться, стремясь к 0, то эта средняя скорость v_m будет стремиться к пределу gt, где t есть длина того промежутка времени, переменное приращение Δt которого рассматривается.

Определение 2. Предел, к которому стремится средняя скорость v_m точки, совершающей прямолинейное движение, за промежуток времени Δt, следующий за моментом t, при условии, что Δt стремится к нулю, называется скоростью этой точки в момент t, а также мгновенной скоростью.

Скорость точки, совершающей свободное падение, в момент t равна gt.

Следовательно, скорость этой точки в момент $t=10$ равна $10g$. Это можно понимать так: за первые 10 сек. скорость падающей точки изменялась от момента к моменту, непрерывно увеличиваясь, и к моменту $t=10$ приобрела значение $10g$; если бы сила притяжения земли, которая непрерывно действует на точку, по истечении 10-й секунды вдруг перестала действовать, то дальше точка стала бы двигаться по инерции равномерно с постоянной скоростью $10g$. Вообще, если бы такое прекращение воздействия силы на падающую точку наступило в момент t, то дальше точка стала бы двигаться по инерции равномерно с постоянной скоростью gt. Такой физический смысл можно вложить в понятие скорости падающей точки в момент t.

Пример 2. Если тяжелый шарик скатывается вниз по наклонной плоскости, то это движение происходит по закону:

$$s = \frac{at^2}{2},$$

где $a<g$, например, по закону:

$$s = 3t^2.$$

В этом случае, если промежуток времени t секунд получит приращение Δt, равное h секундам, то соответствующее ему приращение пути Δs можно будет найти по формуле:

$$\Delta s = 3(t+h)^2 - 3t^2 = 3(2th+h^2),$$

а среднюю скорость v_m шарика за промежуток времени h — по формуле:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3(2th+h^2)}{h} = 3(2t+h).$$

Отсюда следует, что средняя скорость за h секунд, которую шарик приобретет по истечении, например, 3 сек. от начала движения, может вычисляться по формуле:

$$v_m = 3(6+h).$$

Поэтому

если $h = 1$ сек., то $v_m = 21$;
если $h = 0{,}1$ сек., то $v_m = 18{,}3$;
если $h = 0{,}01$ сек., то $v_m = 18{,}03$;
если $h = 0{,}001$ сек., то $v_m = 18{,}003$.

Для вычисления скорости v шарика в момент $t = 3$ найдем предел, к которому стремится средняя скорость $3(6+h)$ при $h \to 0$:

$$v = \lim_{h\to 0} 3(6+h) = 18.$$

Пример 3. Точка совершает прямолинейное движение по закону:

$$s = 2t^2 + 4t.$$

Средняя скорость этого движения за промежуток времени Δt, протекший после наступления момента t, может быть вычислена по формуле:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2(t+h)^2+4(t+h)-2t^2-4t}{h} = \frac{4th+2h^2+4h}{h} = 4t+2h+4,$$

а скорость v в момент t — по формуле:

$$v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h\to 0} (4t+2h+4) = 4t+4.$$

Например, скорость v этой точки в момент $t = 1, 2, 3, \ldots$ имеет соответственно значения 8, 12, 16, ..., представляющие собою члены арифметической прогрессии с первым членом 8 и разностью 4; впрочем, это можно было заключить сразу из равенства

$$v = 8 + 4(t-1).$$

Общий случай. Теперь рассмотрим тот же вопрос в общем виде. Допустим, что точка совершает прямолинейное движение по закону:

$$s = f(t),$$

т. е. при условии, что путь s, пройденный ею за время t, может быть найден по данной формуле.

Если промежуток времени t получит приращение Δt, равное h, то соответствующее ему приращение пути Δs будет равно разности

$$f(t+h)-f(t),$$

а средняя скорость v_m точки за промежуток времени h, протекший после наступления момента h, будет вычисляться по формуле:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

Для вычисления скорости v точки в момент t надо будет найти предел, к которому стремится средняя скорость v_m этой точки по мере того, как приращение времени h стремится к нулю:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

Всякий раз, как будет задана функция $f(t)$, каждое значение которой есть значение пути s, пройденного движущейся точкой за время t, мы можем вычислить скорость v этой точки в момент t, если найдем:

1) Δs, т. е. разность $f(t+h)-f(t)$;

2) $\frac{\Delta s}{t}$, т. е. отношение $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$;

3) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, т. е. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$.

Пример 4. Найти скорость, которую приобретает в момент $t = 5$ точка, совершающая прямолинейное движение по закону:

$$s = \frac{a^2}{t},$$

где a — постоянное число.

Решение. Последовательно выполняем операции 1—3:

1) $f(t+h)-f(t) = \frac{a^2}{t+h} - \frac{a^2}{t} = -\frac{a^2 h}{(t+h)t}$;

2) $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=-\dfrac{a^2}{(t+h)t}$;

3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=-\dfrac{a^2}{t^2}$.

Следовательно, искомая скорость v точки в момент $t=5$ имеет значение $-\dfrac{a^2}{25}$.

Пример 5. Найти скорость, которую приобретает в момент $t=t_0$ точка, совершающая прямолинейное движение по закону:

$$s=\frac{2t+1}{t+3}.$$

Решение. Последовательно выполняем операции 1—3:

1) $f(t+h)-f(t)=\dfrac{2(t+h)+1}{t+h+3}-\dfrac{2t+1}{t+3}=\dfrac{5h}{(t+h+3)(t+3)}$;

2) $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=\dfrac{5}{(t+h+3)(t+3)}$;

3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{5}{(t+h+3)(t+3)}=\dfrac{5}{(t+3)^2}$.

Пример 6. Найти скорость, которую приобретает в момент $t=t_0$ точка, совершающая прямолинейное движение по закону:

$$s=\sqrt{t}.$$

Решение. Последовательно выполняем операции 1—3:

1) $f(t+h)-f(t)=\sqrt{t+h}-\sqrt{t}$;

2) $\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=\dfrac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h}$;

3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{t+h}-\sqrt{t}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(\sqrt{t+h}-\sqrt{t})(\sqrt{t+h}+\sqrt{t})}{h(\sqrt{t+h}+\sqrt{t})}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{t+h}+\sqrt{t}}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$.

Следовательно, искомая скорость v точки в момент $t=t_0$ имеет значение $\dfrac{1}{2\sqrt{t_0}}$.

Примечание. См. § 4, п. 1, пример 1.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Точка совершает движение по закону $s=48t-12t^2+t^3$. Найти среднюю скорость ее движения между первой и второй секундами, между третьей и пятой и между первой и седьмой.

Ответ. 19; 1; 9.

2. Найти скорость, которую приобретает к концу третьей секунды точка, движущаяся по закону $s = 4t^2$.

Ответ. 24.

3. Найти скорость, которую приобретаст в момент $t = t_0$ точка, совершающая прямолинейное движение по закону:

1) $s = t^3$; 2) $s = 2t^3 + 3t$;

3) $s = \frac{9}{2t+1}$; 4) $s = \frac{5t}{t+1}$;

5) $s = \frac{4t+1}{t+6}$; 6) $s = \frac{1}{t^2}$;

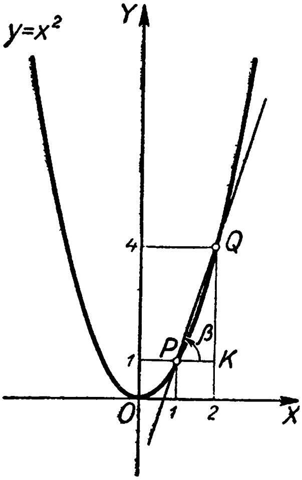
7) $s = \sqrt{t+1}$; 8) $s = \sqrt{2t+3}$.

Ответы. 1) $3t_0^2$; 2) $6t_0^2 + 3$; 3) $-\frac{18}{(2t_0+1)^2}$; 4) $\frac{5}{(t_0+1)^2}$; 5) $\frac{23}{(t_0+6)^2}$; 6) $-\frac{2}{t_0^3}$; 7) $\frac{1}{2\sqrt{t_0+1}}$; 8) $\frac{2}{2\sqrt{2t_0+3}}$.

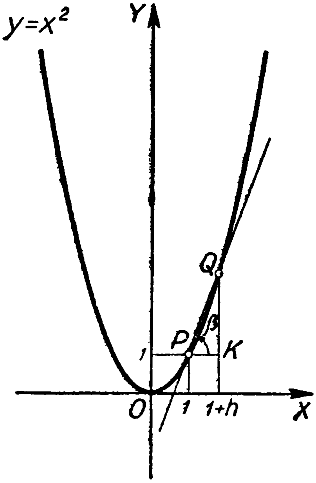
2. Задача о проведении касательной к кривой.

1°. *Нахождение наклона секущей.*

Пример 1. Найти наклон секущей, которая проходит через точки $P(1;1)$ и $Q(2;4)$ кривой, определяемой уравнением $y = x^2$ (черт. 127а).



Черт. 127а



Черт. 127б

Решение. Как известно (гл. IV, §5, п. 2), наклоном прямой к оси OX называется тангенс угла, который прямая образует с этой осью. Обозначив угол, который секущая PQ образует с прямой PK, параллельной оси OX, через β, мы последовательно найдем, что

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{KQ}}{\overline{PK}} = \frac{4-1}{2-1} = 3.$$

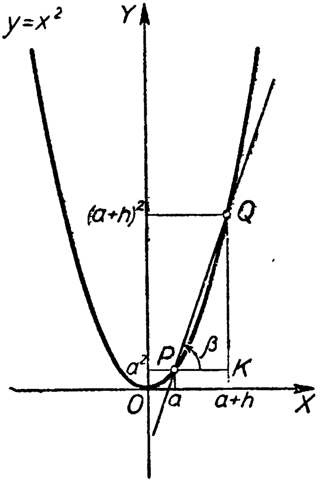
Из равенства $\operatorname{tg}\beta = 3$ по таблицам получим, что $\beta \approx 71°34'$·

Пример 2. Найти наклон секущей, которая проходит через точки $P(1;\ 1)$ и $Q(1,1;\ 1\ 21)$ кривой, определяемой уравнением $y=x^2$.

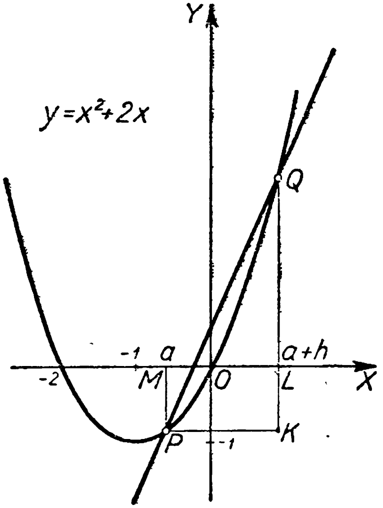
Решение. Теперь найдем, что

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\overline{KQ}}{\overline{PK}}=\frac{1,21-1}{1,1-1}=\frac{0,21}{0,1}=2,1;$$

отсюда следует, что $\beta\approx 64°32'$.



Черт. 127 в



Черт. 128

Пример 3. Найти наклон секущей, которая проходит через точки $P(1;\ 1)$ и $Q[1+h;\ (1+h)^2]$ кривой, определяемой уравнением $y=x^2$ (черт. 127б).

Решение. Точно так же найдем, что

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\overline{KQ}}{\overline{PK}}=\frac{(1+h)^2-1^2}{(1+h)-1}=\frac{2h+h^2}{h}=2+h.$$

Пример 4. Найти наклон секущей, которая проходит через точки $P(a;\ a^2)$ и $Q[a+h;\ (a+h)^2]$ кривой, определяемой уравнением $y=x^2$ (черт. 127 в).

Решение. Последовательно находим:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\overline{KQ}}{\overline{PK}}=\frac{(a+h)^2-a^2}{(a+h)-a}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h.$$

Формула

(1) $$\operatorname{tg}\beta=2a+h,$$

которую мы вывели в примере 4, позволяет найти наклон секущей, проходящей через две любые точки P и Q кривой, определяемой уравнением $y=x^2$. Поэтому равенства

1) $\operatorname{tg}\beta = 3$, 2) $\operatorname{tg}\beta = 2{,}1$, 3) $\operatorname{tg}\beta = 2 + h$,

к которым мы пришли в примерах 1, 2, 3, могут быть получены из общей формулы (1), если мы положим в ней соответственно:

1) $a = 1,\ h = 1$; 2) $a = 1,\ h = 1{,}1$; 3) $a = 1$.

Очевидно, что способ нахождения наклона секущей, примененный к кривой $y = x^2$, может быть применен ко всякой другой кривой.

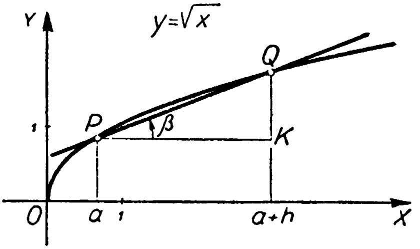
Пример 5. Найти наклон секущей, которая проходит через точки P с абсциссой a и Q с абсциссой $a + h$, принадлежащие кривой, определяемой уравнением $y = x^2 + 2x$ (черт. 128).

Решение. Последовательно находим:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{KQ}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{KL} + \overline{LQ}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{PM} + \overline{LQ}}{\overline{PK}} = \frac{(a+h)^2 + 2(a+h) - a^2 - 2a}{h} =$$

$$= \frac{2ah + h^2 + 2h}{h} = 2a + h + 2.$$

Пример 6. Найти наклон секущей, которая проходит через точки P с абсциссой a и Q с абсциссой $a+h$ кривой, определяемой уравнением $y = \sqrt{x}$ (черт. 129).



Черт. 129

Решение. Последовательно находим:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{KQ}}{\overline{PK}} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} =$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

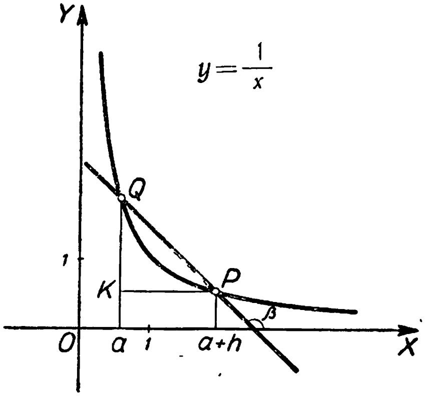
Пример 7. Найти наклон секущей, которая проходит через точки P с абсциссой a и Q с абсциссой $a + h$, принадлежащие кривой, определяемой уравнением $y = \frac{1}{x}$ (черт. 130).

Решение. Последовательно находим:

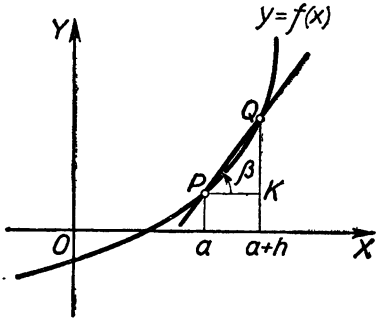
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle KPQ) = -\operatorname{tg}\angle KPQ = -\frac{\overline{KQ}}{\overline{PK}} =$$

$$= -\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+h}}{h} = -\frac{h}{ha(a+h)} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$

Общий случай. Теперь рассмотрим тот же вопрос в общем виде. Найдем наклон секущей, которая проходит через точки P с абсциссой a и Q с абсциссой $a+h$, принадлежащие кривой, определяемой уравнением $y=f(x)$ (черт. 131).



Черт. 130



Черт. 131

Решение. Очевидно, что

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\overline{KQ}}{\overline{PK}}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Эта формула указывает, что для вычисления наклона секущей, которая проходит через точки P с абсциссой a и Q с абсциссой $a+h$, принадлежащие кривой, определяемой уравнением $y=f(x)$, надо найти:

1) Δy, т. е. разность $f(a+h)-f(a)$;

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. отношение $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти наклон секущей, которая проходит через точки P с абсциссой a и Q с абсциссой $a+h$, принадлежащие кривой, определяемой уравнением:

1) $y=x^3$; $y=(x-2)^3$; $y=2x^3$;

2) $y=\frac{2}{x-3}$; $y=\frac{2x}{x-3}$; $y=\frac{x-1}{x-2}$;

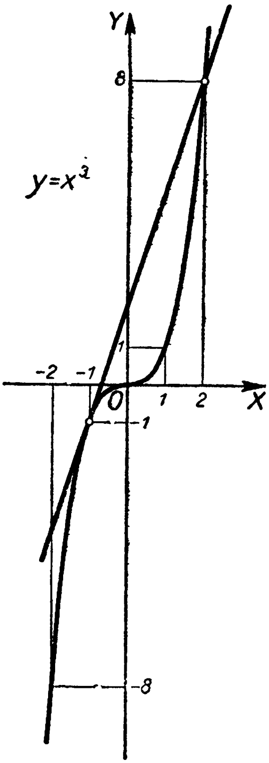
3) $y=\sqrt{x-3}$; $y=\sqrt{2x}$.

2°. ***Касательная к кривой.*** В элементарной геометрии касательную к окружности определяют как прямую, которая имеет с окружностью только одну общую точку. Но это определение касательной не может быть распространено на все кривые. Достаточно взглянуть на чертеж 132, чтобы увидеть, что прямая может «касаться» кривой в одной точке и в то же время иметь еще другие общие точки с кривой.

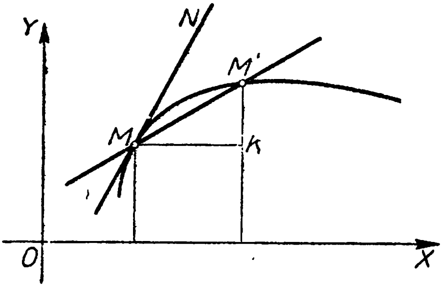
Но может случиться и так, что прямая имеет единственную общую точку с кривой, но не является касательной к ней. Такой прямой служит, например, ось ординат для графиков уравнений $y=x^2$, $y=x^3$ и т. п.

Поэтому касательной к кривой дают более общее определение, которое относится ко всем кривым. Для установления этого общего понятия о касательной поступим следующим образом. Возьмем на кривой (черт. 133) точку M и еще некоторую близкую к ней точку M' и проведем через эти точки M и M' секущую MM'. Теперь, оставляя точку M неподвижной, будем перемещать точку M' по кривой, приближая ее к точке M. В результате этого перемещения точки M' секущая MM' будет вращаться вокруг точки M и в момент совпадения точки M' с точкой M займет некоторое предельное положение MN.

Определение. Прямая, занимающая то положение, к которому стремится секущая MM' кривой по мере того, как точка M', перемещаясь по кривой, стремится к совпадению с точкой M, называется **касательной** к этой кривой в точке M.



Черт. 132



Черт. 133

Очевидно, что это общее определение касательной к кривой распространяется и на касательную к окружности.

Из определения касательной следует, что если при неограниченном приближении точки M' к точке M угол β, образуемый секущей MM' с осью OX, стремится к некоторому пределу α, то прямая, образующая с осью OX угол α, есть касательная.

Поэтому наклон ($\operatorname{tg} \alpha$) касательной к кривой в некоторой ее точке M равен пределу, к которому стремится наклон ($\operatorname{tg}\beta$) секущей MM' при неограниченном приближении точки M' к точке M.

3°. ***Нахождение наклона касательной.*** Вернемся к примерам 3—7.

Пример 3 (продолжение). Наклон $\operatorname{tg}\beta$ секущей, которая проходит через точки $P(1;\ 1)$ и $Q[1+h;\ (1+h)^2]$ кривой, определяемой уравнением $y = x^2$, равен $2 + h$.

Для перехода от точки P к точке Q надо абсциссе 1 точки P дать приращение h. Если теперь это приращение h будет, непрерывно уменьшаясь, стремиться к нулю, то точка Q будет перемещаться по кривой $y = x^2$, неограниченно приближаясь к точке P. При этом наклон $2 + h$ секущей PQ будет стремиться к пределу 2:

$$\lim_{h\to 0} (2+h) = 2.$$

Следовательно, наклон $\operatorname{tg}\alpha$ касательной к кривой $y = x^2$ в точке $P(1;\ 1)$ равен 2.

Пример 4 (продолжение). Наклон $\operatorname{tg}\beta$ секущей, которая проходит через точки $P(a;\ a^2)$ и $Q\ [a+h;\ (a+h)^2]$ кривой, определяемой уравнением $y = x^2$, равен $2a + h$.

Для перехода от точки P к точке Q надо абсциссе a точки P дать приращение h. Если теперь это приращение h будет стремиться к нулю, то точка Q будет перемещаться по кривой $y = h^2$, неограниченно приближаясь к точке P. При этом наклон $2a + h$ секущей PQ будет стремиться к пределу $2a$:

$$\lim_{h\to 0} (2a+h) = 2a.$$

Следовательно, наклон $\operatorname{tg}\alpha$ касательной к кривой $y = x^2$ в точке $P(a;\ a^2)$ равен $2a$.

Пример 5 (продолжение). Наклон $\operatorname{tg}\beta$ секущей, которая проходит через точки P с абсциссой a и Q с абсциссой $a + h$, принадлежащие кривой, определяемой уравнением $y = x^2 + 2x$, равен $2a + h + 2$.

Так как

$$\lim_{h\to 0} [2a + h + 2] = 2a + 2,$$

то наклон $\operatorname{tg}\alpha$ касательной к кривой $y = x^2 + 2x$ в точке P с абсциссой a равен $2a + 2$.

Пример 6 (продолжение). Наклон $\operatorname{tg}\beta$ секущей, которая проходит через точки P с абсциссой a и Q с абсциссой $a + h$, принадлежащие кривой, определяемой уравнением $y = \sqrt{x}$, равен $\dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.

Так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

то наклон tg α касательной к кривой $y = \sqrt{x}$ в точке P с абсциссой a равен $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Пример 7 (продолжение). Наклон tg β секущей, которая проходит через точки P с абсциссой a и Q с абсциссой $a + h$, принадлежащие кривой, определяемой уравнением $y = \frac{1}{x}$, равен $-\frac{1}{a(a+h)}$.

Так как

$$\lim_{h \to 0} \left[-\frac{1}{a(a+h)}\right] = -\frac{1}{a^2},$$

то наклон tg α касательной к кривой $y = \frac{1}{x}$ в точке P с абсциссой a равен $-\frac{1}{a^2}$.

Общий случай. Теперь рассмотрим тот же вопрос в общем виде.

Найдем наклон tg α касательной к кривой, определяемой уравнением $y = f(x)$, в точке P этой кривой, имеющей абсциссу a.

Решение. Как мы установили (стр. 457), в этом общем случае

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Эта формула указывает, что для вычисления наклона касательной к кривой, определяемой уравнением $y = f(x)$, в точке P этой кривой, имеющей абсциссу a, надо найти:

1) Δy, т. е. разность $f(a + h) - f(a)$;

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. отношение $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$;

3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Используя результаты решения упражнений на странице 457, найти наклон касательной к кривым, определяемым уравнениями 1) — 3) в точке P с абсциссой a.

Ответы. 1) $3a^2$; $3(a-2)^2$; $6a^2$;

2) $-\frac{2}{(a-3)^2}$; $-\frac{6}{(a-3)^2}$, $-\frac{1}{(a-2)^2}$;

3) $\frac{1}{2\sqrt{a-3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

2. Найти наклон касательной к кривой, определяемой уравнением $y = x^2 - 4x$, в точке ее, абсцисса которой равна 3.

Ответ. 2.

3. В какой точке кривой, определяемой уравнением $y = 2x(1-x)$, касательная параллельна оси абсцисс?

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

4. В какой точке кривой, определяемой уравнением $y = \sqrt{2x}$, касательная наклонена к оси OX под углом в 45°?

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

5. При каких значениях переменной x касательная к кривой $y = x^3 - 12x + 3$ наклонена к оси абсцисс под тупым углом?

Ответ. При $-2 < x < 2$.

6. Найти наклоны касательных, проведенных к кривой $y = x^2 - 6x + 5$ в точках пересечения этой кривой с осью абсцисс.

Ответ. -4 и 4.

3. Геометрический смысл понятия скорости. Допустим, что точка совершает прямолинейное движение по закону:

$$(1) \qquad s = f(t).$$

1) Если $f(t)$ есть линейная функция, т. е. если

$$(2) \qquad s = at + b,$$

то в этом случае, как известно (гл. IV, § 5, п. 2), равным приращениям Δt независимой переменной t соответствуют равные приращения Δs функции s. Отсюда непосредственно следует, что приращения, которые приобретает путь s точки, движущейся по закону (2), за каждую секунду, равны между собой:

$$\Delta s = a(t+1) + b - at - b = a,$$

и что вообще приращения, которые приобретает путь s этой точки за один и тот же промежуток времени Δt, равны между собой:

$$\Delta s = a(t + \Delta t) + b - at - b = a \cdot \Delta t,$$

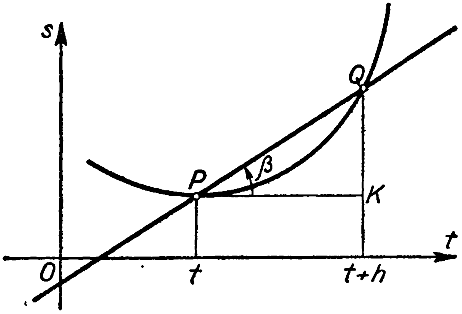
так что

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = a,$$

а это значит, что точка, совершающая прямолинейное движение по закону (2), имеет постоянную скорость a, т. е. что это движение является равномерным.

Прямая, которая служит графиком уравнения (2), выражающего закон изменения пути s в зависимости от времени t при равномерном движении, имеет угловой коэффициент, как раз равный скорости a этого движения.

2) Если уравнение (1) имеет график, изображенный на чертеже 134, то замена на участке (t; $t+h$) неравномерного движения по



Черт. 134

закону (1) равномерным движением состоит в замене дуги PQ графика отрезком PQ секущей. В самом деле, если движение происходит по закону, изображаемому прямой й, следовательно, выражаемому линейной функцией, то, как мы видели в пункте 1), оно является равномерным со скоростью, равной угловому коэффициенту этой прямой; но угловой коэффициент прямой PQ равен отношению $\frac{KQ}{PK}$, т. е. отношению

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h};$$

следовательно,

$$v_m=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}.$$

Если мы обозначим угол, составляемый секущей PQ с осью OX, через β, то найденный результат можно будет записать в виде:

$$v_m=\operatorname{tg}\beta.$$

3) Если теперь приращение h времени t будет уменьшаться, стремясь к нулю, то, как мы знаем, секущая PQ будет стремиться занять некоторое предельное положение, достигнув которого она будет уже называться касательной к графику в точке P; при этом угол β, составляемый секущей PQ с осью OX, также примет некоторое предельное значение α, а угловой коэффициент $\operatorname{tg}\beta$ секущей— предельное значение $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha;$$

следовательно, и $\lim\limits_{h\to 0} v_m = \operatorname{tg}\alpha$. Но $\lim\limits_{h\to 0} v_m = v$;

поэтому

$$v = \operatorname{tg}\alpha.$$

Мы нашли, что если точка совершает неравномерное прямолинейное движение по закону $s = f(t)$, то ее скорость v в данный момент t равна наклону $\operatorname{tg}\alpha$, который имеет касательная к графику уравнения $s = f(t)$ в его точке P, соответствующей абсциссе t.

§ 6. ЗАДАЧА О ВЫЧИСЛЕНИИ УСКОРЕНИЯ ДВИЖУЩЕЙСЯ ТОЧКИ

1. **Среднее ускорение при прямолинейном движении.** В примерах 1, 3, 6 (§ 5, п. 1) мы нашли, что если точка совершает прямолинейное движение по закону:

$$1)\ s = \frac{gt^2}{2},\quad 2)\ s = 2t^2 + 4t,\quad 3)\ s = \sqrt{t},$$

то ее скорость v в каждый данный момент t выражается формулой:

$$1)\ v = gt,\quad 2)\ v = 4t + 4,\quad 3)\ v = \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

т. е. является определяемой этой формулой функцией от времени t.

1°. Допустим, что скорость v прямолинейно движущейся точки изменяется по закону:

$$(1)\qquad v = 3t + 2.$$

Так как $v = 3t + 2$ есть линейная функция, то она обладает тем свойством, что равным приращениям Δt независимой переменной t соответствуют равные приращения Δv функции v. Отсюда непосредственно следует, что приращения, приобретаемые скоростью точки, движущейся по закону (1), за каждую секунду, равны между собой:

$$\Delta v = [3(t + 1) + 2] - [3t + 2] = 3,$$

и что вообще приращения, приобретаемые этой скоростью за один и тот же промежуток времени Δt, равны между собой:

$$\Delta v = [3(t + \Delta t) + 2] - [3t + 2] = 3 \cdot \Delta t.$$

Если при неравномерном движении приращения Δv, приобретаемые скоростью v движущейся точки за равные промежутки времени, равны между собой, то это движение называется равнопеременным (равноускоренным при $\Delta v > 0$ или равнозамедленным при $\Delta v < 0$), а постоянное приращение Δv, приобретаемое скоростью v при этом движении за каждую секунду, называется ускорением равнопеременного движения.

Если скорость v движения точки изменяется по закону:

$$v = at + b,$$

то это движение является равнопеременным и имеет ускорение a, так как

$$a(t + 1) + b - at - b = a.$$

2°. Теперь допустим, что скорость v прямолинейно движущейся точки изменяется по закону:

$$v = t^2. \tag{2}$$

В момент $t = 1$, т. е. по истечении 1 сек. от начала движения, точка будет иметь скорость 1, в момент $t = 2$ — скорость 4, в момент $t = 3$ — скорость 9, в момент $t = 4$ — скорость 16 (единиц скорости) и т. д. Отсюда следует, что за вторую секунду скорость получила приращение 3, за третью секунду — приращение 5, за четвертую секунду — приращение 7 и т. д. Всего за 3 сек., протекшие от момента $t = 1$ до момента $t = 4$, скорость получила приращение, равное 15 (единицам скорости).

Это приращение 15 скорость рассматриваемой точки получила, непрерывно увеличиваясь, за 3 сек., так что в среднем за каждую из этих 3 сек. (2-ю, 3-ю и 4-ю) эта скорость получила приращение, равное отношению $\frac{15}{3}$, т. е. 5 (единицам скорости). Иначе говоря, скорость рассматриваемой точки получила бы за те же 3 сек. то же приращение 15, если бы она в течение каждой из этих 3 сек. приобретала одно и то же среднее приращение 5, т. е. если бы эта точка двигалась равноускоренно с ускорением, равным 5 (единицам скорости в секунду).

Точно так же, если мы рассмотрим приращения $1{,}1^2 - 1^2$; $1{,}2^2 - 1{,}1^2$; $1{,}3^2 - 1{,}2^2$; $1{,}4^2 - 1{,}3^2$, которые приобретает скорость точки, движущейся по закону (2), за 1-ю, 2-ю, 3-ю и 4-ю десятые доли 2-й секунды, то найдем, что они неравны между собой:

$$0{,}21 < 0{,}23 < 0{,}25 < 0{,}27.$$

Но скорость рассматриваемой точки получила бы за те же 0,4 сек. то же окончательное приращение 0,27, если бы она в течение каждой из этих десятых долей 2-й сек. приобретала одно и то же среднее приращение, равное отношению $\frac{1{,}4^2 - 1^2}{4}$, т. е. 0,24 (единицам скорости), иначе говоря, если бы эта точка двигалась равноускоренно с ускорением, равным отношению среднего приращения 0,24 к промежутку времени 0,1, т. е. имеющим значение 2,4 (единицы скорости в секунду).

Определение 1. Если скорость v точки, совершающей неравномерное прямолинейное движение, за некоторый промежуток времени h (сек.) приобрела приращение Δv, то ускорение того равнопеременного движения, при котором эта скорость v могла бы за тот же промежуток времени h приобрести то же приращение Δv, называется средним ускорением неравномерного движения за промежуток времени h.

Найдем формулу для вычисления среднего ускорения a_m неравномерного движения за промежуток времени h (сек.)

Если скорость v точки, совершающей неравномерное движение, изменяется по закону

$$v = \varphi(t),$$

то приращение этой скорости Δv за промежуток времени h, следующий за моментом t, будет равно разности

$$\varphi(t+h) - \varphi(t).$$

Для того чтобы скорость v получила то же приращение Δv за тот же промежуток времени h при условии, если бы движение было равнопеременным, это движение должно было бы происходить с постоянным ускорением, равным отношению

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}.$$

Следовательно,

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}.$$

Например, если $\varphi(t) = t^2$, то

$$a_m = \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = 2t + h,$$

так что

при $t = 1$ $h = 3$, $a_m = 5$;
при $t = 1$ $h = 0{,}4$, $a_m = 2{,}4$;
при $t = 3$ $h = 0{,}1$, $a_m = 6{,}1$;
при $t = 2{,}5$ $h = 0{,}5$, $a_m = 5{,}5$.

2. Геометрический смысл понятия о среднем ускорении. Если уравнение $v = \varphi(t)$ имеет график, изображенный на чертеже 135, то замена на участке $(t, t+h)$ неравномерного движения равномерным движением состоит в замене дуги PQ графика отрезком PQ секущей. В самом деле, если изменение скорости происходит по закону, изображаемому прямой и, следовательно, выражаемому линейной функцией, то, как мы видели в пункте 1, оно является равнопеременным с ускорением, равным угловому коэффициенту этой прямой; но угловой коэффициент прямой PQ равен отношению $\frac{\overline{KQ}}{\overline{PK}}$, т. е. отношению

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h};$$

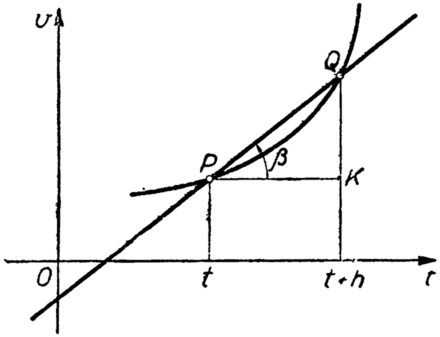
поэтому

$$a_m = \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}.$$

Если мы обозначим угол, составленный секущей PQ с осью OX через β, то эту формулу можно будет записать также в виде

$$a_m = \operatorname{tg} \beta.$$

3. Ускорение в данный момент. Теперь введем понятие об ускорении неравномерного движения в данный момент.



Черт. 135

Определение 2. Предел, к которому стремится среднее ускорение a_m точки, совершающей неравномерное движение, за промежуток времени Δt, следующий за моментом t, при условии, что Δt стремится к нулю, называется ускорением этой точки в данный момент t.

Следовательно, если известно, что точка, совершающая движение по закону $v = \varphi(t)$, имеет в данный момент t ускорение a, то это значит, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} a_m = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = a.$$

Всякий раз, как будет задана функция $\varphi(t)$, каждое значение которой есть значение скорости v, приобретенной движущейся точкой за время t, мы можем вычислить ускорение a этой точки в момент t, если найдем:

1) Δv, т. е. разность $\varphi(t + h) - \varphi(t)$;

2) $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, т. е. отношение $\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$;

3) $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, т. е. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$.

4. Геометрический смысл понятия об ускорении в данный момент. Выясним, какой геометрический смысл имеет ускорение a точки в данный момент t при ее движении по закону $v = \varphi(t)$.

Выше (п. 2) мы установили, что среднее ускорение a_m этой точки за промежуток времени h, следующий за моментом t, равно тангенсу угла β, который составляет с осью OX секущая PQ, проходящая через точки P и Q графика с абсциссами t и $t+h$.

Если теперь приращение h времени t будет уменьшаться, стремясь к нулю, то, как мы знаем, в пределе секущая PQ займет положение касательной к графику в точке P, угол β примет некоторое значение α, а $\operatorname{tg}\beta$ — значение $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\lim_{h\to 0}\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, и

$$\lim_{h\to 0}a_m=\operatorname{tg}\alpha. \quad \text{Но} \quad \lim_{h\to 0}a_m=a; \quad \text{поэтому} \quad a=\operatorname{tg}\alpha.$$

Итак, если точка совершает неравномерное прямолинейное движение по закону $v=\varphi(t)$, то ее ускорение a в данный момент t равно наклону $\operatorname{tg}\alpha$, который имеет касательная к графику уравнения $v=\varphi(t)$ в его точке P, соответствующей абсциссе t.

§ 7. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ОТ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

1. Понятие о производной функции. В результате рассмотрения:

1) задачи о нахождении скорости, которую имеет в данный момент t точка, совершающая прямолинейное движение по закону $s=f(t)$, 2) задачи о нахождении наклона касательной к кривой, определяемой уравнением $y=f(x)$, в ее точке с данной абсциссой a и 3) задачи о нахождении ускорения, которое имеет в данный момент t точка, совершающая прямолинейное движение по закону $v=\varphi(t)$, — мы пришли к выводу, что для решения этих задач надо выполнить 3 операции:

1) нахождение приращения, которое получает функция $f(x)$ в том случае, если независимая переменная x получает приращение h, т. е. разности

$$f(x+h)-f(x);$$

2) нахождение отношения этого приращения функции к вызвавшему его приращению h независимой переменной x, т. е. отношения

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h};$$

3) нахождение предела этого отношения при условии, если приращение h стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

К выполнению этих трех операций приводит решение ряда других задач механики, физики и химии, в которых требуется найти скорость изменения различных величин в данный момент. Каждая из этих величин изменяется по закону, определяемому некоторой функцией.

Для того чтобы решать и исследовать задачи, относящиеся к изменению величин, без отношения к тому, какой именно функцией выражается их изменение, в математике было установлено новое понятие, получившее название производная.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X (конечном или бесконечном). Исходя из некоторого значения x_0 независимой переменной x, дадим ему (положительное или отрицательное) приращение Δx, равное h, не выводящее его из промежутка X, так что и новое значение $x_0 + h$ принадлежит этому промежутку. Тогда значение $f(x_0)$ заменится новым значением $f(x_0 + h)$, т. е. получит приращение Δy, равное

$$f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Определение 1. Если существует предел отношения приращения Δy функции y к вызвавшему его приращению Δx независимой переменной x при условии, что приращение Δx стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

то этот предел называется производной от функции $f(x)$ по независимой переменной x при значении или в точке x_0.

Таким образом, производная функции $f(x)$ при данном значении x_0 независимой переменной x есть определенное число.

Если же производная функции $f(x)$ существует при каждом значении переменной x, принадлежащем промежутку X, то можно установить понятие о производной функции от функции $f(x)$.

Определение 2. Функция от независимой переменной x, каждое значение которой, соответствующее данному значению x_0 переменной x, есть производная функции $f(x)$ по переменной x при значении (в точке) x_0, называется производной функцией от функции $f(x)$ по независимой переменной x и имеет обозначение $f'(x)$.

В силу этого производная функции $f(x)$ по переменной x при ее значении (в точке) x_0 получает обозначение $f'(x_0)$.

Пользуясь этим понятием, мы можем теперь сказать, что 1) скорость v, которую имеет точка в каждый данный момент t при прямолинейном движении по закону $s = f(t)$, выражается значением производной функции $f'(t)$, соответствующим рассматриваемому значению переменной t; 2) наклон касательной к кривой $y = f(x)$ в ее точке с данной абсциссой x выражается значением производной функции $f'(x)$, соответствующим рассматриваемому значению переменной x; 3) ускорение a, которое имеет точка в каждый данный момент t при прямолинейном движении по закону $v = \varphi(t)$, выражается значением производной функции $\varphi'(t)$, соответствующим рассматриваемому значению переменной t.

Кратко эти предложения выражают так : 1) скорость v есть производная от пройденного пути s по времени t; 2) наклон $\operatorname{tg}\alpha$ касательной есть производная от ординаты y по абсциссе x; 3) ускорение a есть производная от скорости v по времени t.

В соответствии с этим вводят обозначения:

$$v = s_t'; \quad \operatorname{tg}\alpha = y_x'; \quad a = v_t'.$$

Операцию нахождения производной функции от данной функции называют дифференцированием данной функции.

В примерах 1—6 (§ 5) мы нашли, что

$$\left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt; \quad (2t^2 + 4t)' = 4t + 4; \quad \left(\frac{a^2}{t}\right)' = -\frac{a^2}{t^2}; \quad \left(\frac{2t+1}{t+3}\right)' = \frac{5}{(t+3)^2};$$

$$(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти производные функций:

1) $y = x^2 - 7x - 1$; 2) $y = 3x^2 - x^3$; 3) $y = \frac{2x-3}{1-x}$.

Ответы. 1) $2x - 7$; 2) $6x - 3x^2$; 3) $-\frac{1}{(1-x)^2}$.

2. Найти среднюю скорость изменения функции $y = 2x^2$ при изменении переменной x от 3 до 4 и скорость ее изменения в точках $x = 3$ и $x=4$.

Ответ. 14; 12 и 16.

3. Найти скорость изменения функции $y = 1 - 3x + 3x^2$ при x, равном 1, $\frac{1}{2}$, 0.

Ответ. 3, 0, —3.

4. Точка движется прямолинейно по закону:

$$s = at^3 + bt + c.$$

Зная, что начальное расстояние точки равно 1 *м*, скорость к концу первой секунды движения равна 14 $\frac{м}{сек}$, а ускорение к концу второй секунды равно 48 $\frac{м}{сек^2}$, найти значения постоянных a, b, c.

Ответ. $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$.

2. Производная постоянной. Пусть функция $F(x)$ определена в некотором промежутке равенством

$$F(x) = c,$$

где c есть данное число, т. е. сохраняет в этом промежутке постоянное значение c; для нахождения ее производной последовательно выполняем операции:

1) $F(x + h) - F(x) = c - c = 0$;

2) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{0}{h}=0$;

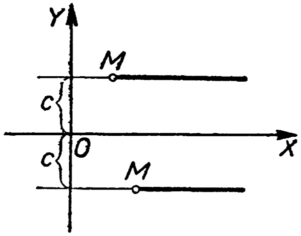
3) $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0} 0=0.$

Итак, если функция сохраняет в данном промежутке постоянное значение c, то ее производная в этом промежутке равна нулю. Это предложение кратко выражают так: производная постоянной равна нулю — и записывают в виде

$$c'=0.$$

Как мы знаем (§ 6, п. 2), производная функции $F(x)$ для данного значения переменной x равна наклону касательной к кривой, определяемой уравнением $y=F(x)$, в точке с абсциссой x. Поэтому тот факт, что производная функции $F(x)$, сохраняющей в данном промежутке постоянное значение c, равна нулю, в переводе на геометрический язык означает, что наклон касательной $\operatorname{tg}\alpha$ к линии $y=F(x)$, т. е. $y=c$, в каждой точке этого промежутка равен нулю.

Это действительно так: линия $y=c$ есть прямая, параллельная оси OX и отстоящая от нее на расстоянии c (черт. 136); касательная к этой линии в каждой ее точке совпадает с ней и, следовательно, образует с осью OX угол α, равный нулю; следовательно, и $\operatorname{tg}\alpha$ во всех точках этой прямой равен нулю.



Черт. 136

Обратим внимание на то, что справедливо и обратное предложение:

Если функция, определенная в некотором промежутке, имеет в каждой его точке производную, равную нулю, то эта функция сохраняет во всем промежутке одно и то же значение, т. е. сводится в нем к постоянной.

Доказательство этого предложения основано на так называемой теореме о среднем значении, принадлежащей Лагранжу и излагаемой в курсах математического анализа. Мы примем приведенное обратное предложение без доказательства.

3. Производная линейной функции. Пусть функция $F(x)$ определена в некотором промежутке равенством

$$F(x) = ax + b,$$

где a и b — числа и $a \neq 0$, т. е. является в этом промежутке линейной функцией; для нахождения ее производной последовательно выполняем операции:

1) $F(x+h) - F(x) = a(x+h) + b - ax - b = ah$;

2) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{ah}{h} = a$;

3) $F'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} a = a.$

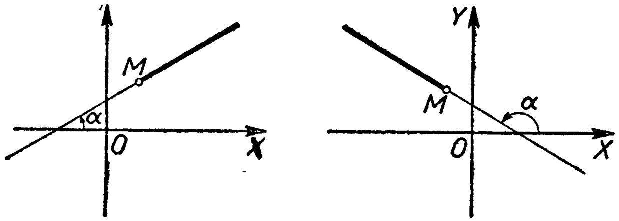
Итак, если функция является в данном промежутке линейной функцией, то ее производная в этом промежутке равна коэффициенту при независимой переменной, т. е.

$$(ax+b)' = a.$$

Например:

$$x' = 1; \quad (2x+5)' = 2; \quad \left(\frac{x}{2} - 3\right)' = \frac{1}{2}; \quad (6-3x)' = -3.$$

Тот факт, что производная линейной функции $ax + b$ для каждого значения переменной x равна коэффициенту a, имеет тот геометрический смысл, что наклон касательной $\operatorname{tg} \alpha$ к линии $y = ax + b$ в каждой ее точке равен a. Это действительно имеет место: линия $y = ax + b$ есть прямая; поэтому касательная к этой линии в каждой ее точке совпадает с ней (черт. 137) и, следовательно, имеет тот же наклон a, который имеет линия, так что тангенс угла α, образуемого касательной в каждой точке линии $y = ax + b$, равен a, т. е.



Черт. 137

$$\operatorname{tg} \alpha = a.$$

Факту, выражаемому равенством $(ax + b)' = a$, можно дать еще такое толкование.

Если при движении некоторой точки ее скорость v подчиняется закону

$$v = v_0 + at,$$

где v_0 — начальная скорость точки, а t — промежуток времени, протекший от начала движения, то ускорение движения точки будет равно a (§ 6, п. 3) и, следовательно, будет иметь постоянное значение.

4. **Производная трехчлена второй степени.** Пусть функция $F(x)$ определена в некотором промежутке равенством

$$F(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — числа и $a \neq 0$, т. е. является в этом промежутке целой рациональной функцией второй степени; для нахождения ее производной последовательно выполняем операции:

1) $F(x+h) - F(x) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c - ax^2 - bx - c =$
$= 2axh + ah^2 + bh = (2ax + b)h + ah^2$;

2) $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = 2ax + b + ah$;

3) $F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = 2ax + b.$

Итак,

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b.$$

Примеры.

1) $(x^2 + 1)' = 2x$; $(3x^2 - 5x)' = 6x - 5$;

$$\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + 3\right)' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4};$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x - 6\right)' = x + 3.$$

2) Скорость v точки, совершающей свободное падение, т. е. движущейся по закону

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

в данный момент t равна производной пути s по времени t; поэтому

$$v = s_t' = \left(\frac{gt^2}{2}\right)_t' = gt.$$

К этому результату мы и пришли в § 5, п. 1.

3) Скорость v точки, совершающей движение по закону

$$s = at^2 + bt + c,$$

равна производной пути s по времени t, т. е.

$$v = s_t' = 2at + b,$$

а ускорение w точки при том же движении равно производной скорости по времени, т. е.

$$w = v_t' = 2a.$$

4) Наклон касательной к параболе $y = ax^2$ в каждой ее точке с абсциссой x равен y_x', т. е. $2ax$.

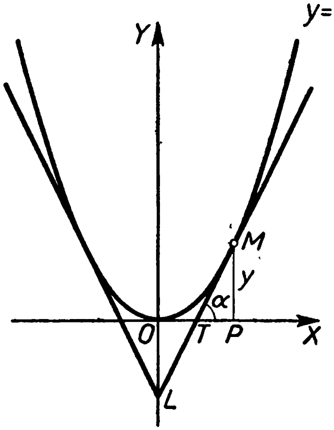
Из этого результата сделаем два вывода:

1. Из треугольника MPT (черт. 138) находим, что

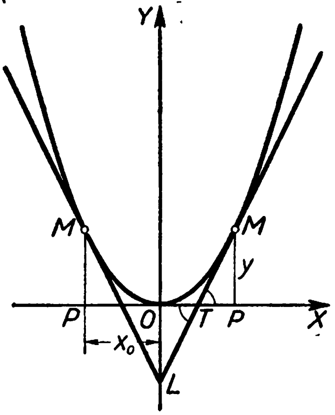
$$TP = \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{ax^2}{2ax} = \frac{x}{2},$$

так что T есть середина отрезка OP; поэтому для того, чтобы построить касательную к параболе $y = ax^2$ в ее точке M, достаточно разделить пополам отрезок OP и середину его T соединить с точкой касания M.

2. Если касательная к параболе $y = ax^2$ в точке M с абсциссой x_0 (черт. 139) пересекает ось ОУ в точке L, то из равенства тре-



Черт. 138



Черт. 139

угольников MPT и LOT ($TP = OT$, $<MTP = <OTL$) находим, что $OL = PM = ax_0^2$. Но при $a > 0$ точка L может находиться только на отрицательной полуоси оси ОУ; поэтому ордината точки L, в которой касательная к параболе $y = ax^2$ в ее точке M с абсциссой x_0 пересекает ось ОУ, равна $-ax_0^2$, так что эта касательная имеет уравнение

$$y = 2ax_0 x - ax_0^2.$$

Обратно, если из точки L оси ОУ, имеющей ординату b, где $b < 0$, проведена касательная LM к параболе $y = ax^2$, где $a > 0$, то из тех же равных треугольников MPT и LOT найдем, что абсцисса x_0 точки касания M удовлетворяет равенству $ax^2_0 = -b$, откуда следует, что $x_0 = \mp\sqrt{-\frac{b}{a}}$, где — соответствует левой, а + правой ветви параболы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Написать уравнение касательной к кривой $y = \frac{1}{3}x^2$ в ее точке, имеющей абсциссу 3.

Ответ. $y = 2x - 3$.

2. Написать уравнения касательных, проведенных к кривой $y = x^2$ из точки L, имеющей координаты $(0; -9)$.

Ответ. $y = -6x - 9$, $y = 6x - 9$.

3. При каких значениях параметра m прямая $y = mx - 4$ пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках?

Решение. Для того чтобы это требование выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы прямая $y = mx - 4$ была расположена внутри угла, образуемого двумя касательными, проведенными из точки $(0; -4)$ к параболе $y = x^2$. Так как касание происходит соответственно в точках с абсциссами -2 и 2, то касательные имеют наклоны -4 и 4. Поэтому угловой коэффициент m прямой должен удовлетворять требованию

$$-4 < m < 4.$$

5. Производная дробной линейной функции. Если функция $F(x)$ определена в некотором промежутке (не содержащем, конечно, числа $-\frac{d}{c}$) равенством

$$F(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где a, b, c, d — числа, причем c и d не равны одновременно нулю, то для нахождения ее производной последовательно выполняем операции:

1) $F(x+h) - F(x) = \frac{a(x+h)+b}{c(x+h)+d} - \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{adh - bch}{(cx+ch+d)(cx+d)}$;

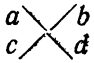
2) $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{ad - bc}{(cx+ch+d)(cx+d)}$;

3) $F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}$.

Итак,

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

Для того чтобы запомнить эту формулу, обратим внимание на то, что производная дробной линейной функции $\frac{ax+b}{cx+d}$ есть дробь, знаменатель которой равен квадрату знаменателя данной функции, а числитель получится, если коэффициенты a, b, c, d расположить в таблицу



в том порядке, в котором они находятся в дроби, и, перемножая их накрест, вычесть из первого произведения ad второе произведение bc*.

---

* Т. е. найти определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

В частности,

$$\left(\frac{b}{cx+d}\right)' = -\frac{bc}{(cx+d)^2}; \quad \left(\frac{m}{x}\right)' = -\frac{m}{x^2}.$$

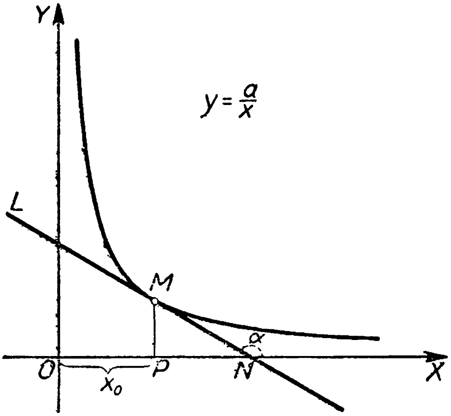
Примеры.

1) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\frac{1}{x-3}\right)' = -\frac{1}{(x-3)^2}$,

$\left(\frac{2x+1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\frac{4x-3}{x+1}\right)' = \frac{7}{(x+1)^2}$.

2) Наклон касательной к гиперболе $y = \frac{a}{x}$ в каждой ее точке с абсциссой x равен y'_x, т. е. $-\frac{a}{x^2}$; при $x = x_0$ этот наклон равен $-\frac{a}{x_0^2}$.

Поэтому, если при $a > 0$ рассматриваемая касательная пересекает ось OX в точке N (черт. 140) и образует с ней угол α, то



Черт. 140

$\angle MNP = 180° - \alpha$, $\operatorname{tg} \angle MNP = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{x_0^2}$; поэтому для случая $x_0 > 0$ из треугольника MNP находим, что

$$PN = MP \cdot \operatorname{ctg} \angle MNP = \frac{a}{x_0} \cdot \frac{x_0^2}{a} = x_0,$$

так что точка P есть середина отрезка ON; следовательно, для того чтобы построить касательную к гиперболе $y = \frac{a}{x}$ в ее точке M с абсциссой x_0, где $x_0 > 0$, достаточно опустить перпендикуляр MP из точки M на ось OX и отложить на этой оси в положительном направлении отрезок PN, равный отрезку OP, а затем соединить точку N с точкой M; прямая LMN и будет искомой касательной.

Эта касательная пересечет ось OY в точке L, ординату b которой мы найдем из треугольника OLN, в котором PM есть средняя линия:

$$OL = 2 \cdot PM = 2 \cdot \frac{a}{x_0} = \frac{2a}{x_0}.$$

Следовательно, касательная LMN к гиперболе $y = \frac{a}{x}$ в ее точке M с абсциссой x_0 имеет уравнение

$$y = -\frac{a}{x_0^2} \cdot x + \frac{2a}{x_0}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Написать уравнение касательной к кривой $y = \frac{4}{x}$ в ее точке, имеющей абсциссу 2.

Ответ. $y = -x + 4$.

2. Написать уравнение касательной к кривой $y = \frac{4}{x-3}$ в ее точке, имеющей абсциссу 5.

Ответ. $y = -x + 7$.

6. Производная функции x^m. Рассмотрим следующие случаи:

1°. Если m есть положительное целое число, то, опираясь на известную из алгебры формулу:

$a' - b^m = (a - b) \cdot (a^{m-1} + a^{m-2} b + a^{m-3} b^2 + \ldots + a^2 b^{m-3} + a b^{m-2} + b^{m-1})$*,

последовательно находим:

1) $(x+h)^m - x^n = h[(x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2} \cdot x + \ldots + (x+h)x^{m-2} + x^{m-1}]$;

2) $\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = (x+h)^{m-1} + (x+h)^{m-2} \cdot x + \ldots + (x+h)x^{m-2} + x^{m-1}$;

3) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = x^{m-1} + x^{m-2} \cdot x + \ldots + x \cdot x^{m-2} + x^{m-1} =$
$= m \cdot x^{m-1}$.

Следовательно, в случае 1°

$$(x^m)' = m x^{m-1}. \qquad (1)$$

2°. Если m есть отрицательное целое число, то, полагая $m = -n$, где n положительное целое число, последовательно находим:

1) $(x+h)^m - x^m = (x+h)^{-n} - x^{-n} = \frac{1}{(x+h)^n} - \frac{1}{x^n} =$
$= \frac{1}{(x+h)^n x^n}[x^n - (x+h)^n]$;

---

* Впрочем, ее можно проверить, находя сумму членов геометрической прогрессии, заключенную во вторые скобки.

$$2)\ \frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\frac{1}{(x+h)^n\,x^n}\cdot\frac{x^n-(x+h)^n}{h}=-\frac{1}{(x+h)^n\,x^n}\cdot\frac{(x+h)^n-x^n}{h};$$

$$3)\ \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=-\frac{1}{x^n}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)^n}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h};$$

отсюда, принимая во внимание вывод, сделанный в случае 1°, получаем:

$$(x^m)'=-\frac{1}{x^n}\cdot\frac{1}{x^n}\cdot n\cdot x^{n-1}=\frac{(-n)\cdot x^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{(-n)}{x^{n+1}}=\frac{m}{x^{1-m}}=m\cdot x^{m-1},$$

т. е. опять приходим к формуле (1).

При $m=-1$ мы по этой формуле получаем:

$$(x^{-1})'=(-1)\cdot x^{-2};$$

переписав это равенство в виде

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2},$$

мы узнаем результат, полученный выше.

3°. Если m есть положительное или отрицательное дробное число или даже иррациональное число, то и в этом случае формула (1) верна. Это устанавливается в курсах математического анализа.

Для случая $m=\frac{1}{2}$ мы выше доказали ее.

В самом деле, на страницах 453 и 459 было найдено, что

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

т. е. что

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}.$$

Формулу (1) можно так выразить словами: производная степени x^m независимой переменной x равна показателю m этой степени, умноженному на степень той же переменной с показателем, на единицу меньшим.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь формулой (1), найти производные следующих функций:

1) x^5; $\frac{1}{x^3}$; $x^{0,2}$; $\frac{1}{x^{0,5}}$;

2) $\sqrt[3]{x}$; $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$;

3) $\sqrt[3]{x^2}$; $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$; $(\sqrt[5]{x})^3$; $(\sqrt[4]{x})^{\frac{3}{2}}$.

2. Найти наклон касательной к кривой, определяемой уравнением $y = x^{\frac{3}{2}}$, в ее точке с абсциссой 4.

Ответ. ± 3 (кривая — полукубическая парабола — имеет две ветви, симметричные по отношению к оси OX).

3. Найти скорость и ускорение, которые имеет в момент $t = 4$ точка, совершающая прямолинейное движение по закону:

$$s = \sqrt{t^3}.$$

Ответ. 3 и $\frac{3}{8}$.

7. Производная функции $\sqrt{ax+b}$. Если функция $F(x)$ определена в некотором промежутке равенством

$$F(x) = \sqrt{ax+b},$$

где a и b — числа, то для нахождения ее производной последовательно выполняем операции:

1) $F(x+h) - F(x) = \sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}$;

2) $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h}$;

3) $$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}\right)\left(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}\right)}{h\left(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}.$$

Итак,

$$\left(\sqrt{ax+b}\right)' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}},$$

т. е. производная квадратного корня из линейной функции равна дроби, числитель которой есть производная этой линейной функции, а знаменатель — удвоенный данный квадратный корень.

Примеры.

1) $\left(\sqrt{3x+5}\right)' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+5}}$.

2) Наклон касательной к кривой $y = \sqrt{x-5}$ в точке ее, имеющей абсциссу 9, равен значению, которое имеет производная $\dfrac{1}{2\sqrt{x-5}}$ функции $\sqrt{x-5}$ при $x = 9$:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{x-5}}\right)_{x=9} = \frac{1}{4}.$$

3) Объяснить, почему касательная к кривой $y=\sqrt{x-5}$ в точке ее, имеющей абсциссу 9, параллельна касательной к кривой $y=\sqrt{x}$ в точке ее, имеющей абсциссу 4.

4) Написать уравнение касательной к кривой $y=\sqrt{x-5}$ в точке ее, имеющей абсциссу 9.

Решение. Касательная есть прямая, ввиду чего ее уравнение имеет вид

$$y = ax + b.$$

Угловой коэффициент a этой прямой мы нашли: $a=\frac{1}{4}$ (упражнение 2).

Для нахождения свободного члена b примем во внимание, что прямая проходит через точку (9; 2):

$$2 = \frac{1}{4}\cdot 9 + b;\ b = -\frac{1}{4}.$$

Итак, касательная имеет уравнение

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}.$$

§ 8. НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ СУММЫ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО ДВУХ ФУНКЦИЙ

В настоящем параграфе мы установим ряд правил, с помощью которых можно находить производные функции от функции, представляющей собой сумму, разность, произведение или частное двух функций.

Допустим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют для значения x производные $f'(x)$ и $g'(x)$.

1. Производная суммы функций. Если $F(x)=f(x)+g(x)$, то

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

По условию функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют для значения x производные $f'(x)$ и $g'(x)$. Это значит, что если x имеет определенное значение, а $h \to 0$, то слагаемое $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ имеет предел $f'(x)$, а слагаемое $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ — предел $g'(x)$.

Но если каждое из двух слагаемых имеет предел при $h\to 0$, то при том же условии и сумма их $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ имеет предел, причем предел суммы равен сумме пределов слагаемых. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f'(x) + g'(x),$$

т. е.
$$F'(x)=f'(x)+g'(x),$$
или, короче,
$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x). \tag{1}$$

Мы пришли к следующему выводу: если каждая из двух функций от одной и той же независимой переменной имеет производную для определенного значения этой переменной, то и их сумма имеет производную для того же значения независимой переменной, причем производная суммы функций равна сумме производных слагаемых функций.

Очевидно, что это предложение тем же методом может быть доказано для любого числа слагаемых:
$$[f(x)+g(x)+k(x)]'=f'(x)+g'(x)+k'(x).$$

Если мы для краткости обозначим каждую из функций от одной и той же независимой переменной одной буквой, то представим найденную формулу в более удобном для обозрения и запоминания виде:
$$(f+g+k)' = f'+g'+k'.$$

Примеры.

1) $\left(\frac{x^2-2x+10}{x+2}\right)' = \left(x-4+\frac{18}{x+2}\right)' = 1-\frac{18}{(x+2)^2}.$

2) $\left(\frac{x-5}{(x-1)(x+3)}\right)' = \left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{2}{(x+3)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}.$

3) $(\sqrt{x}+1)' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$

4) $(\sqrt{2x+5}+\sqrt{1-x})' = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.$

2. Производная произведения функций. Если $F(x) = f(x)\cdot g(x)$, то
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)}{h}-\frac{f(x)\cdot g(x)}{h}.$$

Для того чтобы можно было использовать существование производных $f'(x)$ и $g'(x)$, представим правую часть этого равенства в виде суммы:
$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x+h)+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x).$$

Однако и этот вид правой части еще не позволяет найти ее предел при $h\to 0$, так как мы не можем утверждать, что множитель $f(x+h)$ при $h\to 0$ имеет предел. Поэтому заменим этот множитель суммой
$$f(x)+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h.$$

Тогда последняя сумма примет вид:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot f(x)+\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x)+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h.$$

Таким образом, окажется, что переменная $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ есть сумма трех слагаемых, из которых первое при определенном значении x и $h\to 0$ имеет предел $g'(x)\cdot f(x)$, второе — предел $f'(x)\cdot g(x)$, а третье — предел 0. Но если каждое из трех слагаемых имеет предел при $h\to 0$, то при том же условии и сумма их имеет предел, причем предел суммы равен сумме пределов слагаемых. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=g'(x)\cdot f(x)+f'(x)\cdot g(x),$$

т. е.

$$F'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),$$

или, короче,

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x). \tag{2}$$

Мы пришли к следующему выводу: если каждая из двух функций от одной и той же независимой переменной имеет производную для определенного значения этой переменной, то и их произведение имеет производную для того же значения независимой переменной, причем производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой.

Следствие. Если одна из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ для всех значений переменной x (принадлежащих области определения этой функции) сохраняет постоянное значение a, то, принимая во внимание, что производная постоянной равна нулю, последовательно получаем:

$$[f(x)\cdot g(x)]'=[a\cdot g(x)]'=a'\cdot g(x)+a\cdot g'(x)=0\cdot g(x)+a\cdot g'(x)=$$
$$=a\cdot g'(x),$$

т. е.

$$[a\cdot g(x)]'=a\cdot g'(x).$$

Эта формула выражает такое правило: постоянный множитель может быть вынесен за знак производной.

В случае если функция $F(x)$ представляет собой произведение нескольких функций $f(x)$, $g(x)$, $k(x)$, имеющих для значения x производные $f'(x)$, $g'(x)$, $k'(x)$, то, применяя только что доказанную теорему, последовательно найдем:

$$[fgk]'=[(fg)k]'=(fg)'k+(fg)\cdot k'=$$
$$=(f'g+fg')\cdot k+(fg)\cdot k'=f'gk+fg'k+fgk'.$$

Очевидно, что это предложение может быть распространено на любое число сомножителей:

$$(fgklm)'=f'gklm+fg'klm+fgk'lm+fgkl'm+fgklm',$$

т. е. производная произведения нескольких функций от одной и той же независимой переменной равна сумме произведений, полученных посредством замены каждого из сомножителей рассматриваемого произведения его производной*.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти производные функций:

1) $(2+3x)(4-7x)$; $(x^2-5x+1)(1-2x)$;

2) $(x-6)\sqrt{x}$; $(1-x^2)\sqrt{x+1}$;

3) $\frac{x^2}{1+x}$; $\frac{\sqrt{x}}{3x+5}$.

Указание. Представить дроби в виде произведений.

3. Производная степени. Если $F(x) = [f(x)]^n$, где m — целое положительное число, большее, чем 1, то, принимая во внимание, что

$$[f(x)]^m = \underbrace{f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)}_{m\ \text{раз}},$$

согласно выведенному в пункте 2 правилу последовательно находим:

$$\underbrace{F'(x) = [f(x)^m]' = [f(x)\cdot f(x)\cdot\ \ldots\ \cdot f(x)]'}_{m\ \text{раз}} =$$

$$= \underbrace{f'(x)\cdot f^{m-1}(x) + f'(x)\cdot f^{m-1}(x) + \ldots + f'(x)\cdot f^{m-1}(x)}_{m\ \text{раз}} =$$

$$= m\cdot f^{m-1}(x)\cdot f'(x),$$

т. е.

$$[f^m(x)]' = m\cdot f^{m-1}(x)\cdot f'(x),$$

или кратко:

$$(f^m)' = mf^{m-1}\cdot f'. \tag{3}$$

Мы пришли к следующему выводу: если функция имеет производную для определенного значения независимой переменной, то и целая положительная степень этой функции имеет производную для того же значения независимой переменной, причем производная степени функции равна показателю этой степени, умноженному на степень той же функции с показателем, на единицу меньшим, и на производную основания.

Примеры.

1) $[(2x-3)^5]' = 5\cdot(2x-3)^4\cdot 2 = 10(2x-3)^4$.

2) $[(8-x)^3]' = 3\cdot(8-x)^2\cdot(-1) = -3(8-x)^2$.

3) $[(x-4x^2)^2]' = 2\cdot(x-4x^2)\cdot(1-8x)$.

4) $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^5\right]' = 5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{5}{x^6}$.

5) $(\sqrt{x^5})' = [(\sqrt{x})^5]' = 5\cdot(\sqrt{x})^4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$.

---

* Для доказательства применяется метод математической индукции.

Обобщение. Выведенная выше формула указывает правило для нахождения целой положительной степени функции $f(x)$. Но, как доказывается в курсах математического анализа, она справедлива и в тех случаях, когда показатель данной степени функции $f(x)$ есть любое действительное число.

Выше мы доказали справедливость формулы (3) для частных случаев.

Действительно, если мы представим формулы

$$\left(\frac{1}{cx+d}\right)' = -\frac{c}{(cx+d)^2} \text{ и } \left(\sqrt{ax+b}\right)' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}},$$

непосредственно выведенные в § 7, пп. 5 и 7, соответственно в виде

$$[(cx+d)^{-1}]' = (-1)\cdot(cx+d)^{-2}\cdot c$$

и

$$\left[(ax+b)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\cdot(ax+b)^{-\frac{1}{2}}\cdot a,$$

то увидим, что их можно было получить на основании формулы (3).

Примеры.

1) $\left[\frac{1}{(x-4)^5}\right]' = [(x-4)^{-5}]' = (-5)(x-4)^{-6}\cdot 1 = -\frac{5}{(x-4)^6}$;

2) $\left(\frac{5}{1-3x^2}\right)' = [5(1-3x^2)^{-1}]' = 5\cdot(-1)(1-3x^2)^{-2}\cdot(-6x) = \frac{30x}{(1-3x^2)^2}$;

3) $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = [(1+x^2)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

4. Производная целой рациональной функции. Если $F(x)$ есть целая рациональная функция переменной x, т. е. имеет вид

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

то, применяя выведенные выше формулы для нахождения производной суммы, произведения (постоянной на функцию), степени и постоянной, последовательно получим:

$$\begin{aligned}&(a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}x + a_m)' = \\ &= (a_0x^m)' + (a_1x^{m-1})' + (a_2x^{m-2})' + \ldots + (a_{m-1}x)' + a'_m = \\ &= a_0(x^m)' + a_1(x^{m-1})' + a_2(x^{m-2})' + \ldots + a_{m-1}(x)' + a_m' = \\ &= ma_0x^{m-1} + (m-1)a_1x^{m-2} + (m-2)a_2x^{m-3} + \ldots + a_{m-1}.\end{aligned}$$

Примеры.

1) $(5x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 3x + 1)' = 20x^3 - 6x^2 + 12x - 3$.

2) $\left(\frac{3}{2}x^6 - \frac{2}{15}x^5 + x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 4\right)' = 9x^5 - \frac{2}{3}x^4 + 3x^2 - \frac{5}{2}x$.

3) $(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$.

4) $[(1-2x)(1+3x)]' = (1 + x - 6x^2)' = 1 - 12x$.

5. Производная частного двух функций. 1. Пусть $F(x)=\frac{1}{g(x)}$ и функция $g(x)$ для значения x имеет производную $g'(x)$ и для него, а также для промежутка $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, не равна нулю. Тогда, давая этому значению x приращение h, не выводящее его за пределы промежутка $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$, мы получим равенство:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right]=\frac{g(x)-g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}=$$

$$=-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}.$$

Для того чтобы можно было найти предел правой части, заменим множитель $g(x+h)$ суммой

$$g(x)+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot h.$$

Тогда правая часть равенства примет вид:

$$-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot h}\cdot\frac{1}{g(x)}.$$

Таким образом, окажется, что переменная $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ есть произведение трех сомножителей, из которых первый при определенном значении x и $h\to0$ имеет предел — $g'(x)$, второй — предел $\frac{1}{g(x)+g'(x)\cdot0}$, т. е. $\frac{1}{g(x)}$, а третий, не зависящий от h, сохраняет свое значение $\frac{1}{g(x)}$.

Следовательно,

$$\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=-g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2},$$

т. е.

$$F'(x)=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2},$$

или, короче,

(4) $$\left[\frac{1}{g(x)}\right]'=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\ *.$$

---

* К этому выводу можно также прийти, находя производную степени $[g(x)]^{-1}$ по формуле (3) (стр. 482).

Примеры.

1) $\left(\frac{1}{ax+b}\right)' = -\frac{(ax+b)'}{(ax+b)^2} = -\frac{a}{(ax+b)^2};$

2) $\left(\frac{1}{ax^2+bx+c}\right)' = -\frac{(ax^2+bx+c)'}{(ax^2+bx+c)^2} = -\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^2};$

3) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{(\sqrt{x})'}{x} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}};$

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{ax+b}}\right)' = -\frac{(\sqrt{ax+b})'}{ax+b} = -\frac{a}{2(ax+b)\sqrt{ax+b}};$

5) $\left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{x^{2m}} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}};$

6) $\left[\frac{1}{(ax+b)^m}\right]' = -\frac{[(ax+b)^m]'}{(ax+b)^{2m}} = -\frac{m(ax+b)^{m-1}\cdot a}{(ax+b)^{2m}} =$

$= -\frac{m\cdot a}{(ax+b)^{m+1}}.$

УПРАЖНЕНИЯ

Найти производные функций:

1) $\frac{1}{x(1-x)}$; $\frac{1}{(x-3)(x+5)}$;

2) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$; $\frac{1}{(2x+3)\sqrt{x}}$;

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

2. Если $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ и $g(x)$ для рассматриваемого значения x не равно нулю, то, представляя дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ в виде произведения $f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$, мы можем, пользуясь формулой для нахождения производной произведения и только что выведенной формулой (4), немедленно получить следующий результат:

$$F'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)}\right]' =$$

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} - f(x)\cdot\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2},$$

или, короче,

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Для запоминания этой формулы ей следует придать вид:

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}.$$

Мы пришли к следующему выводу: если каждая из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет производную для определенного значения переменной x и если функция $g(x)$ для этого значения переменной отлична от нуля, то и их частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную для того же значения переменной x, причем производная частного этих функций есть дробь, числителем которой служит разность между произведением производной делимого на делитель и произведением делимого на производную делителя, а знаменателем — квадрат делителя*.

Примеры.

1) $$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{(ax+b)'(cx+d)-(ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} = \frac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2} =$$
$$= \frac{ad-bc}{(cx+d)^2};$$

2) $$\left(\frac{ax^2+bx+c}{cx+d}\right)' = \frac{(ax^2+bx+c)'(cx+d)-(ax^2+bx+c)(cx+d)'}{(cx+d)^2} =$$
$$= \frac{(2ax+b)(cx+d)-(ax^2+bx+c)c}{(cx+d)^2} = \frac{acx^2+2adx+bd-c^2}{(cx+d)^2};$$

3) $$\left[\frac{x-3}{(x+5)^2}\right]' = \frac{(x+5)^2-(x-3)\cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} = \frac{(x+5)-2(x-3)}{(x+5)^3} = \frac{11-x}{(x+5)^3};$$

4) $$\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1)-\sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти производные следующих функций:

1) $\frac{x}{1+x}$; $\frac{x-1}{x+1}$; $\frac{5x+2}{1-3x}$;

2) $\frac{x}{1+x^2}$; $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; $\frac{1-2x^2}{2-x^2}$;

3) $\frac{(1+x)^3}{(1-x)^4}$; $\frac{(3+x^2)^3}{(2-x^3)^2}$;

4) $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$; $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

2. Найти наклоны касательных к кривой $y = \frac{x}{1+x^2}$ в ее точках, имеющих абсциссы -1 и 1; написать уравнения этих касательных.

Ответ. $y = -\frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$.

---

* К этому выводу можно также прийти, находя производную произведения $f(x)\cdot g(x)^{-1}$.

3. **Найти скорость, которую приобретает в момент $t = 4$ точка, прямолинейно движущаяся по закону:**

$$s = \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}.$$

Ответ. $v = \frac{1}{2}$.

§ 9. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

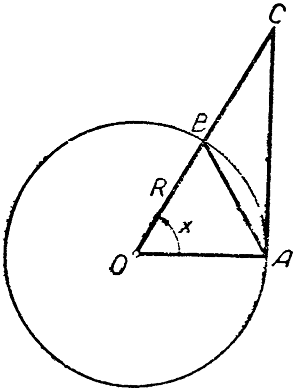
1. **Предел отношения** $\frac{\sin x}{x}$ **при** $x \to 0$. Для того чтобы найти производные тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$, необходимо предварительно доказать следующую лемму и основанную на ней важную теорему.

Лемма. Если x есть радианное значение дуги AB и при этом

$$0 < x < \frac{\pi}{2},$$

то

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$



Черт. 141

Доказательство. Проведя хорду AB и касательную AC к окружности в точке A (до пересечения ее с продолжением радиуса OB в точке C) (черт. 141), получим треугольники AOB и AOC; сопоставляя их площади с площадью сектора AOB, найдем, что площадь $\triangle AOB <$ площади сектора $AOB <$ площади $\triangle AOC$, так как $\triangle AOB$ составляет часть сектора AOB, а этот сектор составляет часть $\triangle AOC$.

Обозначая радиус окружности через R, последовательно находим:

площадь $\triangle AOB = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin x$;

площадь сектора $AOB = \frac{1}{2} R^2 \cdot x$;

площадь $\triangle AOC = \frac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg} x$.

Поэтому

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x.$$

Отсюда и приходим к неравенствам

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Теорема. Если x есть радианное значение дуги x, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство. 1) Сначала допустим, что

$$0<x<\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Тогда в соответствии с леммой будут иметь место неравенства

$$\sin x<x<\operatorname{tg} x. \tag{2}$$

Отсюда, принимая во внимание, что при условии (1) $\sin x$ и $\cos x$ имеют положительные значения, последовательно получим:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x};$$

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x;$$

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x. \tag{3}$$

Но $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, а $\sin\frac{x}{2}$ при условии (1) есть положительная правильная дробь; поэтому $\sin^2\frac{x}{2}<\sin\frac{x}{2}$ и, следовательно,

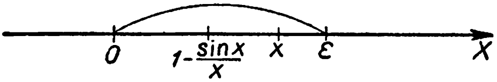
$$1-\cos x<2\sin\frac{x}{2}<2\cdot\frac{x}{2},$$

так что окончательно

$$1-\cos x<x.$$

Возвращаясь к неравенствам (3), заменим их неравенствами

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x \text{ (черт. 142).} \tag{4}$$



Черт. 142

Теперь допустим, что переменная x стремится к нулю. Так как x, по условию, принимает только положительные значения, то это значит, что, как бы мало ни было положительное число ε, существует такое значение x_1 переменной x, начиная с которого все значения переменной x принадлежат промежутку $(0, \varepsilon)$. Но, принимая во внимание неравенства (4), мы имеем право утверждать, что и все значения переменной $1-\frac{\sin x}{x}$, соответствующие значениям переменной x, принадлежащим промежутку $(0, \varepsilon)$, также будут принадлежать этому промежутку, т. е. будет иметь место неравенство

$$(5)\qquad 0<1-\frac{\sin x}{x}<\varepsilon.$$

А так как неравенство (5) будет выполняться для всякого сколь угодно малого положительного числа ε, то равенство

$$(6)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

при сделанном допущении (1) справедливо.

2) Если переменная x, стремясь к 0, будет принимать отрицательные значения, то и в этом случае равенство (6) будут иметь место, так как

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin(-x)}{(-x)},$$

и, следовательно,

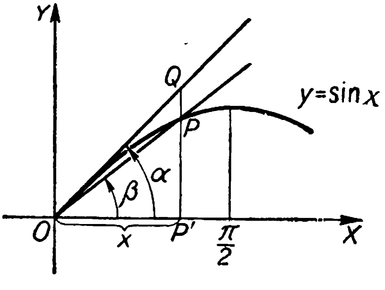
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\lim_{(-x)\to 0}\frac{\sin(-x)}{(-x)},$$

а последний предел, как доказано в пункте 1, равен 1.

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл. Если на дуге кривой $y=\sin x$, соответствующей промежутку $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, мы возьмем точку P и через начало координат O и точку P проведем секущую OP, то она будет составлять с осью OX угол POP' (черт. 143). Обозначая абсциссу точки P через x, а угол POP' через β, находим:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\overline{P'P}}{\overline{OP'}}=\frac{\sin x}{x}.$$

Допустим, что точка P, перемещаясь по дуге OP, будет неограниченно приближаться к точке O, т. е. стремиться к совпадению с ней. Тогда абсцисса x точки P будет, очевидно, стремиться к нулю. Как при этом будет изменяться угол β?



Черт. 143

Ответ на этот вопрос как раз и дает доказанная теорема. В самом деле, из того факта, что при $x\to 0$ отношение $\frac{\sin x}{x}$ имеет определенный предел, именно число 1, следует, что при условии $x \to 0$ будут стремиться к тому же пределу 1 и $\operatorname{tg} \beta$; но $1 = \operatorname{tg} 45^\circ$; следовательно, угол β будет стремиться к углу 45°, а секущая OP в пределе займет положение биссектрисы OQ координатного угла XOY. Мы установили, что дуга OP синусоиды в точке O имеет касательную и что этой касательной служит биссектриса OQ прямого угла XOY.

Пример. Правильный n-угольник, вписанный в круг с радиусом, равным 1, имеет сторону $2\sin\frac{\pi}{n}$ и, следовательно, периметр $2n\sin\frac{\pi}{n}$. Если n пробегает последовательность 3, 4, 5, ..., то периметр n-угольника стремится, возрастая, к длине окружности, т. е. к числу 2π; следовательно, отношение периметра n-угольника к 2π, т. е. отношение $\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$, возрастая, стремится к пределу 1.

2. Производные функций $\sin x$ и $\cos x$. Теперь обратимся к нахождению производных функций $\sin x$ и $\cos x$:

1) $\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x =$

$= \cos x \cdot \sin h - \sin x (1 - \cos h) = \cos x \cdot \sin h - 2\sin x \cdot \sin^2\frac{h}{2}$;

2) $\dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \dfrac{\sin h}{h} - \sin x \left(\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \cdot \dfrac{h}{2}$;

3) если $h \to 0$, то и $\frac{h}{2} \to 0$; поэтому

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} -$$

$$- \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} = \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot 1 \cdot 0 = \cos x.$$

Итак,

$$(1) \qquad (\sin x)' = \cos x.$$

Далее:

1) $\cos(x+h) - \cos x = \cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x =$

$= -\sin x \cdot \sin h - \cos x (1 - \cos h) = -\sin x \cdot \sin h - 2\cos x \cdot \sin^2\frac{h}{2}$;

2) $\dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x \dfrac{\sin h}{h} - \cos x \left(\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \cdot \dfrac{h}{2}$;

3) если $h \to 0$, то и $\frac{h}{2} \to 0$; поэтому

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} -$$

$$-\cos x \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{2} = -\sin x \cdot 1 - \cos x \cdot 1 \cdot 0 = -\sin x.$$

Итак,

$$(2) \qquad (\cos x)' = -\sin x.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти производную функции $\sin^3 x$.

Решение. Пользуясь формулой

$$[f(x)^m]' = m \cdot f^{m-1}(x) \cdot f'(x),$$

находим:

$$(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x.$$

2. Найти производную функции $\sin^m x$, где m — целое положительное число.

Ответ. $m \cdot \sin^{m-1} x \cdot \cos x$.

3. Найти производную функции $\cos^m x$, где m — целое положительное число.

Ответ. $-m \cdot \cos^{m-1} x \cdot \sin x$.

4. Найти производную функции

$$\sin^4 x - 2\sin^3 x + 3\sin^2 x - 4\sin x + 5.$$

Ответ. $4\sin^3 x \cdot \cos x - 6\sin^2 x \cdot \cos x + 6\sin x \cdot \cos x - 4\cos x$.

5. Найти скорость v и ускорение a, которые точка, прямолинейно движущаяся по закону $s = \sin t$, имеет в момент $t = t_0$.

Ответ. $v = [s_t']_{t=t_0} = \cos t_0$; $a = [v_t']_{t=t_0} = -\sin t_0$.

6. Найти наклон, который имеет касательная к кривой $y = \cos x$ в точке ее с абсциссой:

1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) π.

Ответ. 1) 0; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) -1; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 0.

7. Найти производные функций:

1) $5x^3 \sin x$; 2) $\sin x \cdot \cos x$; 3) $\frac{\sin x}{x}$; 4) $\frac{x^2}{\cos x}$; 5) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

8. Найти производные функций:

1) $(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)$; 2) $\frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x}$.

9. Найти производные функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Указание. Представить эти функции в виде отношений функций $\sin x$ и $\cos x$.

3. Производные функций $\sin mx$ и $\cos mx$. Для нахождения этих производных надо почти дословно повторить вычисления, приведенные в пункте 2.

Именно:

1) $\sin m(x+h) - \sin mx = \sin(mx+mh) - \sin mx = \sin mx \times$
$\times \cos mh + \cos mx \cdot \sin mh - \sin mx = \cos mx \cdot \sin mh -$
$-\sin mx\,(1-\cos mh) = \cos mx \cdot \sin mh - 2\sin mx \cdot \sin^2\frac{mh}{2}$;

2) $$\frac{\sin m(x+h)-\sin mx}{h} = \cos mx\,\frac{\sin mh}{h} - 2\sin mx\,\frac{\sin^2\frac{mh}{2}}{h} =$$
$$= m\cdot\cos mx\,\frac{\sin mh}{mh} - \sin mx\left(\frac{\sin\frac{mh}{2}}{\frac{mh}{2}}\right)^2\cdot\frac{m^2h}{2};$$

3) если $h \to 0$, то также $mh \to 0$ и $\frac{mh}{2} \to 0$; поэтому

$$(\sin mx)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin m(x+h)-\sin mx}{h} =$$
$$= m\cdot\cos mx\cdot 1 - \sin mx\cdot 1\cdot 0 = m\cdot\cos mx.$$

Итак,

(3) $$(\sin mx)' = m\cdot\cos mx.$$

Точно так же найдем, что

(4) $$(\cos mx)' = -\,m\sin mx.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти производные функций:

1) $\sin 3x$; 2) $\cos\frac{x}{2}$; 3) $\sin\frac{3}{5}x$; 4) $\cos\frac{3x}{5}$.

Ответ. 1) $3\cos 3x$; 2) $-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$; 3) $\frac{3}{5}\cos\frac{3}{5}x$; 4) $-\frac{3}{5}\sin\frac{3x}{5}$.

2. Найти производные функций $\sin 2x$ и $\cos 2x$ из формул для синуса и косинуса угла $2x$.

3. Найти производные функций $\sin 3x$ и $\cos 3x$ из формул для синуса и косинуса угла $3x$.

4. Доказать, что если верны формулы:

$$(\sin mx)' = m\cos mx \text{ и } (\cos mx)' = -\,m\cdot\sin mx,$$

то верны также формулы:

$[\sin(m+1)x]' = (m+1)\cos(m+1)x$ и $[\cos(m+1)x]' = (m+1)\sin(m+1)x.$

Указание. Найти $\sin(mx+x)$ и $\cos(mx+x)$ и воспользоваться формулами для вычисления производной суммы и произведения.

5. Пользуясь леммой, установленной в упражнении 4, доказать справедливость формул для производных функций $\sin mx$ и $\cos mx$ методом полной математической индукции.

4. Производные функций $\sin(mx+n)$ и $\cos(mx+n)$.

1) Так как

$$\sin(mx+n) = \sin mx\cos n + \cos mx\sin n,$$

то

$$[\sin(mx+n)]' = m\cdot\cos mx\cdot\cos n - m\cdot\sin mx\cdot\sin n =$$
$$= m(\cos mx\cdot\cos n - \sin mx\cdot\sin n) = m\cdot\cos(mx+n).$$

Итак,

(5) $$[\sin(mx+n)]' = m\cdot\cos(mx+n).$$

2) Так как

$$\cos(mx+n) = \cos mx\cdot\cos n - \sin mx\cdot\sin n,$$

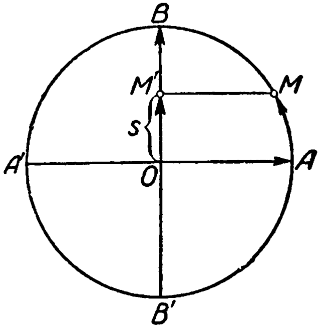
то

$$[\cos(mx+n)]' = -m\cdot\sin mx\cdot\cos n - m\cdot\cos mx\cdot\sin n =$$
$$= -m(\sin mx\cdot\cos n + \cos mx\cdot\sin n) = -m\cdot\sin(mx+n).$$

Итак,

(6) $$[\cos(mx+n)]' = -m\cdot\sin(mx+n).$$

Обратим внимание на то, что множитель m в формулах 3 и 4 и в формулах 5 и 6 представляет собой не что иное, как производную аргументов mx и $mx+n$.



Черт. 144

Пример 1. Если некоторая точка M будет перемещаться по окружности O (черт. 144) в положительном направлении с постоянной скоростью, равной $\frac{\pi}{6}$ дуговых радианов в секунду, то ее проекция M' на диаметр $B'B$, перпендикулярный к диаметру AA', будет совершать простые гармонические колебания по закону:

$$s = R\sin\frac{\pi}{6}t,$$

где t — время, протекшее от начала движения точки M', s — путь, пройденный ею за время t, т. е. отклонение точки M' от начального положения O, а R — радиус окружности.

Поэтому скорость v движения точки M' будет изменяться по закону:

$$v = s'_t = R\cdot\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t,$$

а ускорение a этого движения — по закону:

$$a = v'_t = -R\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi}{6}t.$$

Следовательно, скорость v точки M' в моменты $t = 0, 3, 6, 9, 12,$ будет соответственно иметь значения:

$$\frac{\pi}{6}R,\ 0, -\frac{\pi}{6}R,\ 0, \frac{\pi}{6}R,$$

а ускорение ее a в те же моменты — значения:

$$0, -\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 R, 0, \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 R, 0.$$

Так как скорость равномерного движения точки M по окружности равна $\frac{\pi}{6}$ дуговых радианов в секунду, то эта точка в моменты $t = 0, 3, 6, 9, 12$, будет занимать положение точек A, B, A', B', A; ввиду этого точка M' будет занимать в те же моменты положение точек O, B, O, B', O.

Таким образом, точка M', выйдя в момент $t = 0$ из положения O со скоростью $\frac{\pi}{6}R$ и ускорением 0, через 3 сек. придет в положение B, в котором она будет иметь скорость 0 и ускорение $-\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 R$; при наличии нулевого значения своей скорости и отрицательного значения своего ускорения точка M' повернет назад и будет двигаться по направлению к точке O; теперь в положении O движущаяся точка будет иметь отрицательную скорость $-\frac{\pi}{6}R$ и ускорение 0, ввиду чего будет продолжать перемещаться в отрицательном направлении OB'; в положении B' точка M' будет иметь скорость 0, т. е. остановится, но положительное ускорение $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 R$ заставит ее вновь двигаться в положительном направлении и вернуться в положение O, в котором она опять будет иметь скорость $\frac{\pi}{6}R$ и ускорение 0. Так последовательно приобретаемые точкой M' в положениях O, B, O, B', O скорости и ускорения заставят ее совершать простые гармонические колебания около точки O, имеющие амплитуду (размах) R и частоту $\frac{\pi}{6}$.

Так как

$$a = -R\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \sin\frac{\pi}{6}t, \quad s = R\cdot\sin\frac{\pi}{6}t,$$

то

$$a = -\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 s,$$

т. е. при гармоническом колебательном движении ускорение, а потому и сила пропорциональны перемещению s движущейся точки и имеют направление, обратное этому перемещению.

Примеры таких сил в физике и технике весьма многочисленны; к ним относятся: действия пружин, оказывающие сопротивление давящему на них грузу, пропорциональное смещению из положения равновесия; крутильные колебания тонких нитей, сопротивление которых скручиванию пропорционально самому скручиванию; малые колебания маятников и пр.

Пример 2. Конец спиральной проволочной пружины, растягиваемой подвешенным к ней грузом, может совершать колебания вверх и вниз. Положение этого конца в любой момент легко выразить уравнением; именно, если время полного качания составляет $\frac{1}{2}$ сек., а наибольшее смещение (относительно положения равновесия) равно 10 *см*, то колебания конца пружины выразятся так: $s = 10\ \sin 4\pi t$, где s обозначает отклонение груза вверх или вниз от положения равновесия.

Скорость v колебания пружины будет изменяться по закону:

$$v = 40\,\pi\cos 4\pi t,$$

а ускорение — по закону:

$$a = -\ 160\pi^2\cdot\sin 4\pi t = -\ 16\pi^2\cdot 10\sin 4\pi t = -\ 16\pi^2 s.$$

В моменты $t = 0,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2}$ сек. величины s, v, a будут иметь следующие значения:

t	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$
s	0	10	0	-10	0
v	40π	0	-40π	0	40π
a	0	$-160\pi^2$	0	$160\pi^2$	0

Пример 3. Гармоническое колебание дано уравнением

$$s = 10\sin(4t - 0{,}3)\ \text{см},$$

где t — время в секундах. Скорость и ускорение колебания изменяется по законам:

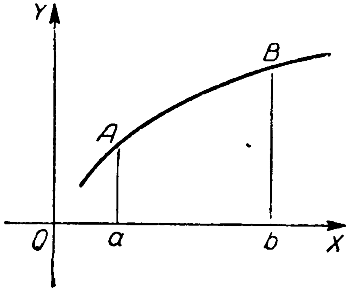
$$v = 40\cos(4t - 0{,}3),\quad a = -\ 160\sin(4t - 0{,}3) = -\ 16s.$$

Точка начинает колебаться, исходя из положения $s = 10\sin(-0{,}3) = -\ 10\sin 0{,}3$, т. е. находясь на расстоянии $-\ 10\sin 0{,}3$ от положения равновесия; в этот момент ($t = 0$) она имеет скорость $40\cos 0{,}3$ и ускорение $160\sin 0{,}3$. В момент $t = 0{,}3 : 4 = 0{,}075$ она имеет скорость 40 и ускорение 0 и дальше совершает колебания около этого положения.

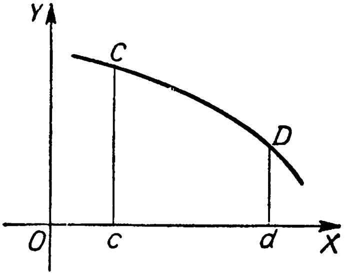
§ 10. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ

С понятием о возрастании и убывании функций мы уже встречались неоднократно.

Вернемся к этим понятиям. Если кривая, служащая графиком функции $y = f(x)$, на некотором своем участке AB (черт. 145 а), соответствующем промежутку определения (a, b) этой функции, поднимается вверх, то это происходит, очевидно, по той причине, что при возрастании независимой переменной x в промежутке (a, b) ординаты функции $f(x)$ также возрастают; иначе говоря, в этом случае с увеличением независимой переменной x увеличивается также и функция y, т. е. переменные x и y изменяются «в одном и том же направлении».



Черт. 145 а



Черт. 145 б

Если график функции $y = f(x)$ на некотором своем участке CD (черт. 145 б) опускается, то это происходит потому, что при возрастании независимой переменной x в промежутке (c, d), которому соответствует участок CD графика, ординаты функции $f(x)$ убывают; иначе говоря, в этом случае с увеличением независимой переменной x функция y уменьшается, т. е. переменные x и y изменяются «в разных направлениях».

Определение. Если функция $f(x)$ определена в промежутке (a, b) и если для каждых двух значений x' и x'' переменной x, принадлежащих этому промежутку, 1) из неравенства $x' < x''$ следует неравенство $f(x') < f(x'')$, то говорят, что функция $f(x)$ возрастает в промежутке (a, b), 2) из неравенства $x' < x''$ следует неравенство $f(x') > f(x'')$, то говорят, что функция $f(x)$ убывает в промежутке (a, b).

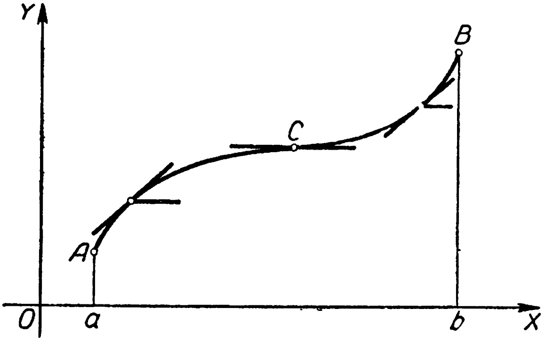
Если о функции известно, что она возрастает или убывает в данном промежутке, то говорят, что она монотонно изменяется в этом промежутке, и называют ее монотонной функцией.

1. Геометрические признаки. Рассматривая тот участок AB кривой (черт. 146), на котором она поднимается вверх, мы замечаем, что касательные к этой кривой в каждой точке образуют с осью OX вообще острые углы, а в отдельных точках — там, где они параллельны оси OX, — углы, равные нулю.

Поэтому для каждого из углов, составленных этими касательными с осью OX, выполняется неравенство:

$$\operatorname{tg} \alpha \geqslant 0.$$

Отсюда заключаем, что если рассматриваемая кривая AB есть часть графика некоторой функции $y = f(x)$, соответствующая промежутку (a, b), то производная $f'(x)$ этой функции вообще имеет в промежутке (a, b) положительное значение и лишь для отдельных его значений равна нулю. Но часть AB кривой все время поднимается вверх и, значит, служит изображением возрастающей функции. Следовательно, мы пришли к выводу, что если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b) и имеющая в нем производную $f'(x)$, возрастает в этом промежутке, то производная $f'(x)$ вообще имеет в промежутке (a, b) положительное значение и лишь для отдельных принадлежащих ему значений равна нулю.



Черт. 146

Легко прийти к выводу, что должно иметь место и обратное предложение. В самом деле, если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), имеет для каждого значения этого промежутка положительную производную, то это означает, что касательные к кривой, служащей графиком функции $f(x)$ в промежутке (a, b), в каждой ее точке образуют с осью OX острые углы, а это, как показывает наблюдение, имеет место на тех участках кривой, на которых она поднимается вверх и которые, следовательно, служат частью графика функции, возрастающей в определенном промежутке. Поэтому мы приходим к заключению, что рассматриваемая функция $f(x)$ возрастает в промежутке (a, b).

К этим выводам мы пришли из чисто геометрических соображений, но они могут быть строго доказаны. Выполним это.

2. Аналитические признаки.

Теорема 1. Если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), имеет в этом промежутке производную $f'(x)$ и возрастает в нем, то производная $f'(x)$ вообще имеет в промежутке (a, b) положительное значение и лишь для отдельных его значений равна нулю.

Доказательство. Пусть x_0 есть какое-либо определенное значение переменной x, принадлежащее промежутку (a, b). Дадим значению x_0 такое приращение h, которое приводит к новому значению $x_0 + h$ переменной x, принадлежащему тому же промежутку (a, b). Из того факта, что функция $f(x)$ имеет в промежутке (a, b) производную $f'(x)$, следует, что переменная

$$(1) \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

зависящая от h, при $h \to 0$ стремится к определенному пределу, который мы условились обозначать через $f'(x_0)$.

По условию функция $f(x)$ возрастает в промежутке (a, b). Это значит (определение на стр. 496), что отношение (1) как при $h > 0$, так и при $h < 0$ имеет положительное значение. Поэтому если приращение h будет стремиться к нулю, то как бы оно ни приближалось к нулю — только справа или только слева, или справа и слева, — все равно переменная (1) будет при своем изменении сохранять положительное значение. Но из этого мы вправе заключить, что предел $f'(x_0)$ переменной (1) есть положительное число или нуль.

Так как x_0 есть произвольно выбранное значение переменной x из промежутка (a, b), то этот вывод относится к каждому из значений этого промежутка.

Остается доказать, что значение 0 производная $f'(x)$ может получать лишь для отдельных, или, как говорят, изолированных, точек промежутка (a, b). Но это следует из того, что если бы производная $f'(x)$ сохраняла значение 0 не для отдельных точек, а для какого-либо промежутка (α, β), составляющего часть промежутка (a, b), то это означало бы (§ 7, п. 2), что функция $f(x)$ в промежутке (α, β) сохраняет постоянное значение, а не возрастает, что противоречило бы данному условию. Следовательно, этого не может быть, и теорема доказана полностью.

Этот теоретический вывод наглядно иллюстрируется чертежом 146, с рассмотрения которого мы и начали все рассуждение.

Теорема 2. Если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), имеет в этом промежутке производную $f'(x)$ и убывает в нем, то производная $f'(x)$ вообще имеет в промежутке (a, b) отрицательное значение и лишь для отдельных его значений равна нулю.

Доказательство проводится точно так же, как доказательство теоремы 1, но к требуемому выводу приходим на том основании, что отношение (1) как при $h > 0$, так и при $h < 0$ имеет отрицательное значение.

Теорема 3 (выражающая признак возрастания функции в данном промежутке). Если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), имеет в этом промежутке производную $f'(x)$, которая сохраняет в нем положительное значение, то функция $f(x)$ возрастает в промежутке (a, b).

Доказательство (способом от противного). Допустим, что при заданных условиях функция $f(x)$ не возрастает в промежутке (a, b).

Тогда возможны следующие случаи:

1. Функция $f(x)$ убывает во всем промежутке (a, b) или в какой-либо части (α, β) этого промежутка.

Но если бы это имело место, то в силу теоремы 2 (условия которой при допущении 1 выполнялись бы) оказалось бы, что в промежутке (a, b) имеет место соотношение $f'(x) \leqslant 0$, а не неравенство $f'(x) > 0$, как требует условие теоремы.

В силу возникшего противоречия допущение 1 необходимо отвергнуть.

2. Функция $f(x)$ сохраняет во всем промежутке (a, b) или в какой-либо части (α, β) этого промежутка постоянное значение.

Но при этом допущении оказалось бы, что во всем промежутке (a, b) или в его части (α, β) имеет место соотношение $f'(x) = 0$, а не неравенство $f'(x) > 0$, как требует условие задачи. Поэтому и допущение 2 приходится отвергнуть.

Остается принять, что при заданных условиях функция $f(x)$ во всем промежутке (a, b) возрастает.

Теорема 4 (выражающая признак убывания функции в данном промежутке). Если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), имеет в этом промежутке производную $f'(x)$, которая сохраняет в нем отрицательное значение, то функция $f(x)$ убывает в промежутке (a, b).

Доказательство проводится точно так же, как доказательство теоремы 3, но с заменой допущений «не возрастает» и «убывает» допущениями «не убывает» и «возрастает» и соотношений $f'(x) \leqslant 0$ и $f'(x) > 0$ соотношениями $f'(x) \geqslant 0$ и $f'(x) < 0$.

Обратим внимание на то, что теоремы 3 и 4 остаются в силе, если производная $f'(x)$ вообще имеет в промежутке (a, b) соответственно положительное или отрицательное значение и лишь для отдельных его значений равна нулю.

В самом деле, если производная $f'(x)$ обращается в нуль, например, для значений α и β $(\alpha < \beta)$, лежащих внутри промежутка (a, b), то, разбивая промежуток (a, b) на промежутки

$$(a, \alpha), \quad (\alpha, \beta), \quad (\beta, b),$$

мы на основании теорем 3 и 4 будем иметь право утверждать, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) в каждом из этих промежутков и, следовательно, во всем промежутке (a, b) (черт. 147).

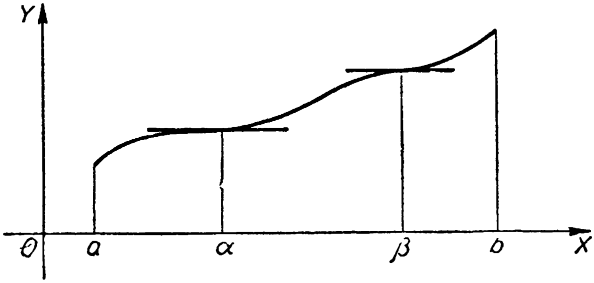
Примеры.

1. Производная линейной функции $ax + b$ равна постоянной a. Следовательно, при $a > 0$ эта функция во всем промежутке ее определения $(-\infty \ldots +\infty)$ возрастает, а при $a < 0$ — убывает.

2. Производная трехчлена второй степени $ax^2 + bx + c$ равна двучлену первой степени $2ax + b$. Решая неравенства $2ax + b > 0$ и $2ax + b < 0$, убеждаемся в том, что

1) если $a > 0$, то при $x < -\frac{b}{2a}$ трехчлен убывает, а при $x > -\frac{b}{2a}$ он возрастает;

2) если $a < 0$, то при $x < -\frac{b}{2a}$ трехчлен возрастает, а при $x > -\frac{b}{2a}$ он убывает.



Черт. 147

В точке $-\frac{b}{2a}$ трехчлен обращается в нуль; эта точка делит ось OX на промежутки $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$, в каждом из которых трехчлен изменяется монотонно.

К этим выводам мы пришли с помощью других рассуждений при рассмотрении графика функции $y = ax^2 + bx + c$ (гл. IV, § 6, п. 2).

3. Производной функции $\frac{1}{x}$ служит функция $-\frac{1}{x^2}$ (§ 7, п. 5). Очевидно, что эта производная во всей области определения функции $\frac{1}{x}$, т. е. в промежутках $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, не содержащих числа 0, имеет только отрицательное значение. Поэтому в каждом из указанных промежутков функция $\frac{1}{x}$ убывает.

К этому выводу мы пришли с помощью других рассуждений при рассмотрении графика функции $y = \frac{1}{x}$ (гл. IV, § 7, пп. 2, 3).

4. Производной функции $\sqrt{x}$ служит функция $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Функция $y = \sqrt{x}$ определена для всех неотрицательных значений переменной x ($x \geqslant 0$), но ее производная существует только для всех положительных значений переменной x ($x > 0$), при которых эта

производная имеет положительные значения. Поэтому в промежутке $(0, +\infty)$, не содержащем числа 0, функция $\sqrt{x}$ возрастает.

К этому выводу мы пришли при помощи других рассуждений при рассмотрении графика функции $y = \sqrt{x}$ (гл. I, § 2, п. 5).

§ 11. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ ФУНКЦИЙ

1. Общее понятие. Допустим, что кривая, изображенная на чертеже 148, представляет собой график некоторой функции $y = f(x)$.

Из этого чертежа мы заключаем, что функция $f(x)$:

1) определена и непрерывна в некотором промежутке (a, b);

2) в промежутках (a, c), (d, e), (f, g), (k, b), составляющих части промежутка (a, b), — возрастает;

3) в промежутках (c, d), (e, f), (g, k), также составляющих части промежутка (a, b), — убывает;

4) при значениях c, e, g независимой переменной x, или, как говорят, в точках c, e, g, — переходит от возрастания к убыванию, а в точках d, f, k — переходит от убывания к возрастанию;

5) во всех точках, кроме точек g и k, имеет производную.

Обратим внимание на то, какой особенностью обладает функция $f(x)$ в тех точках, где она переходит от возрастания к убыванию или от убывания к возрастанию.

Очевидно, что когда функция $f(x)$ переходит, например, в точке c от возрастания к убыванию, то в этой точке c она принимает значение $f(c)$, большее, чем в точках, расположенных слева и справа от точки c на достаточно близком расстоянии от нее, т. е. в точках, принадлежащих некоторому достаточно малому промежутку $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, окружающему точку c.

Точно так же, когда функция $f(x)$ переходит, например, в точке d от убывания к возрастанию, то в этой точке d она принимает значение $f(d)$, меньшее, чем в точках, расположенных слева и справа от точки d на достаточно близком расстоянии от нее, т. е. в точках, принадлежащих некоторому достаточно малому промежутку $(d - \varepsilon, d + \varepsilon)$, окружающему точку d.

Ввиду этого, если функция при некотором значении α независимой переменной переходит от возрастания к убыванию и, следовательно, имеет в некотором промежутке $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, окружающем значение α, наибольшее значение, то говорят, что функция для значения α, или в точке α, имеет максимум.

Если же функция при некотором значении β независимой переменной переходит от убывания к возрастанию и, следовательно, имеет в некотором промежутке $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$, окружающем значение β, наименьшее значение, то говорят, что функция $f(x)$ для значения β, или в точке β, имеет минимум.

Таким образом, максимум функции в точке α есть наибольшее из значений, принимаемых функцией в промежутке

$(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$, окружающем точку α, а минимум функции в точке β есть наименьшее из значений, принимаемых функцией в промежутке $(\beta - \varepsilon,\ \beta + \varepsilon)$, окружающем точку β* .

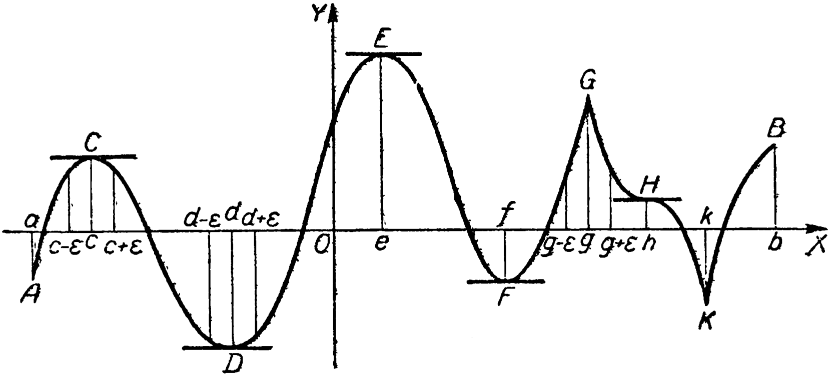
Для обозначения максимума или минимума существует и объединяющий их термин — экстремум** .

После этих разъяснений мы можем сформулировать следующее определение.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке α 1) максимум или 2) минимум, если точку α можно окружить промежутком $(\alpha - \varepsilon,\ \alpha + \varepsilon)$, обладающим тем свойством, что для всех отличных от α значений переменной x, принадлежащих этому промежутку, выполняется неравенство

$$1)\ f(x) < f(\alpha), \quad 2)\ f(x) > f(\alpha).$$

2. Признаки существования максимума или минимума. Вернемся к чертежу 148. Проследим за тем, как ведет себя касательная к графику в тех его точках C, D, E, F, G, K, абсциссам которых c,



Черт. 148

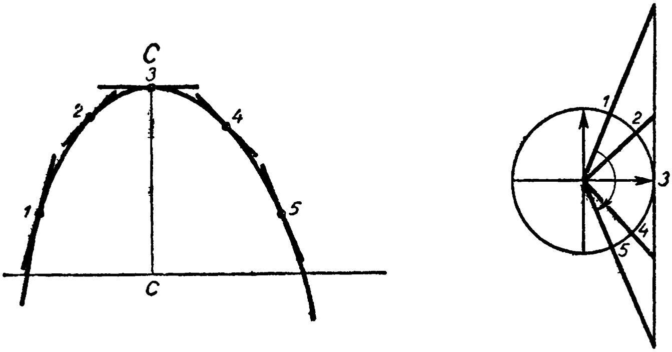
d, e, f, g, k соответствуют максимумы или минимумы функции. Легко заметить, что в первых четырех точках (C, D, E, F) касательные к графику параллельны оси OX, а в пятой и шестой точках G и K касательная к графику перпендикулярна к этой оси. Чем же объясняется это различие, в чем его причина?

Внимательно присмотревшись к графику, мы обратим внимание на то, что если точка касания, перемещаясь по графику, будет приближаться, скажем, к точке C слева, а затем, перейдя через точку C, начнет удаляться от нее, то касательная в перемещающейся точке будет составлять с осью OX сначала все убывающий острый угол α, в точке C — угол α, равный нулю, а после перехода через точку C — все убывающий тупой угол α. Можно сказать, что касательная будет совершать вращение в отрицательном направлении, переходя из I четверти в IV (черт. 149). Но тогда наклон касательной $\operatorname{tg}\alpha$ будет, очевидно, принимать сначала все убывающие положительные значения, затем — значение 0 и после этого — все убывающие отрицательные значения.

---

* На латинском языке слова maximum и minimum означают «наибольшее» и «наименьшее» (значение).

** На латинском языке слово extremum означает «крайнее» (значение).



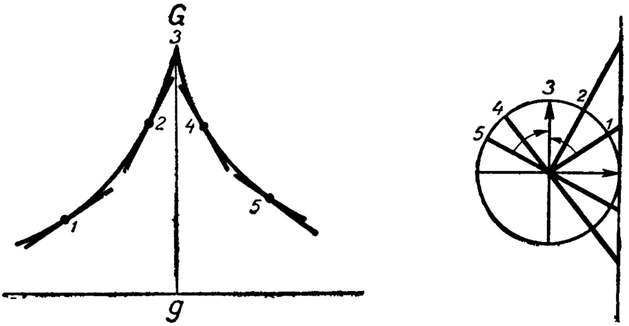
Черт. 149

Очевидно, что этот вывод относительно поведения касательной вблизи точки C полностью относится к поведению касательной вблизи точки E.

Но он легко может быть распространен и на поведение касательной вблизи точек D и F: при приближении к этим точкам по графику слева наклон касательной будет принимать все возрастающие отрицательные значения, в точках D и F — значение 0 и после этого — все возрастающие положительные значения.

Иную картину мы наблюдаем в точке G, в которой касательная перпендикулярна к оси OX, т. е. образует с ней прямой угол: $\alpha = 90°$. В этом случае при приближении точки касания по графику к точке G слева касательная будет составлять с осью OX все возрастающий острый угол α, а в точке G — угол α, равный 90°, но при приближении точки касания по графику к точке G справа касательная будет составлять с осью OX все убывающий тупой угол α, а в точке G — угол α, равный 90°; в первом случае касательная будет как бы вращаться в положительном направлении, неограниченно приближаясь к вертикальному положению, а во втором случае — в отрицательном направлении, опять-таки неограниченно приближаясь к вертикальному положению (черт. 150). Но тогда наклон касательной $\operatorname{tg}\alpha$ будет в первом случае принимать неограниченно возрастающие положительные значения, т. е. стремиться к $+\infty$, а во втором случае — неограниченно убывающие отрицательные значения, т. е. стремиться к $-\infty$.

Очевидно, что этот вывод относительно поведения касательной вблизи точки G может быть распространен на поведение касательной в точке K: при приближении по графику к точке K слева наклон касательной будет принимать неограниченно убывающие отрицательные значения, т. е. стремиться к $-\infty$, а при приближении по графику к точке K справа — неограниченно возрастающие значения, т. е. стремиться к $+\infty$.



Черт. 150

Но, как мы знаем (§ 5, п. 2), наклон касательной в каждой точке графика функции $y = f(x)$ равен значению производной $f'(x)$ этой функции, которое соответствует абсциссе точки касания. Поэтому, если в точке C графика, имеющей абсциссу c, касательная горизонтальна, так что наклон касательной $\operatorname{tg}\alpha$ равен нулю, то это значит, что $f'(c) = 0$, и, обратно, равенство $f'(c) = 0$ указывает, что в точке C графика, имеющей абсциссу c, наклон касательной $\operatorname{tg}\alpha$ равен нулю, так что касательная горизонтальна.

Если же касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке G, имеющей абсциссу g, вертикальна, т. е. касательная образует с осью OX угол α, равный 90°, то наклон касательной $\operatorname{tg}\alpha$ не имеет числового смысла; следовательно, производная $f'(x)$ для значения g переменной x не имеет числового значения, или, как говорят, не существует; обратно, если производная $f'(x)$ для значения g переменной x не существует, но этому значению g соответствует на графике определенная точка G, то это может произойти по той причине, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке G образует с осью OX угол α, равный 90°, для которого $\operatorname{tg}\alpha$ не имеет числового смысла.

Приняв во внимание эти замечания, мы можем теперь сформулировать выводы, к которым мы пришли из геометрических соображений, в виде следующих трех теорем.

1. Если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), имеет во внутренней точке c этого промежутка максимум или минимум, а график этой функции в точке C его, соответствующей абсциссе c, имеет касательную, то она либо параллельна оси OX (горизонтальна), либо перпендикулярна к оси OX (вертикальна).

Иначе говоря, функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), может иметь максимум или минимум во внутренней точке c этого промежутка только в том случае, если касательная к графику в его точке C, соответствующей абсциссе c, существует и притом горизонтальна или вертикальна, так что если она не вертикальна, то непременно горизонтальна.

2. Если функция $f(x)$ определена в промежутке (a, b) и если наклон касательной к графику этой функции в каждой его точке имеет определенное значение и в его точке C, соответствующей внутренней точке c промежутка (a, b), равен нулю, а при переходе через точку C меняет знак плюс на минус или знак минус на плюс, то функция $f(x)$ имеет в точке c в первом случае ($+$ на $-$) максимум, а во втором случае ($-$ на $+$) — минимум (черт. 149) (с горизонтальной касательной).

3. Если функция $f(x)$ определена в промежутке (a, b) и если наклон касательной к графику этой функции в его точке C, соответствующей внутренней точке c промежутка (a, b), теряет числовой смысл, а во всех других точках этого промежутка имеет определенное значение и при неограниченном приближении по графику к точке C слева стремится к $\pm\infty$, а при неограниченном приближении к этой точке C справа соответственно — к $\mp\infty$, то в первом случае $(+\infty, -\infty)$ функция $f(x)$ имеет в точке c максимум, а во втором случае $(-\infty; +\infty)$ — минимум (черт. 150) (с вертикальной касательной).

Эти выводы, к которым мы пришли из геометрических соображений, могут быть строго доказаны. Мы приведем доказательство теорем 1 и 2; что же касается теоремы 3, то мы примем ее на основании тех геометрических соображений, которые приведены выше.

Теорема 1. Если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), во внутренней точке c этого промежутка достигает максимума или минимума и имеет в этой точке производную $f'(c)$, то эта производная равна нулю.

Доказательство. Допустим, что функция $f(x)$ имеет в точке c максимум. Это значит, что точку c можно окружить промежутком $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, обладающим тем свойством, что для всех отличных от c значений переменной x, принадлежащих этому промежутку, выполняется неравенство

$$f(x) < f(c).$$

Если h есть положительное число, меньшее, чем ε, то значения $c-h$ и $c+h$ принадлежат промежутку $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Поэтому имеют место неравенства

$$f(c-h) < f(c), \quad f(c+h) < f(c)$$

и, следовательно, неравенства

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h} > 0, \qquad \frac{f(c+h)-f(c)}{h} < 0.$$

Функция $f(x)$ имеет в точке c производную $f'(c)$; следовательно, при $h \to 0$ отношение $\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}$ и отношение $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ будут стремиться к пределу $f'(c)$. При этом первое отношение при своем изменении сохраняет положительное значение; поэтому его предел $f'(c)$ может быть только положительным числом или нулем; второе отношение при своем изменении сохраняет отрицательное значение; поэтому его предел $f'(c)$ может быть только отрицательным числом или нулем.

Но соотношения

$$f'(c) \geqslant 0 \text{ и } f'(c) \leqslant 0$$

могут иметь место одновременно лишь при условии

$$f'(c) = 0,$$

а это и требовалось доказать.

Точно к такому же выводу мы придем, если функция $f(x)$ имеет в точке c минимум.

Следствие. Из теоремы 1 непосредственно следует, что если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), во внутренней точке c этого промежутка имеет производную, отличную от нуля, то значение $f(c)$ функции $f(x)$ не является ни ее максимумом, ни ее минимумом.

Иначе говоря, для того чтобы функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b) и имеющая во внутренней точке c этого промежутка производную $f'(c)$, достигала в точке c максимума или минимума, необходимо, чтобы производная $f'(c)$ была равна нулю. В этом и состоит условие, необходимое для того, чтобы функция, имеющая в данной точке производную, достигала в этой точке максимума или минимума.

Теорема 2. Если функция $f(x)$, определенная в промежутке (a, b), имеет в этом промежутке производную $f'(x)$, которая во внутренней его точке c равна нулю, а в смежных промежутках (a, c) и (c, b) имеет противоположные знаки, то в точке c функция $f(x)$ достигает максимума или минимума.

Именно, если при переходе через точку c производная $f'(x)$ меняет знак плюс на минус, то функция $f(x)$ имеет в точке c максимум; если же при переходе через точку c производная $f'(x)$ меняет знак минус на плюс, то функция $f(x)$ имеет в точке c минимум.

Доказательство. 1°. Допустим, что $f'(c) = 0$, $f'(x) > 0$ при $a < x < c$, $f'(x) < 0$ при $c < x < b$.

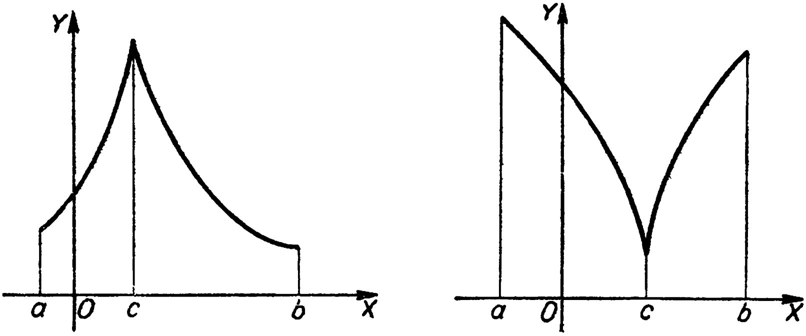
Так как $f'(x) > 0$ при $a < x < c$, то в промежутке (a, c) функция $f(x)$ возрастает (§ 10, п. 2, теорема 3). Следовательно, для всех значений переменной x, принадлежащих промежутку (a, c), имеет место неравенство $f(c) > f(x)$.

Так как $f'(x) < 0$ при $c < x < b$, то в промежутке (c, b) функция $f(x)$ убывает (§ 10, п. 2, теорема 4). Следовательно, для всех значений переменной x, принадлежащих промежутку (c, b), имеет место неравенство $f(c) > f(x)$.

Объединяя оба результата, заключаем, что для всех отличных от c значений переменной x, принадлежащих промежутку (a, b), имеет место неравенство $f(c) > f(x)$. А это означает (§ 11, п. 1), что значение $f(c)$ есть максимум функции $f(x)$.

2°. Точно так же докажем, что если $f'(c) = 0$, $f'(x) < 0$ при $a<x<c$, $f'(x) > 0$ при $c < x < b$, то значение $f(c)$ есть минимум функции $f(x)$.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ определена в промежутке (a,b) и если производная $f'(x)$ этой функции во внутренней точке c промежутка (a, b) не существует, а во всех других точках этого промежутка существует и при стремлении переменной x к значению c слева стремится к $\pm\infty$, а при стремлении ее к значению c справа — соответственно к $\mp\infty$, то в первом случае $(+\infty, -\infty)$ функция $f(x)$ имеет в точке c максимум, а во втором случае $(-\infty, +\infty)$ — минимум (черт. 151).



Черт. 151

Эту теорему, как указано было, мы примем без строгого доказательства.

§ 12. ПОРЯДОК ИССЛЕДОВАНИЯ ХОДА ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИЙ

1. Общие указания и примеры. Для исследования хода изменения функции целесообразно придерживаться определенного порядка.

1°. Если функция $y = F(x)$ определена для всех действительных значений независимой переменной x, то исследование хода ее изменения надо проводить в следующем порядке.

1) Найти производную $F'(x)$ функции $F(x)$.

2) Найти промежутки, в которых производная $F'(x)$ сохраняет определенный знак (§ 3, п. 2).

3) Установить, как изменяется функция $F(x)$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$ (§ 4, п. 4).

4) На основании полученных в пунктах 1 — 3 результатов составить примерно следующую таблицу:

x	$-\infty$	$\dots$	α	$\dots$	β	$\dots$	γ	$\dots$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	∞	$+$	0	$-$	
y	$y \to ?$	убыв.	$F(\alpha)$	возр.	$F(\beta)$	возр.	$F(\gamma)$	убыв.	$y \to ?$
вывод:			мин.				макс.		

Эта таблица составляется в соответствии с указанным выше порядком исследования.

В первой строке располагаются в порядке возрастания все критические значения α, β, γ переменной x, т. е. все те значения этой переменной, при которых производная $F'(x)$ обращается в нуль (корневые точки) или в бесконечность (точки разрыва) и, следовательно, может изменить знак.

Во второй строке отмечаются знаки, которые производная $F'(x)$ имеет в каждом из промежутков, определяемых критическими значениями переменной x, и соответствующие им значения производной.

В третьей строке помещаются: 1) заключения о направлении, в котором изменяется функция $F(x)$ в каждом из промежутков, определяемых критическими значениями переменной x, а также 2) соответствующие им значения $F(\alpha)$, $F(\beta)$, $F(\gamma)$ функции $F(x)$.

В четвертой строке указываются выводы, которые можно сделать из полученных результатов.

5) Опираясь на таблицу, составленную в пункте 4, построить график функции $F(x)$.

При этом, кроме сведений, доставляемых таблицей, могут быть для уточнения графика найдены: а) ордината точки пересечения графика с осью OY и, если возможно, абсциссы точек пересечения его с осью OX; б) промежутки, в которых функция $F(x)$ сохраняет определенный знак (§ 3, п. 2).

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Исследовать ход изменения функции

$$y = 3 + 4x - x^2.$$

Функция y определена для всех действительных значений переменной x.

1) Найдем ее производную:

$$y' = 4 - 2x.$$

2) Производная y' имеет при $x = 2$ значение 0, при $x < 2$ — положительное значение, при $x > 2$ — отрицательное значение.

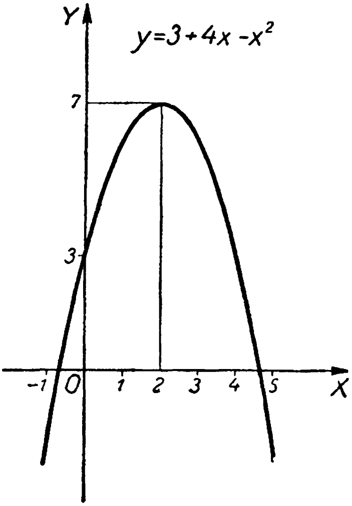
3) Если $x \to \mp \infty$, то $y \to -\infty$ (§ 4, п. 4).

4) Составляем таблицу:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	$-\infty$	возр.	7	убыв.	$-\infty$
вывод			макс.		

5) Строим график функции y (черт. 152):

x	y
2	7
1; 3	6
0; 4	3
$-1; 5$	-2
$2 \mp \sqrt{7}$	0



Черт. 152

Примечания. 1) Значения для x выбраны так, чтобы они были симметричными по отношению к точке 2, в которой функция имеет максимум.

2) $2 \mp \sqrt{7} \approx 2 \mp 2{,}646$; график пересекает ось OX в точках $-0{,}65$ и $4{,}65$.

Пример 2. Исследовать ход изменения функции

$$y = x^3 - 3x + 1.$$

Функция y определена для всех действительных значений переменной x.

1) Найдем ее производную:

$$y' = 3x^2 - 3 = 3\ (x + 1)(x - 1).$$

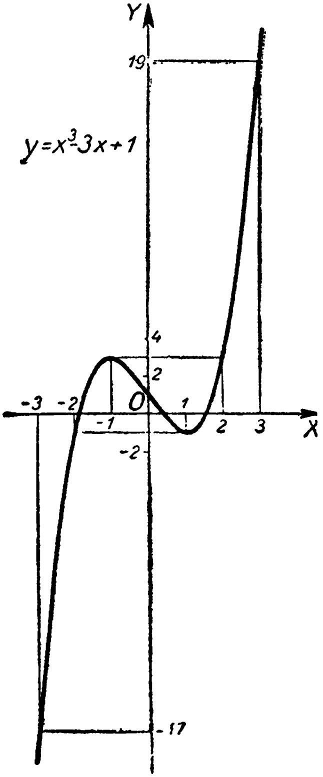
2) Производная y' имеет значение 0 при $x = \mp 1$, положительное значение вне промежутка $(-1, 1)$, т. е. при $x < -1$ и $x > 1$, и отрицательное значение — внутри промежутка $(-1,\ 1)$, т. е. при $-1 < x < 1$ (§ 3, п. 2).

3) Так как y есть целая рациональная функция третьей, т. е. нечетной, степени, то $y \to -\infty$ при $x \to -\infty$ и $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$ (§ 4, п. 4).

4) Составляем таблицу:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	возр.	3	убыв.	-1	возр.	$+\infty$
вывод			макс.		мин.		

5) Строим график функции y (черт. 153):



Черт. 153

x	y
-3	-17
-2	-1
-1	3
0	1
1	-1
2	3
3	19

Пример 3. Исследовать ход изменения функции

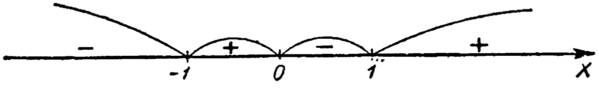
$$y = x^4 - 2x^2 - 3.$$

Функция y определена для всех действительных значений переменной x.

1) Находим ее производную:

$$y' = 4x^3 - 4x = 4(x + 1)\,x(x - 1).$$

2) Производная y' имеет при $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ значение 0. Промежутки, в которых производная y' имеет определенный знак, усматриваются из схемы (черт. 154):



Черт. 154

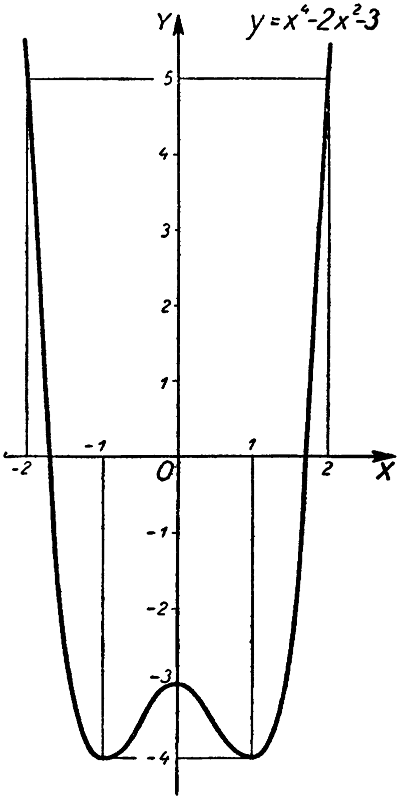
3) Если $x \to \mp \infty$, то $y \to +\infty$ (§ 4, п. 4).

4) Составляем таблицу:

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$		$+$	
y	$+\infty$	убыв.	-4	возр.	-3	убыв.	-4	возр.	$+\infty$
вывод			мин.		макс.		мин.		

5) Строим график функции y (черт. 155):

x	y
∓ 3	60
∓ 2	5
∓ 1	-4
0	-3



Черт. 155

Пример 4. Исследовать ход изменения функции

$$y = \frac{1}{x^2+1}.$$

Функция y определена для всех действительных значений переменной x.

1) Найдем ее производную:

$$y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

2) Производная y' имеет значение 0 при $x = 0$, положительное значение при $x < 0$ и отрицательное значение при $x > 0$.

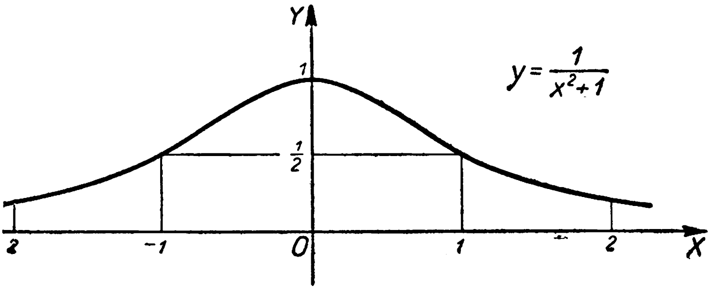
3) При $x \to \mp \infty$ функция y стремится к 0. Следовательно, ось OX служит горизонтальной асимптотой ее графика.

4) Составляем таблицу (стр. 512).

5) Строим график (черт. 156). Так как y есть четная функция, то достаточно построить этот график для промежутка $(0, +\infty)$ и найти его отражение в оси OY:

x	$-\infty$	$\dots$	0	$\dots$	$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	0	возр.	1	убыв.	0
вывод			макс.		

x	y
0	1
∓ 1	$\frac{1}{2}$
∓ 2	$\frac{1}{5}$
∓ 3	$\frac{1}{10}$
$\dots$	$\dots$



Черт. 156

Пример. 5. Исследовать ход изменения функции

$$y=\frac{x}{x^2+1}.$$

Функция y определена для всех действительных значений переменной x.

1) Найдем ее производную:

$$y'=-\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}.$$

2) Производная y' имеет значение 0 при $x=\pm 1$, отрицательное значение вне промежутка $(-1,\ 1)$, т. е. при $x<-1$ и $x>1$, и положительное значение внутри этого промежутка, т. е. при $-1<x<1$ (§ 3, п. 2).

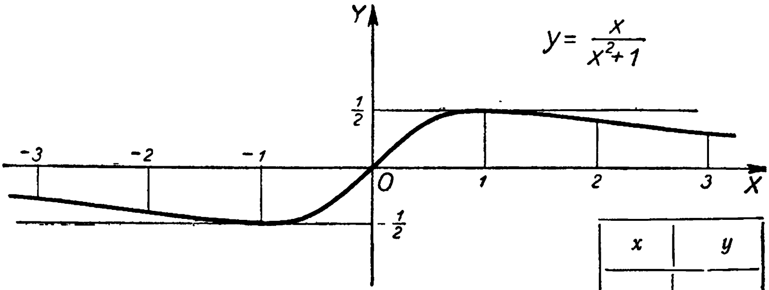
3) Так как числителем и знаменателем дроби $\frac{x}{x^2+1}$ служат целые рациональные функции, причем степень числителя меньше степени знаменателя, то (§ 4, п. 4, теорема 5)

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x}{x^2+1}=0;$$

следовательно, ось OX служит горизонтальной асимптотой ее графика.

4) Составляем таблицу:

x	$-\infty$	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$	$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$	
y	0	убыв.	$-\frac{1}{2}$	возр.	$\frac{1}{2}$	убыв.	0
вывод			мин.		макс.		



Черт. 157.

x	y
0	0
∓ 1	$\mp\frac{1}{2}$
∓ 2	$\mp\frac{2}{5}$
∓ 3	$\mp\frac{3}{10}$
$\dots$	$\dots$

5) Строим график функции y (черт. 157). Так как y есть нечетная функция, то ее график симметричен по отношению к началу координат:

Пример 6. Исследовать ход изменения функции $y = x(a-x)$, представляющей собой произведение двух сомножителей, сумма которых сохраняет постоянное значение a.

Функция y определена для всех действительных значений переменной x.

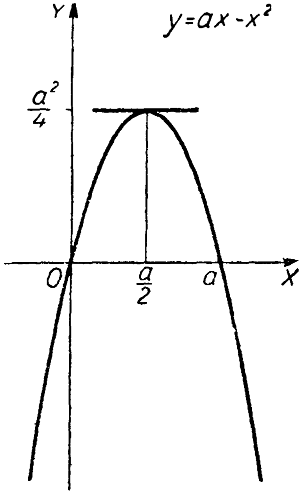
1) Найдем ее производную:

$$y' = (ax - x^2)' = a - 2x.$$

2) Производная y' имеет значение 0 при $x = \frac{a}{2}$, положительное значение при $x < \frac{a}{2}$ и отрицательное значение при $x > \frac{a}{2}$. Следовательно, функция y в промежутке $\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$ возрастает, в промежутке $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$ — убывает, а в точке $x = \frac{a}{2}$ достигает максимума, который имеет значение

$$\frac{a}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}.$$

Замечая, что если $x = \frac{a}{2}$, то также $a - x = \frac{a}{2}$, заключаем, что произведение двух переменных x и $a - x$, сумма которых имеет постоянное значение a, достигает максимума для того значения переменной x, при котором эти переменные становятся равными между собой.



Черт. 158

График функции $y = ax - x^2$ есть парабола с вершиной, определяемой координатами $\left(\frac{a}{2}; \frac{a^2}{4}\right)$; ветви этой параболы направлены вниз (в сторону отрицательной полуоси ординат) и пересекают ось OX в точках 0 и a, симметрично расположенных относительно абсциссы $\frac{a}{2}$ ее вершины. Касательная к параболе в ее вершине параллельна оси OX (черт. 158).

2°. Если функция $F(x)$ для одного или нескольких значений независимой переменной x не определена, то это может случиться по различным причинам.

Рассмотрим случай, когда функция $F(x)$ определяется равенством

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — целые рациональные функции от x. В этом случае для каждого значения переменной x, служащего корнем знаменателя $g(x)$ дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$, но не обращающего в нуль числителя $f(x)$ этой дроби, функция $F(x)$ не будет определена.

Если α есть одно из этих значений, т. е. если $g(\alpha) = 0$, $f(\alpha) \neq 0$ и если при этом

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha) \text{ и } \lim_{x \to \alpha} g(x) = g(\alpha) = 0,$$

то

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{0}{f(\alpha)} = 0,$$

так что при $x \to \alpha$ переменная $\frac{g(x)}{f(x)}$ есть бесконечно малая. Отсюда следует, что при $x \to \alpha$ переменная $1 : \frac{g(x)}{f(x)}$, т. е. переменная $\frac{f(x)}{g(x)}$, стремится к бесконечности, причем, если эта переменная сохраняет положительные значения, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$, а если эта переменная сохраняет отрицательные значения, то $\frac{f(x)}{g(x)} \to -\infty$ (§ 4, п. 4, теорема 2).

На основании этих соображений можно решить вопрос о том, имеет ли график функции $y = F(x)$ в точке α вертикальную асимптоту и как он расположен по отношению к этой асимптоте.

Для исследования хода изменения функций $F(x)$ рассматриваемого вида необходимо после операций 1 — 3, применяемых в случае 1° (стр. 507—503), для каждого значения α переменной x, при котором функция $F(x)$ обращается в бесконечность, установить, какой знак имеет эта бесконечность при $x \to \alpha$ слева и при $x \to \alpha$ справа.

Это можно выполнить двумя способами:

1) либо найти промежутки, в которых функция $F(x)$ имеет определенный знак, и на этом основании установить ее знак слева и справа от точки α;

2) либо учесть характер изменения (возрастание или убывание) функции $F(x)$ слева и справа от точки α: очевидно, что если $F(x)$ неограниченно возрастает, то это значит, что $F(x) \to +\infty$, а если $F(x)$ неограниченно убывает, то это значит, что $F(x) \to -\infty$.

Пример 7. Исследовать ход изменения функции

$$y = \frac{x+1}{x-1}.$$

Функция y определена для всех действительных значений переменной x, за исключением значения 1, при котором эта функция имеет разрыв.

1) Найдем ее производную:

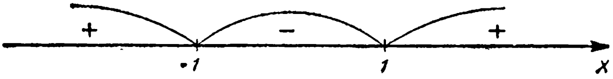
$$y' = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

2) Производная y' имеет во всей области ее существования ($-\infty < x < +\infty$, $x \neq 1$) отрицательное значение.

3) Заменяя данную дробь произведением

$$(x+1)(x-1),$$

заключаем, что знак функции y определяется схемой (черт. 159):



Черт. 159.

4) Представляя данную функцию в виде

$$y=\frac{x+1}{x-1}=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}},$$

находим, что при $x \to \mp\infty$ функция y стремится к пределу 1; следовательно, прямая $y=1$ служит для графика данной функции горизонтальной асимптотой.

5) Так как

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0,$$

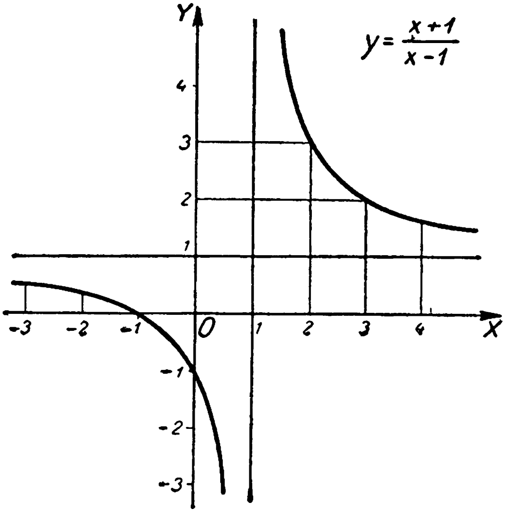
то, принимая во внимание знак функции y (см. 3), заключаем, что в случае, если $x \to 1$ слева, $y \to -\infty$, а в случае, если $x \to 1$ справа, $y \to +\infty$.

6) Составляем таблицу:

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
y'		$-$		$-$	
y	1	убыв.	$\mp\infty$	убыв.	1

7) Строим график функции y (черт. 160):

x	y
-3	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{3}$
-1	0
0	-1
1	$\mp\infty$
2	3
3	2



Черт. 160.

Примечание. Если бы мы операцию 3) опустили, то знак бесконечности, к которой стремится функция y при $x \to 1$ слева и при $x \to 1$ справа, можно было установить на том основании, что при $x \to 1$ слева функция y убывает, а при $x \to 1$ справа она возрастает.

Пример 8. Исследовать ход изменения функции

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Функция y определена для всех действительных значений переменной x, за исключением значения 0, при котором она имеет разрыв.

1) Найдем ее производную:

$$y' = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

2) Производная y' имеет при $x < 0$ положительное значение, при $x > 0$ отрицательное значение, а при $x = 0$ испытывает разрыв.

3) При $x \to \mp\infty$ данная функция y стремится к 0; следовательно, ось OX служит горизонтальной асимптотой ее графика.

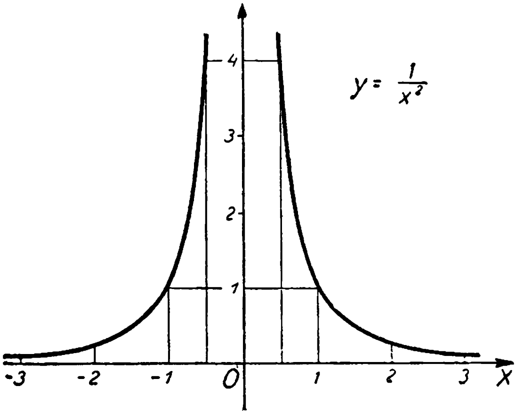
4) Так как данная функция во всей области ее определения имеет положительное значение, то, как в случае, если $x \to 0$ слева, так и в случае, если $x \to 0$ справа, данная функция стремится к $+\infty$.

5) Составляем таблицу:

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$+\infty$
y'		$+$		$-$	
y	0	возр.	$+\infty$	убыв.	0

6) Строим график функции y (черт. 161). Так как y есть четная функция, то ее график симметричен по отношению к оси OY:

x	y
0	$+\infty$
∓ 1	1
∓ 2	$\frac{1}{4}$
∓ 3	$\frac{1}{9}$
$\cdots$	$\cdots$



Черт. 161

Пример 9. Исследовать ход изменения функции

$$y = \frac{x^2}{x-1}.$$

Функция y определена для всех действительных значений переменной x, за исключением значения 0, при котором она имеет разрыв.

1) Найдем ее производную:

$$y' = \frac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

2) Производная y' имеет значение 0 при $x = 0$ и $x = 2$, положительное значение при $x < 0$ и $x > 2$ и отрицательное значение при $0 < x < 2$ и $x \neq 1$.

3) Функция y при $x < 1$ имеет отрицательное, а при $x > 1$ положительное значение.

4) Так как степень числителя дроби $\frac{x^2}{x-1}$ выше степени ее знаменателя, то при $x \to \mp\infty$ функция y стремится к ∞ (§ 4, п.4, теорема 5). Принимая во внимание ее знак (см. п. 3), заключаем, что если $x \to -\infty$, то $y \to -\infty$, а если $x \to +\infty$, то $y \to +\infty$.

5) Так как

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2} = \frac{0}{1} = 0,$$

то, принимая во внимание знак функции y (см. пункт 3), заключаем, что в случае, если $x \to 1$ слева, $y \to -\infty$, а в случае, если $x \to 1$ справа, $y \to +\infty$.

6) Составляем таблицу:

x	$-\infty$	...	0	...	1	...	2	...	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	возр.	0	убыв.	$\mp\infty$	убыв.	4	возр.	$+\infty$
вывод			макс.				мин.		

7) Строим график функции y (черт. 162).

Пример 10. Исследовать ход изменения функции

$$y = \frac{4x^2 - 12x + 5}{x^2 - 3x + 2}.$$

Так как

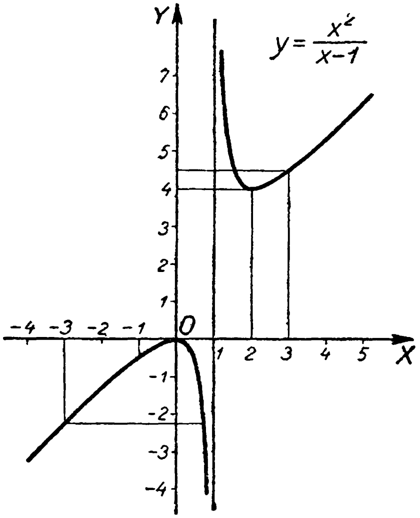
$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

то функция y определена для всех действительных значений переменной x, за исключением значений 1 и 2, при которых она имеет разрыв.

1) Найдем ее производную:

$$y' = \frac{6x-9}{(x^2-3x+2)^2}.$$

x	y,
-3	$-2\frac{1}{4}$
-2	$-1\frac{1}{3}$
-1	$-\frac{1}{2}$
0	0
1	$\mp\infty$
2	4
3	$4\frac{1}{2}$
4	$5\frac{1}{3}$
...	...



Черт. 162

2) Производная y' имеет значение 0 при $x=\frac{3}{2}$, положительное значение — при $x>\frac{3}{2}$ и $x\neq 2$, отрицательное значение — при $x<\frac{3}{2}$ и $x\neq 1$.

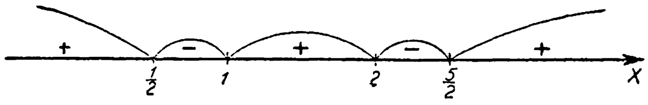
3) Принимая во внимание, что

$$4x^2-12x+5=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right),$$

и заменяя данную дробь произведением

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)(x-1)(x-2),$$

заключаем, что знак функции y определяется схемой (черт. 163):



Черт. 163.

4) Представляя данную функцию в виде

$$y=\frac{4-\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}},$$

находим, что при $x\to\mp\infty$ функция y стремится к пределу 4; следовательно, прямая $y=4$ служит для графика данной функции горизонтальной асимптотой.

5) Так как переменная

$$\frac{(x-1)(x-2)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}$$

при $x\to1$ и $x\to2$ стремится к 0, то, принимая во внимание знак этой переменной слева и справа от точки 1 и слева и справа от точки 2 (см. пункт 3), заключаем, что в случае, если $x\to1$ слева и $x\to2$ справа, то $y\to-\infty$, а в случае, если $x\to1$ справа и $x\to2$ слева, то $y\to+\infty$.

6) Составляем таблицу:

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$+$		$+$	
y	4	убыв.	$\mp\infty$	убыв.	16	возр.	$\pm\infty$	возр.	4
вывод					мин.				

7) Строим график функции y (черт. 164).

Примечание: Если бы мы операцию 3) опустили, то знак бесконечности, к которой стремится функция y при $x\to1$ слева и справа, можно было установить на том основании, что при $x\to1$ слева функция y убывает, а при $x\to1$ справа она возрастает и что при $x\to2$ слева функция y возрастает, а при $x\to2$ справа она убывает.

Пример 11. Исследовать ход изменения функции

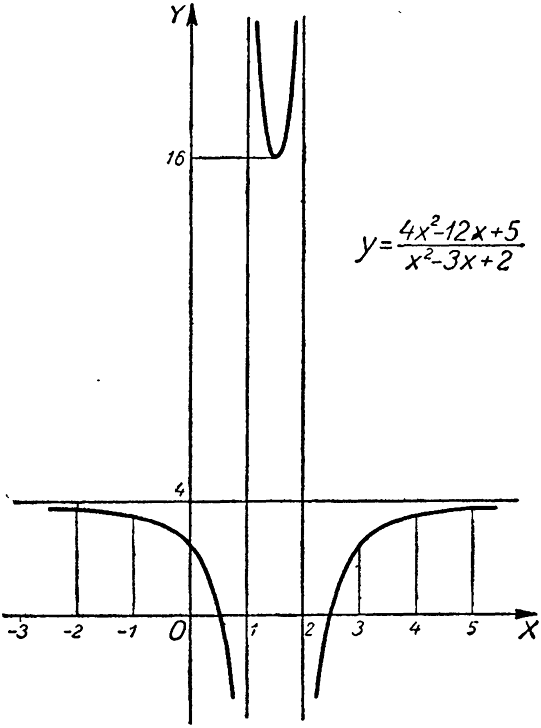
$$y=\frac{6x+4}{x^3}.$$

Функция y определена для всех действительных значений переменной x, за исключением значения 0, при котором эта функция имеет разрыв.

1) Найдем ее производную:

$$y'=-\frac{12(x+1)}{x^4}.$$

x	y
-2	$3\frac{3}{4}$
-1	$3\frac{1}{2}$
0	$2\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0
1	$\mp\infty$
$\frac{3}{2}$	16
2	$\pm\infty$
$\frac{5}{2}$	0
3	$2\frac{1}{2}$



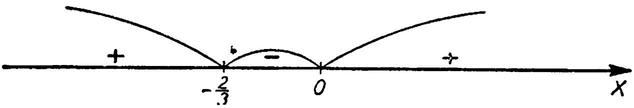
Черт. 164

2) Производная y' имеет при $x = -1$ значение 0, при $x < -1$ положительное значение, при $x > -1$ и $x \neq 0$ отрицательное значение.

3) Заменяя данную дробь произведением

$$(3x + 2)\, x,$$

заключаем, что знак функции y определяется схемой (черт. 165):



Черт. 165

4) Так как степень числителя дроби $\frac{6x+4}{x^3}$ меньше степени ее знаменателя, то при $x \to \mp\infty$ функция y стремится к 0; следовательно, ось OX служит для графика этой функции горизонтальной асимптотой.

5) Так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{6x+4} = \frac{0}{4} = 0,$$

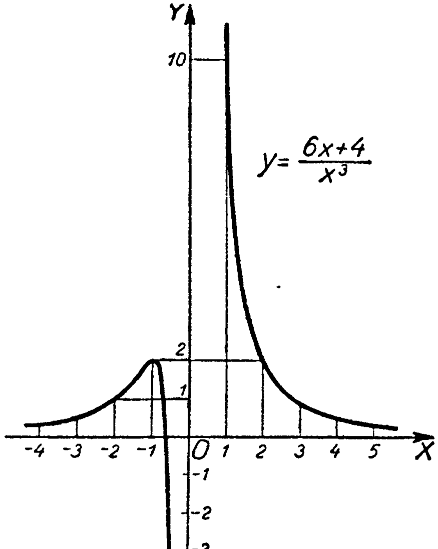
то, принимая во внимание знак функции y (см. пункт 3), заключаем, что в случае, если $x \to 0$ слева, $y \to -\infty$, а в случае, если $x \to 0$ справа, $y \to +\infty$.

6) Составляем таблицу:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	возр.		убыв.	$\mp\infty$	убыв.	0
вывод			макс.				

7) Строим график функции y (черт. 166):

x	y
-3	$\approx \frac{1}{2}$
-2	1
-1	2
0	$\mp\infty$
1	10
2	2
3	$\approx 0{,}8$



Черт. 166

Примечание. Операцию 3) можно опустить; тогда знак бесконечности, к которой стремится функция y при $x \to 0$ слева и справа, определяется на том основании, что при $x \to 0$ слева функция y убывает, а при $x \to 0$ справа она возрастает.

Пример 12. Исследовать ход изменения функции

$$y = x + \frac{a^2}{x}, \text{ где } a > 0,$$

представляющей собой сумму двух слагаемых, произведение которых сохраняет постоянное значение a^2.

Функция y определена для всех действительных значений переменной x, за исключением значения 0, при котором она имеет разрыв.

1) Найдем ее производную:

$$y' = 1 - \frac{a^2}{x^2} = \frac{x^2 - a^2}{x^2} = \frac{(x+a)(x-a)}{x^2}.$$

2) Производная y' имеет значение 0 при $x = -a$ и при $x = a$, положительное значение вне промежутка $(-a, a)$, т. е. при $x < -a$ и $x > a$, и отрицательное значение при $-a < x < 0$ и $0 < x < a$

3) Представляя данную функцию в виде

$$y = \frac{x^2 + a^2}{x},$$

заключаем, что при $x \to -\infty$ она стремится к $-\infty$, а при $x \to +\infty$ она стремится к $+\infty$.

4) Составляем таблицу:

x	$-\infty$	...	$-a$	...	0	...	a	...	$+\infty$
y'		$+$		$-$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	возр.	$-2a$	убыв.	$\mp\infty$	убыв.	$2a$	возр.	
вывод			макс.				мин.		$+\infty$

5) Строим график функции y (черт. 167).

Замечая, что если $x = \pm a$, то соответственно $\frac{a^2}{x} = \pm a$, заключаем, что сумма двух переменных x и $\frac{a^2}{x}$, произведение которых имеет постоянное значение a^2, достигает экстремума для того значения переменной x, при котором эти переменные становятся равными между собой, а именно: максимума — при $x = -a$ и минимума — при $x = a$.

2. Задачи на нахождение максимума или минимума функций

Задача 1. Какой из всех равнобедренных треугольников, вписанных в окружность данного радиуса R, имеет наибольшую площадь?

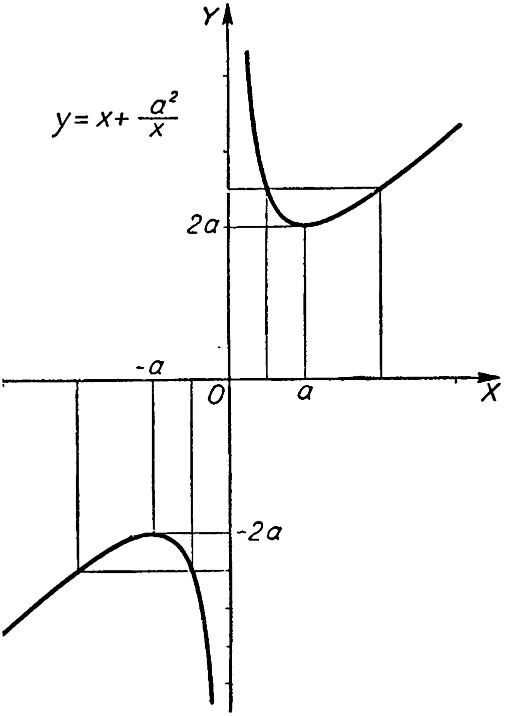
Решение. Обозначив (черт. 168) основание AC равнобедренного треугольника ABC, вписанного в окружность O, через $2x$, дополнение DE высоты BD до диаметра BE через y и площадь треугольника ABC через S, последовательно находим:

$$S = x\,(2R - y);\ x^2 = y\,(2R - y)\cdot$$

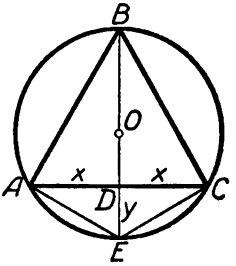
Отсюда

$$S^2 = x^2 (2R - y)^2 = y (2R - y)^3.$$

Очевидно, что функция S имеет наибольшее значение одновременно с функцией $z = y (2R - y)^3$; поэтому исследуем функцию z.



Черт. 167.



Черт. 168.

1) Переменная y должна удовлетворять условию

(1) $$0 < y < 2R;$$

при этом условии функция z имеет положительное значение.

2) Найдем производную функции z:

$$z' = (2R - y)^3 - 3y (2R - y)^2 = (2R - y)^2 (2R - 4y).$$

3) Из значений переменной y, обращающих производную z' в нуль, условию (1) удовлетворяет только значение $\frac{R}{2}$.

При $y < \frac{R}{2}$ производная z' имеет положительное значение, а при $y > \frac{R}{2}$ — отрицательное значение. Следовательно, при $y = \frac{R}{2}$

функция S^2 и вместе с ней функция S достигает наибольшего значения.

Так как при $y = \frac{R}{2}$ будет: $x^2 = \frac{3R^2}{4}$, $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $2x = R\sqrt{3}$,

то искомый треугольник — правильный.

Задача 2. Какой из всех прямоугольников, вписанных в окружность данного радиуса R, имеет наибольшую площадь?

Решение. Обозначив стороны вписанного прямоугольника через x и y, а площадь его через S, найдем: $S = xy$, $x^2 + y^2 = 4R^2$. Отсюда

$$S^2 = x^2y^2 = x^2\,(4R^2 - x^2).$$

Очевидно, что функция S имеет наибольшее значение одновременно с функцией

$$z = x^2(4R^2 - x^2);$$

поэтому исследуем функцию z.

1) Переменная x должна удовлетворять условию

$$(1) \qquad 0 < x < 2R;$$

при этом условии функция z имеет положительное значение.

2) Найдем производную функции z:

$$z' = 8R^2x - 4x^3 = 4x\,(2R^2 - x^2).$$

3) Из значений переменной x, обращающих производную z' в нуль, условию (1) удовлетворяет только значение $R\sqrt{2}$. При $0 < x < R\sqrt{2}$ производная z' имеет положительное значение, а при $x > R\sqrt{2}$ — отрицательное значение.

Следовательно, при $x = R\sqrt{2}$ функция S^2 и вместе с ней функция S имеет наибольшее значение.

Так как при $x = R\sqrt{2}$ имеем: $y^2 = 2R^2$, $y = R\sqrt{2}$, то искомый прямоугольник — квадрат.

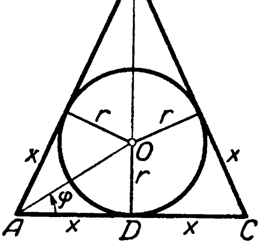
Задача 3. Найти наименьшее значение площади равнобедренного треугольника, описанного около окружности O данного радиуса r.

Решение. Обозначив (черт. 169) основание равнобедренного треугольника ABC через $2x$, его высоту BD — через h, угол A — через 2φ и площадь — через S, найдем:

$$S = xh;\ x = r\cdot\operatorname{ctg}\varphi;\ h = x\cdot\operatorname{tg}2\varphi = r\cdot\operatorname{ctg}\varphi\cdot\operatorname{tg}2\varphi.$$

Отсюда

$$S = r^2\operatorname{ctg}^2\varphi\cdot\operatorname{tg}2\varphi = \frac{2r^2}{\operatorname{tg}\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)},$$



Черт. 169

или

$$S = \frac{2r^2}{u(1-u^2)}, \text{ где } u = \operatorname{tg}\varphi.$$

Очевидно, что функция S будет иметь наименьшее значение тогда же, когда функция

$$y = u(1 - u^2)$$

будет иметь наибольшее значение. Исследуем эту функцию.

1) Переменная u должна удовлетворять условию:

(1) $$0 < u < 1,$$

так как $0° < \varphi < 45°$; при этом условии функция y имеет положительное значение.

2) Найдем производную функции y:

$$y' = 1 - 3u^2.$$

3) Из значений переменной u, обращающих производную в нуль, условию (1) удовлетворяет только значение $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

4) При $0 < u < \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная y' имеет положительное значение, а при $u > \frac{1}{\sqrt{3}}$ — отрицательное значение. Поэтому при $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$ функция y имеет наибольшее значение и, следовательно, функция S — наименьшее значение.

Но если $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0° < \varphi < 45°$, то $\varphi = 30°$, а $2\varphi = 60°$.

Таким образом, из всех равнобедренных треугольников, описанных около окружности данного радиуса r, наименьшую площадь имеет равносторонний, т. е. правильный треугольник.

Эта площадь имеет значение $3r^2\sqrt{3}$.

Задача 4. Какой из всех цилиндров данного объема V имеет наименьшую полную поверхность?

Решение. Обозначив радиус основания и высоту цилиндра соответственно через r и h, а полную поверхность его через T, найдем:

$$V = \pi r^2 h;\ T = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

Исследуем функцию T от переменной r.

1) Переменная r должна удовлетворять условию $r > 0$; при этом условии функция T имеет положительное значение.

2) Найдем производную функции T:

$$T_r' = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}.$$

3) Эта производная обращается в нуль при значении

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\,.$$

При $r < r_1$ производная T_r' имеет отрицательное значение, а при $r > r_1$ — положительное значение. Следовательно, при $r = r_1$ полная поверхность цилиндра с данным объемом V имеет наименьшее значение.

Если мы обозначим высоту цилиндра с данным объемом V, соответствующую радиусу r_1, через h_1, то получим:

$$V = \pi r_1^2 h_1;\ V = 2\pi r_1^3;\ \pi r_1^2 h_1 = 2\pi r_1^3;\ h_1 = 2r_1.$$

Значит, осевое сечение искомого цилиндра есть квадрат.

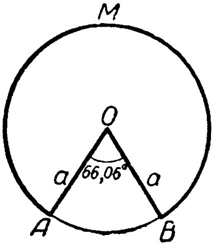
Задача 5. Употребляемые в химических лабораториях конусообразные фильтры приготовляются из кружков, в которых сектор AOB (черт. 170) складывается таким образом, чтобы остальная часть диска образовывала боковую поверхность круглого конуса. Вычислить, как велики должны быть радиус основания конуса x и высота его y (выраженные через радиус a взятого кружка), чтобы объем фильтра имел наибольшую величину.

Решение. Находим объем фильтра V:

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Функция $x^2\sqrt{a^2 - x^2}$ достигает наибольшего значения одновременно с функцией

$$y = x^4 (a^2 - x^2).$$



Черт. 170

Исследуем функцию y.

1) Переменная x должна удовлетворять условию

(1) $$0 < x < a;$$

при этом условии функция y имеет положительное значение.

2) Найдем производную функции y:

$$y' = 4a^2x^3 - 6x^5 = 2x^3(2a^2 - 3x^2).$$

3) Из значений переменной x, обращающих производную y' в нуль, условию (1) удовлетворяет только значение

$$x_1 = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}8165\ a.$$

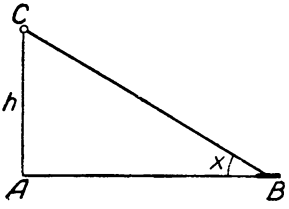
При $0 < x < x_1$ производная y' имеет положительное значение, а при $x > x_1$ — отрицательное значение. Следовательно, функция y при $x = x_1$ достигает наибольшего значения.

Так как в этом случае длина AMB дуги равна $2\pi x_1$, то ее отношение к длине всей окружности взятого круга есть $\frac{x_1}{a}$, т. е. приближенно 0,8165. Поэтому $\smile AMB = 360^\circ \cdot 0{,}8165$; а $\smile AB = 360^\circ \cdot 0{,}1835 = 66^\circ{,}06$.

Задача 6. В точке B (черт. 171) лежит очень малая горизонтальная площадка, освещаемая источником света C. Сила освещения y, как известно, связана с углом ABC, который мы обозначим через x, зависимостью

$$y = \frac{k}{a^2} \sin x \cdot \cos^2 x,$$

где k есть некоторая постоянная, а $a = AB$. При каком значении угла x, зависящем от положения точки C на вертикали AC, сила освещения в точке B будет наибольшей?



Черт. 171

Решение. Представив функцию $\sin x \cdot \cos^2 x$ в виде $\sin x \; (1 - \sin^2 x)$ и полагая $\sin x = u$, сведем исследование функции y к исследованию функции

$$z = u(1 - u^2).$$

1) Переменная u должна удовлетворять условию

$$(1) \qquad 0 < u < 1;$$

при этом условии функция z имеет положительное значение.

2) Найдем производную функции z:

$$z' = 1 - 3u^2.$$

3) Из значений, обращающих производную z' в нуль, условию (1) удовлетворяет только значение $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

При $0 < u < \frac{1}{\sqrt{3}}$ производная z' имеет положительное значение, а при $u > \frac{1}{\sqrt{3}}$ — отрицательное значение. Следовательно, при $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$ функция z имеет наибольшее значение.

Но если $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $x \approx 35^\circ 16'$.

При этом значении угла x высоту h источника света C над горизонталью AB мы найдем из равенства

$$h = a \operatorname{tg} x = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

т. е. $h : a = 1 : \sqrt{2} \approx 5 : 7$.

УПРАЖНЕНИЯ К ЗАДАЧЕ 6

1. Построить угол α, при котором (для данного a и переменного h) достигается наибольшая сила освещения.

Указание. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Построить кривую уравнения

$$y=\sin x\cdot\cos^2 x$$

в декартовых координатах, полагая x равным 5°, 15°, 30°, 45°, 60°, 80°.

3. Построить кривую уравнения

$$r=\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi$$

в полярных координатах, полагая φ равным 5°, 15°, 30°, 45°, 60°, 80°.

4. Выразив $\sin x$ и $\cos x$ через a и h, найти зависимость силы освещения от a и h и установить, что при постоянных k и h сила освещения обратно пропорциональна третьей степени расстояния BC освещенной точки от источника света.

Задача 7. На сторонах четырех углов прямоугольного куска картона $ABCD$ строят равные квадратики и отрезают их, а затем, согнув картон по прямым $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ и приподняв четыре маленьких боковых прямоугольника, образуют (открытый сверху) прямоугольный параллелепипед (черт. 172).

Предполагая, что прямоугольный кусок картона имеет измерения

$$AB=32\ \textit{см},\ BC=20\ \textit{см},$$

исследовать изменение объема параллелепипеда в зависимости от длины x стороны каждого из отрезанных квадратиков.

Решение. Обозначая объем параллелепипеда через V, находим, что

$$V=(32-2x)(20-2x)x=4(16-x)(10-x)x=$$
$$=4x^3-104x^2+640x.$$

1) Переменная x по своему смыслу должна удовлетворять условию $0<2x<20$, т. е. условию

$$(1)\qquad 0<x<10;$$

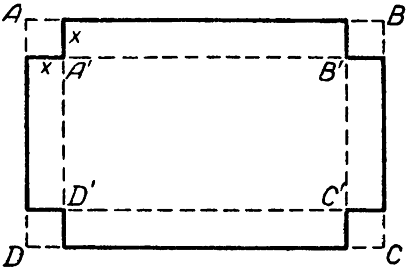
при условии (1) функция V имеет, как и требуется, положительное значение. Исследуем изменение функции V в промежутке $0<x<10$.

2) Найдем производную функции V:

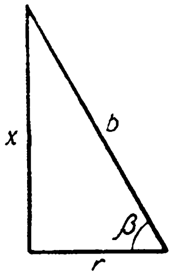
$$V'=12x^2-208x+640=4(3x^2-52x+160).$$

3) Производная V' имеет значение 0 при $x_{1,2}=\frac{26\mp 14}{3}$, т. е. при $x_1=4$ и $x_2=13\frac{1}{3}$; из этих значений переменной x промежут-

ку (0,10) удовлетворяет только значение 4. В промежутке (0,4) производная y' имеет положительное значение, а в промежутке (4,10) — отрицательное значение.



Черт. 172.



Черт. 173.

Следовательно, при $x = 4$ функция V достигает наибольшего значения (1152).

Задача 8. Основанием правильной пирамиды служит n-угольник, а каждое ее боковое ребро имеет длину b. При какой высоте объем этой пирамиды будет наибольшим?

Решение. Обозначив высоту пирамиды через x, радиус и площадь ее основания соответственно через r и Q, а объем ее через V, найдем (черт. 173):

$$Q = \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}; \qquad V = \frac{n}{6} x r^2 \sin\frac{2\pi}{n}.$$

Но $r^2 = b^2 - x^2$; поэтому

$$V = \frac{n}{6} x(b^2 - x^2) \cdot \sin\frac{2\pi}{n}.$$

Функция V имеет максимум одновременно с функцией

$$y = x(b^2 - x^2).$$

Поэтому исследуем эту функцию.

1) Переменная x по своему смыслу должна удовлетворять условию

(1) $$0 < x < b;$$

при условии (1) функция y имеет, как и требуется, положительное значение. Исследуем изменение функции y в промежутке $0 < x < b$.

2) Найдем производную функции y:

$$y' = b^2 - 3x^2.$$

3) Производная V' имеет значение 0 при $x_{1,2} = \mp \frac{b}{\sqrt{3}}$; из этих значений переменной x промежутку $(0, b)$ удовлетворяет только значение $\frac{b}{\sqrt{3}}$. В промежутке $\left(0, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ производная y' имеет положительное значение, в промежутке $\left(\frac{b}{\sqrt{3}}, b\right)$ — отрицательное значение.

Следовательно, при $x = \frac{b}{\sqrt{3}}$ функция y и вместе с ней функция V имеет наибольшее значение.

Итак, объем данной пирамиды, независимо от того, какой именно n-угольник служит ее основанием, имеет наибольшее значение при условии, если $x = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

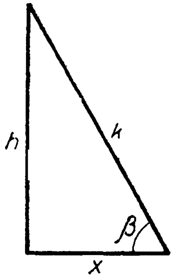
Интересно, что угол β, который боковое ребро b составляет с основанием этой пирамиды максимального объема, имеет значение, определяемое уравнением

$$\sin\beta = \frac{x}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

и, следовательно, не зависящее ни от числа n сторон основания пирамиды, ни от длины b ее бокового ребра.

Задача 9. Основанием правильной пирамиды служит n-угольник. Зная, что объем этой пирамиды равен V, найти, при каком условии ее боковая поверхность будет наименьшей.

Решение. Обозначив радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, через x, ее высоту и апофему — соответственно через h и k, а боковую поверхность через S, последовательно найдем (черт. 174):



Черт. 174

$$(1)\qquad V = \frac{n}{3} h x^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}, \qquad S = nxk \operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$
$$k^2 = h^2 + x^2.$$

Очевидно, что функция S будет иметь наименьшее значение одновременно с ее квадратом, т. е. с функцией

$$y = n^2x^2k^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}.$$

Принимая во внимание сначала третье, а затем первое из равенств (1), получаем:

$$y = n^2x^2h^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n} + n^2x^4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n} = \frac{9V^2}{x^2} + n^2x^4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}.$$

Исследуем функцию y.

1) Переменная x по своему смыслу должна удовлетворять условию $x > 0$; при этом условии функция y имеет положительное значение. Исследуем изменение функции при $x > 0$.

2) Найдем производную функции y:

$$y' = -\frac{18V^2}{x^3} + 4n^2x^3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}.$$

3) Из значений переменной x, обращающих производную y' в нуль, условию $x > 0$ удовлетворяет только значение

$$x_1 = \sqrt[6]{\frac{9V^2}{2n^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}} = \sqrt[3]{\frac{3V}{n\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}}.$$

При $0 < x < x_1$ и, следовательно, при $0 < x^6 < x_1^6$ производная y' имеет отрицательное значение, а при $x > x_1 > 0$ и, следовательно, при $x^6 > x_1{}^6$ — положительное значение, так что при $x = x_1$ функция y имеет наименьшее значение. При этом же значении x переменной x будет наименьшей и боковая поверхность S данной пирамиды.

Интересно, что и в этом случае (как в задаче 8) отношение $\frac{h}{x}$, т. е. тангенс угла β, который боковая грань пирамиды образует с плоскостью ее основания, имеет значение $\sqrt{2}$, не зависящее от числа n сторон основания:

$$\frac{h}{x} = \frac{3V}{nx^2\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} : x = \frac{3V}{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} : x^3 = \frac{3V}{n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}} : \frac{3V}{n\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}.$$

Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды с данным объемом V имеет наименьшее значение при условии, если радиус окружности, вписанной в основание, равен $\sqrt[3]{\frac{V}{\sqrt{6}}}$.

Задача 10. Найти, при каких значениях переменной x функция

$$y = (x - a_1)^3 + (x - a_2)^3 + \ldots + (x - a_{n-1})^3 + (x - a_n)^3$$

имеет максимум и минимум.

Решение. Введя обозначения:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = s_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n-1}^2 + a_n^2 = s_2,$$
$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{n-1}^3 + a_n^3 = s_3,$$

после преобразования получим:

$$y = nx^3 - 3s_1x^2 + 3s_2x - s_3.$$

1) Переменная x_1 может принимать любое действительное значение.

2) Найдем производную функции y:

$$y' = 3nx^2 - 6s_1x + 3s_2.$$

3) Эта производная при $x_{1,2} = \frac{1}{n}(s_1 \mp \sqrt{s_1^2 - ns_2})$ обращается в нуль, вне промежутка корней, т. е. при $x < x_1$ и $x > x_2$, имеет положительное значение, а внутри промежутка корней, т. е. при $x_1 < x < x_2$, — отрицательное значение.

Следовательно, значение x_1 переменной x доставляет функции y максимум, а значение x_2 — минимум.

Задача 11. Найти, при каких значениях переменной x функция

$$y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_{n-1})^2 + (x - a_n)^2$$

имеет минимум.

Решение. Введя обозначения

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = s_1,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a^2{}_{n-1} + a_n^2 = s_2,$$

после преобразования получим:

$$y = nx^2 - 2s_1x + s_2.$$

1) Переменная x может принимать любое действительное значение.

2) Найдем производную функции y:

$$y' = 2nx - 2s_1.$$

Эта производная при $x = \frac{s_1}{n}$ обращается в нуль, при $x < \frac{s_1}{n}$ имеет отрицательное значение, а при $x > \frac{s_1}{n}$ — положительное значение.

Следовательно, значение $\frac{s_1}{n}$ доставляет функции y минимум.

Если, произведя n измерений некоторой неизвестной величины x, нашли в результате значения $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, то разности

$$x - a_1,\ x - a_2,\ \ldots,\ x - a_{n-1},\quad x - a_n,$$

очевидно, выражают допущенные при этом погрешности (ошибки).

Известно, что наиболее вероятное значение величины x есть то, при котором сумма квадратов погрешностей, т. е.

$$(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_{n-1})^2 + (x - a_n)^2$$

имеет наименьшее значение.

Как мы только что установили, наиболее вероятное значение величины x есть

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n}{n},$$

т. е. среднее арифметическое всех значений, полученных в результате n выполненных измерений ее.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какой из всех прямоугольников с данным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

Ответ. Квадрат.

2. Какой из всех прямоугольников с данной площадью S имеет наименьший периметр?

Ответ. Квадрат.

3. Какой из всех треугольников с данным основанием a и данным периметром $2p$ имеет наибольшую высоту?

Указание. Использовать формулу Герона для площади треугольника.

Ответ. Равнобедренный.

4. В ромб с диагоналями $2a$ и $2b$ вписать прямоугольник, имеющий наибольшую площадь.

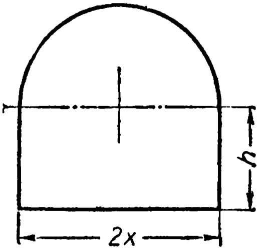
Ответ. Наибольшую площадь имеет вписанный прямоугольник, полученный путем соединения середин сторон данного ромба; эта площадь равна ab.

5. Через точку P, расположенную внутри окружности с центром O и радиусом R на расстоянии d от центра, проведены две взаимно перпендикулярные хорды. При каком условии произведение этих хорд достигает наибольшего значения?

Ответ. При условии, если расстояния хорд от центра равны между собой, причем каждое из них имеет значение $\frac{d\sqrt{2}}{2}$.

Указание. Введя в качестве вспомогательной переменной угол φ, образованный одной из хорд с прямой OP, легко найти тригонометрическое решение задачи.

6. Сечение шлюзового канала (или туннеля) имеет вид, указанный на чертеже 175.



Черт. 175

1) Зная его периметр $2p$, найти, при каком условии сечение будет иметь наибольшую площадь.

2) Зная его площадь S, найти, при каких условиях периметр сечения («мокрый периметр») будет наименьшим.

Ответы. 1) Если $x = \frac{2p}{\pi + 4}$, т. е. $x = h$;

2) если $x = \sqrt{\frac{2S}{\pi+4}}$, т. е. $x = h$.

7. В коническом сосуде, налитом водой, напряжение, стремящееся разорвать его по образующей или по параллельному кругу, выражается соответственно формулами:

1) $p = ay(h - y)$; 2) $q = b(h - y)(h + 2y)$,

где h — высота сосуда, y — расстояние до уровня жидкости, a и b — постоянные. На какой глубине эти напряжения имеют наибольшие значения?

Ответы. 1) $y = \frac{h}{2}$; 2) $y = \frac{h}{4}$.

8. Найти объем наибольшего конуса, который может быть вписан в шар радиуса R.

Ответ. $\frac{32}{81} \pi R^3$.

9. Найти объем наименьшего конуса, описанного около шара радиуса R.

Ответ. $\frac{8}{3} \pi R^3$.

10. Чтобы по возможности уменьшить трение жидкости о стены канала, площадь, орошаемая водой, должна быть возможно меньшей.

Показать, что лучшей формой открытого прямоугольного канала с заданным поперечным сечением является такая, при которой ширина канала превышает вдвое его высоту.

ГЛАВА XI

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. РАСШИРЕНИЕ ОБЛАСТИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. **Понятие о числовом поле.** В системе рациональных чисел действия сложения, вычитания, умножения и деления (за исключением деления на нуль) выполнимы и однозначны относительно каждой пары чисел, т. е. определены так, что применение любого из этих действий к паре рациональных чисел приводит к одному и только одному рациональному числу.

Тем же самым свойством обладает система действительных чисел. В этой системе указанные действия также выполнимы и однозначны относительно каждой пары чисел, так что применение любого из них к паре действительных чисел приводит к одному и только одному действительному числу.

Определение. Если в некоторой числовой системе все основные действия (сложение, вычитание, умножение и деление, за исключением деления на нуль) выполнимы и однозначны относительно каждой пары чисел этой системы, то такая система называется числовым полем.

Таким образом, любое из основных действий, примененное к паре чисел, принадлежащих некоторому полю, дает в результате определенное число, принадлежащее этому полю.

Система целых положительных чисел не является числовым полем, так как действие вычитания в случае, когда вычитаемое больше уменьшаемого или равно ему, невыполнимо. С целью сделать вычитание выполнимым и в этих случаях были введены отрицательные числа и число нуль.

Но и эта расширенная система всех целых чисел еще не представляет собой поля, так как в ней не всегда выполнимо действие деления. С целью сделать действие деления возможным для всякой пары целых чисел были введены дробные числа. В построенной таким образом новой числовой области «рациональных чисел» основные действия — сложение, вычитание, умножение и деление (за исключением деления на нуль) — оказались всегда выполнимыми и однозначными. Система рациональных чисел есть, следовательно, числовое поле.

Дальнейшее расширение понятия числа было вызвано геометрическими соображениями. Как мы знаем, все рациональные числа могут быть изображены точками числовой оси: рациональному числу a соответствует точка, абсцисса которой равна этому числу. Между каждыми двумя рациональными числами a и b находится одно, по крайней мере, рациональное число $\left(\text{например, } \frac{a+b}{2}\right)$ и, следовательно, бесконечное множество рациональных чисел. Поэтому между каждыми двумя точками A и B с рациональными абсциссами a и b на числовой оси расположено бесконечное множество точек с рациональными абсциссами. Это свойство системы рациональных чисел выражают, говоря, что рациональные числа плотно покрывают прямую линию (числовую ось).

Однако это не означает, что все точки на прямой (числовой оси) имеют рациональную абсциссу. Мы знаем, что на прямой все еще остаются пробелы, пустые места, остаются точки, которые не имеют абсциссы, пока мы имеем только рациональные числа. Это следует из существования несоизмеримых отрезков. Таких точек, не имеющих абсцисс, можно обнаружить на числовой прямой бесконечно много, даже, говоря очень грубо, бесконечно много больше, чем точек с рациональными абсциссами.

Для геометрии необходимо, однако, чтобы всякая точка имела абсциссу, т. е. чтобы каждому отрезку при данной единице измерения соответствовало число, которое можно было бы принять за его длину. Эта цель достигается после того, как поле рациональных чисел — с помощью присоединения к нему системы иррациональных чисел — подвергается расширению до системы действительных чисел, которая, как выяснено выше, также представляет собой поле.

Теперь каждое действительное число изображается точкой на прямой и, наоборот, каждой точке на прямой соответствует действительное число. Можно сказать, что действительные числа «покрывают» прямую без пробелов.

Мы пришли к необходимости расширить поле рациональных чисел до поля действительных чисел, исходя из геометрических соображений. Однако к этой необходимости приводит и ряд требований, предъявляемых арифметикой: без расширения поля рациональных чисел невозможно выполнить извлечение корня из положительного числа, нахождение логарифма положительного числа при положительном основании. Результаты выполнения этих операций принадлежат области действительных чисел.

Мы выполнили расширение поля рациональных чисел до поля действительных чисел, присоединив к первому полю сразу всю систему иррациональных чисел.

Однако интересно и важно знать, что мы расширили бы поле рациональных чисел до некоторого нового поля и в том случае, если бы присоединили к полю рациональных чисел только одно иррациональное число — например $\sqrt{2}$, т. е. число, квадрат которого равен 2, — и все числа, которые могут быть получены в результате выполнения основных действий над всеми рациональными числами и числом $\sqrt{2}$ (конечно, в предположении, что эти действия определены). Составленная этим путем система чисел представляла бы собой все множество чисел, имеющих вид $a+b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа

В самом деле, сумма, разность, произведение и частное чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа, являются числами того же вида:

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2};$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2};$$

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}=\frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}=$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.$$

Отсюда следует, что система чисел $a+b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа, есть поле, являющееся расширением поля рациональных чисел.

Из рассмотрения всех приведенных выше случаев расширения области чисел мы можем сделать следующий вывод. Выполняя это расширение, мы ставили себе требование определять новые числа так, чтобы новая числовая область заключала в себе прежнюю как часть и чтобы свойства основных действий (сложения, вычитания, умножения и деления) сохранялись при выполнении этих действий над новыми числами.

2. Цель введения комплексных чисел. При решении квадратного уравнения имеют место два случая: 1) если дискриминант уравнения есть положительное число или нуль, то уравнение соответственно имеет два неравных или равных действительных корня; 2) если же этот дискриминант есть отрицательное число, то уравнение не имеет корней в области действительных чисел.

Точно так же среди действительных чисел не существует числа, которое служило бы корнем четной степени из отрицательного числа, т. е. выражение $\sqrt[2n]{a}$, где n — натуральное число и $a<0$, не имеет числового значения в области действительных чисел; иначе говоря, в этой области уравнение $x^{2n}=a$, где n — натуральное число и $a<0$, не имеет корней.

Наконец, упомянем еще об одном случае, когда запас действительных чисел оказывается недостаточным: при положительном основании отрицательные числа в области действительных чисел не имеют логарифмов, т. е. выражение $\log_a b$, где $a>0$ и $b<0$, в области действительных чисел не имеет числового значения; иначе говоря, в этой области уравнение $a^x=b$, где $a>0$ и $b<0$, не имеет корней.

Таким образом, и в области действительных чисел некоторые уравнения не могут быть решены, не имеют корней.

Встретившись с этим фактом, наука все же в течение определенного периода допускала употребление при вычислениях (главным образом в качестве вспомогательного, промежуточного средства) квадратных корней из отрицательных чисел, которые заменялись произведением квадратного корня из противоположного положительного числа на квадратный корень из числа — 1 по правилу:

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1},$$

где a — положительное число. При этом положительный квадратный корень из — 1 получил даже специальное обозначение i (от слова imaginarius — мнимый, так как числа вида $\sqrt{-a}$, где a — положительное число, назывались мнимыми). Это незаконное, неоправданное использование мнимых чисел, приводившее все же к верным результатам, непрестанно подсказывало, что мнимые числа заслуживают введения их в общую семью чисел, и толкало научную мысль на разыскание путей решения этой проблемы.

Ее решение было найдено наукой в той же форме, в какой до того неоднократно узаконивались, вводились новые виды чисел — дробные, отрицательные, иррациональные: именно поле действительных чисел было расширено до поля комплексных чисел, часть которого составило множество мнимых чисел.

В поле комплексных чисел не только квадратное уравнение, но и всякое уравнение вида

$$(1) \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — действительные числа и $a_0 \neq 0$, оказалось имеющим ровно n комплексных корней.

В частности, в поле комплексных чисел уравнение $x^n = b$, где n — натуральное, а b — действительное число, имеет n корней, откуда следует, что радикал $\sqrt[n]{b}$ имеет в этом поле n значений.

Таким образом, введение мнимых чисел имело целью расширение поля действительных чисел до поля комплексных чисел, в котором каждое уравнение вида (1) имеет n корней.

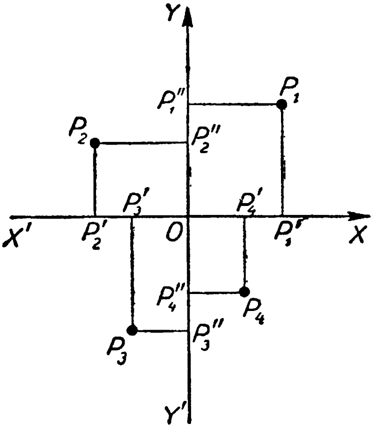
Ниже мы изложим один из способов, с помощью которого можно выполнить это расширение.

§ 2. ВВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Определение комплексного числа. Известно, что между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек числовой оси существует взаимно однозначное соответствие: каждому действительному числу соответствует одна и только одна точка числовой оси, которая служит изображением этого числа, и, обратно, каждой точке числовой оси соответствует одно и только одно действительное число, указывающее положение этой точки на оси. Таким образом, можно сказать, что нет такого действительного числа, для которого не нашлось бы изображения среди точек числовой оси, и нет такой точки числовой оси, положение которой нельзя было бы указать посредством некоторого действительного числа.

Этот важный факт позволяет определить положение каждой точки P на ориентированной плоскости, т. е. на плоскости, на которой задана система координатных осей.

В самом деле, если $X'OX$ и $Y'OY$ есть система прямоугольных координатных осей, заданных на некоторой плоскости (черт. 176), то точка P этой плоскости вполне определяется своими проекциями P' и P'' соответственно на оси $X'OX$ и $Y'OY$, а проекции P' и P'' вполне определяются действительными числами a и b, называемыми, как известно, абсциссой и ординатой точки P.



Черт. 176

Таким образом, в то время как для определения положения некоторой точки P на числовой оси служит одно действительное число a, для определения положения некоторой точки P на ориентированной плоскости необходимо задать два или, как мы будем говорить, пару действительных чисел $(a;\ b)$, из которых одно задается как первое, а другое как второе число пары.

Например, парами чисел $(5;\ 6)$, $(-5;\ 4)$, $(-3;\ -6)$, $(3;\ -4)$ определяются соответственно точки P_1, P_2, P_3, P_4 плоскости (черт. 176).

Обратно, каждой точке P ориентированной плоскости соответствует одна и только одна пара $(a;\ b)$ действительных чисел a и b; эта пара чисел, определяющих положение точки P на плоскости, состоит из абсциссы a и ординаты b точки P.

Следовательно, мы опять можем сказать, что между множеством всех пар действительных чисел и множеством всех точек ориентированной плоскости существует взаимно однозначное соответствие: каждой паре действительных чисел соответствует одна и только одна точка плоскости и, обратно, каждой точке плоскости соответствует одна и только одна пара действительных чисел. Иначе говоря, множество всех пар действительных чисел выполняет по отношению к точкам ориентированной плоскости ту же роль, какую множество действительных чисел выполняет по отношению к точкам числовой оси.

Ввиду этого каждую пару $(a;\ b)$ действительных чисел a и b, заданных в определенном порядке, можно рассматривать как некоторое новое число, изображаемое некоторой точкой ориентированной плоскости.

Однако заметим здесь же, что право называть числом каждую пару действительных чисел, заданных в определенном порядке, мы приобретем лишь после того, как установим, что над этими числами могут выполняться действия, обладающие теми же свойствами, что и действия над действительными числами.

Определение 1. Пара (a; b) действительных чисел a и b, заданных в определенном порядке, называется комплексным числом.

Комплексное число (a; 0), представляющее собой пару, состоящую из какого угодно действительного числа a и числа 0, изображается точкой P ориентированной плоскости, имеющей абсциссу a и ординату 0, т. е. точкой P оси OX, имеющей абсциссу a. Так как эта точка P, рассматриваемая как точка числовой оси, служит изображением действительного числа a, то комплексное число (a; 0) и действительное число a изображаются одной и той же точкой.

Поэтому вполне целесообразно понимать под комплексным числом (a; 0) не что иное, как действительное число a, и считать, что множество комплексных чисел (a; b) состоит из множества комплексных чисел вида (a; 0), т. е. из множества действительных чисел, и из множества комплексных чисел вида (a; b), где $b \neq 0$.

Определение 2. Комплексное число вида (a; b), где $b \neq 0$, называется мнимым числом.

Комплексное число вида (0; b), где $b \neq 0$, называется чисто мнимым числом.

Например, комплексные числа

$$(2;\ 3),\quad (-1;\ \sqrt{2}),\quad (0;\ 5)$$

являются мнимыми числами; из них число (0; 5) —чисто мнимое.

Таким образом, вопрос о том, является ли комплексное число (a; b) действительным или мнимым, зависит от того, равно ли число b нулю или отлично от нуля. Ввиду этой неодинаковой роли чисел (a и b), совокупность которых составляет комплексное число, первое из этих чисел (a) называется действительной частью комплексного числа, а второе (b) — его мнимой частью.

УПРАЖНЕНИЯ

Построить на плоскости следующие комплексные числа:

1) (4; 1); 2) $\left(\frac{3}{4};\ -\frac{1}{3}\right)$; 3) (0;4); 4) (0; — 2); 5) (4;0).

Каждое комплексное число, — независимо от того, является ли оно действительным или мнимым числом, — изображается определенной точкой координатной плоскости.

Число (a; b), где $b=0$, изображается точкой, принадлежащей оси $X'OX$, число (a; b), где $a=0$ —точкой, принадлежащей оси $Y'OY$, а число $(a;\ b)$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$, — точкой, расположенной на координатной плоскости, но не принадлежащей ни оси $X'OX$, ни оси $Y'OY$.

2. Равенство комплексных чисел. Очевидно, что два комплексных числа $(a;\ b)$ и $(a';\ b')$ будут изображаться одной и той же точкой координатной плоскости в том и только в том случае, если будут иметь место равенства $a'=a$ и $b'=b$. Поэтому целесообразно принять следующее определение.

Определение 3. Два комплексных числа $(a;\ b)$ и $(a';\ b')$ называются равными, если одновременно имеют место равенства

$$a'=a, \quad b'=b.$$

Равенство комплексных чисел обладает свойствами обратимости:

$$\text{если } (a;\ b)=(a';\ b'), \text{ то и } (a';\ b')=(a;\ b),$$

и транзитивности:

$$\text{если } (a;\ b)=(a';\ b') \text{ и } (a';\ b')=(a'',\ b''), \text{ то } (a;\ b)=(a'';\ b'').$$

В самом деле, если $(a;\ b)=(a';\ b')$, то, по определению 3, $a=a'$ и $b=b'$; но равенство действительных чисел обладает свойством обратимости; поэтому $a'=a$ и $b'=b$; следовательно, по определению 3, $(a';\ b')=(a;\ b)$.

Если $(a;\ b)=(a';\ b')$ и $(a';\ b')=(a'',\ b'')$, то $a=a'$ и $a'=a''$, а $b=b'$ и $b'=b''$; но равенство действительных чисел обладает свойством транзитивности; поэтому $a=a''$ и $b=b''$; следовательно, $(a;\ b)=(a'';\ b'')$.

3. Другой способ изображения комплексного числа. Мы знаем, что для того чтобы геометрически выполнить сложение или вычитание двух рациональных чисел, мы изображаем их не точками числовой оси, а направленными отрезками, алгебраическими значениями которых служат эти числа.

В тех же (и еще других) целях и для комплексных чисел устанавливается еще один способ изображения. Именно каждое комплексное число $(a;\ b)$ изображается вектором OP (черт. 177), началом которого служит начало координат O и концом — та точка P, которая соответствует комплексному числу $(a;\ b)$, т. е. точка с координатами $(a;\ b)$.

Так, число $(3;\ 2)$ изображается вектором OP_1, число $(-1;\ 4)$ — вектором OP_2, число $(1;\ 0)$ — вектором OE (черт. 178).

Все векторы, которые служат для изображения комплексных чисел на данной координатной плоскости, имеют своим началом начало координат O; поэтому эти векторы называются радиусами-векторами.

Каждый радиус-вектор, изображающий некоторое комплексное число $(a;\ b)$, вполне определяется его длиной r и углом φ, который он образует с осью OX.

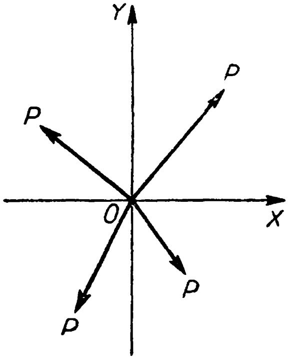
Определение 4. Длина r радиуса-вектора OP, изображающего комплексное число $(a;\ b)$, называется модулем этого комплексного числа, а угол φ, который радиус-вектор, изображающий комплексное число $(a;\ b)$, образует с осью OX, называется аргументом этого комплексного числа.

Если комплексное число обозначено одной буквой z, то для обозначения модуля этого числа употребляется тот же символ, что и для обозначения абсолютного значения действительного числа:

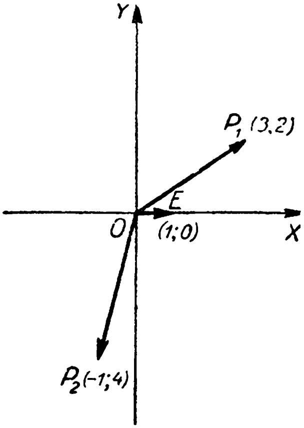
$$r = |z|\,;$$

для обозначения же аргумента комплексного числа z употребляют символ Arg:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z.$$



Черт. 177



Черт. 178

Модуль r комплексного числа z указывает расстояние точки P, изображающей это комплексное число, от начала координат, ввиду чего

$$r \geqslant 0.$$

Модуль равен нулю только для точки O, служащей началом координат. Если комплексное число z имеет вид (a; 0), т. е. является действительным числом a, то его модуль r есть, очевидно, не что иное, как абсолютное значение числа a.

Аргумент φ комплексного числа z указывает, на какой угол надо повернуть около начала O некоторый подвижный луч, совпадающий с лучом OX, для того чтобы он прошел через точку P, соответствующую данному комплексному числу z. Но этих углов существует бесконечное множество. В самом деле, если мы через φ_0 обозначим наименьшее положительное значение угла XOP (черт. 179), то каждое другое значение φ этого угла будет выражаться формулой

(1) $$\varphi = \varphi_0 + 2n\pi,$$

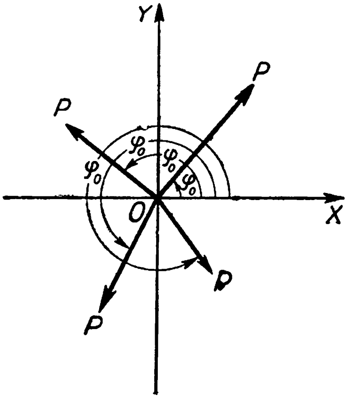
где

(2) $$0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$$

и n — целое число.

По этому каждое комплексное число z (кроме числа 0) имеет один и только один модуль r и один и только один аргумент φ_0, удовлетворяющий соотношению (2), но вместе с тем — бесконечное множество аргументов φ, связанных с аргументом φ_0 равенством (1).

Аргумент φ_0 комплексного числа z, удовлетворяющий неравенству $0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$, обозначается символом $\arg z$.



Черт. 179

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь клетчатой бумагой, построить на плоскости комплексные числа по модулю и аргументу:

1) $|z| = 3$, $\arg z = \frac{\pi}{4}$;
2) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{5\pi}{6}$;
3) $|z| = 4$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$;
4) $|z| = \frac{1}{2}$, $\arg z = \frac{7\pi}{4}$;
5) $|z| = 3$, $\arg z = \pi$;
6) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{3\pi}{2}$;
7) $|z| = 1$, $\operatorname{Arg} z = \frac{11\pi}{2}$;
8) $|z| = 5$, $\operatorname{Arg} z = -\frac{3\pi}{4}$.

2. Найти эти комплексные числа с помощью построенных чертежей.

4. Нахождение комплексного числа по его модулю и аргументу и обратная задача. Если φ есть действительное число, а r — положительное число, то, приняв число φ за аргумент, а число r за модуль некоторого комплексного числа z, можно построить один и только один радиус-вектор OP, изображающий комплексное число z, а также и найти это число.

В самом деле, если искомое комплексное число z есть $(a; b)$, то, как видно из чертежа 180, между числами a и b и числами r и φ существуют следующие зависимости:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi. \tag{1}$$

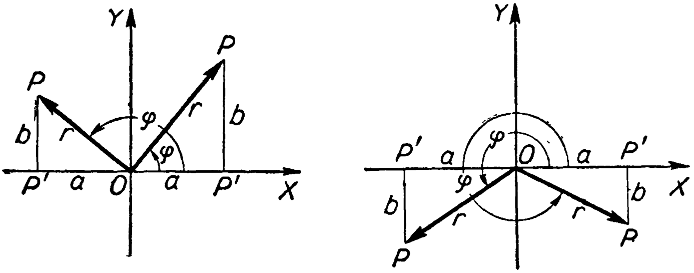
Эти зависимости имеют место для любого из положений точки P.

Если точка P расположена в I четверти, то из прямоугольного треугольника POP' находим:

$$\overline{OP'}=\overline{OP}\cdot\cos\angle P'OP,\quad \overline{P'P}=\overline{OP}\,.\,\sin\angle P'OP,$$

т. е.

$$(1)\qquad a=r\cos\varphi,\ b=r\sin\varphi.$$



Черт. 180

Если же точка P расположена во II, III или IV четверти, то, замечая, что $\angle P'OP$ прямоугольного треугольника имеет соответственно значения

$$\pi-\varphi,\quad \varphi-\pi,\quad 2\pi-\varphi,$$

и учитывая знаки чисел a и b в каждой из этих четвертей, придем к тому же выводу.

Наконец, если точка P расположена на оси OX, то

$$\text{либо } \varphi=0,\ a=r,\ b=0;\ \text{либо } \varphi=\pi,\ a=-r,\ b=0;$$

если же точка P расположена на оси OY, то

$$\text{либо } \varphi=\frac{\pi}{2},\ a=0,\ b=r;\ \text{либо } \varphi=\frac{3\pi}{2},\ a=0,\ b=-r,$$

так что и в этих случаях формулы (1) имеют место.

Обратно, если $(a;\,b)$ есть данное комплексное число, где $a\neq0$ и $b\neq0$, то для нахождения его модуля r и аргумента φ достаточно решить систему уравнений (1) по отношению к r и φ. Именно:

$$a^2+b^2=r^2,\quad r=+\sqrt{a^2+b^2};\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a};$$

из последнего уравнения можно найти два значения угла φ, удовлетворяющие требованию

$$0\leqslant\varphi<2\pi.$$

Если мы выберем из этих двух значений то, которое принадлежит

I четверти при $a>0$ и $b>0$;

II четверти при $a<0$ и $b>0$;

III четверти при $a<0$ и $b<0$;

IV четверти при $a>0$ и $b<0$,

и обозначим его через φ_0, то каждый из углов φ, представляемых формулой

$$\varphi=\varphi_0+2n\pi,$$

и будет аргументом данного комплексного числа $(a;\, b)$.

Если дано комплексное число $(a;\, 0)$, то при $a>0$

$$r=a, \quad \varphi=0+2n\pi,$$

а при $a<0$

$$r=-a, \; \varphi=\pi+2n\pi.$$

Если дано комплексное число $(0;\, b)$, то при $b>0$

$$r=b, \; \varphi=\frac{\pi}{2}+2n\pi,$$

а при $b<0$

$$r=-b, \; \varphi=\frac{3\pi}{2}+2n\pi.$$

Примеры.

1) Если $|z|=3$, $\arg z=\frac{\pi}{4}$, то

$$a=3\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}, \; b=3\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$z=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

2) Если $|z|=1$, $\arg z=\frac{5\pi}{3}$, то

$$a=1\cdot\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}, \; b=1\cdot\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z=\left(\frac{1}{2};\, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

3) Если $z=(4;\, -4)$, то $r=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$;

$$\operatorname{tg}\varphi_0=-1, \text{ где } \frac{3\pi}{2}<\varphi_0<2\pi; \quad \varphi_0=\frac{7\pi}{4}.$$

4) Если $z=(4;3)$, то $r=\sqrt{16+9}=5$;

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{3}{4}, \text{ где } 0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}; \; \varphi_0=36^\circ 52'.$$

5) Если $z=(2\sqrt{3};\, 2)$, то $r=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$;

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ где } 0<\varphi_0<\frac{\pi}{2}; \varphi_0=\frac{\pi}{6}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти комплексное число z, зная, что

1) $|z| = 5$, $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; 2) $|z| = \frac{1}{3}$, $\arg z = \frac{5\pi}{6}$;

3) $|z| = 3$, $\arg z = \frac{\pi}{6}$; 4) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{11\pi}{6}$;

5) $|z| = 4$, $\arg z = 0$; 6) $|z| = \frac{3}{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$;

7) $|z| = 3$, $\arg z = \frac{3\pi}{2}$; 8) $|z| = 7$, $\arg z = \pi$.

Ответы. 1) $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{1}{6}\right)$; 3) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$; 4) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; 5) $(4; 0)$; 6) $\left(0; \frac{3}{2}\right)$; 7) $(0; -3)$; 8) $(-7; 0)$.

2. Найти модуль и аргумент комплексного числа:

1) $(-2; 2)$; 2) $(-5; -5)$; 3) $(-1; \sqrt{3})$; 4) $(0; 4)$; 5) $(6; 3)$; 6) $(12; 13)$.

Ответы. 1) $2\sqrt{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; 2) $5\sqrt{2}$; $\frac{5\pi}{4}$; 3) 2; $\frac{2\pi}{3}$; 4) 2; $\frac{\pi}{2}$; 5) $3\sqrt{5}$; 27°34′; 6) 5; 47°18′.

5. Сопряженные комплексные числа.

Определение 5. Комплексные числа $(a; b)$ и $(a; -b)$, действительные части которых совпадают, а мнимые отличаются только знаком, называются (взаимно) сопряженными комплексными числами.

Комплексное число, сопряженное с комплексным числом z, обозначается через $\bar{z}$. Например, если $z = (2; 3)$, то $\bar{z} = (2; -3)$; если $z = (-1; 5)$, то $\bar{z} = (-1; -5)$. Если z есть действительное число, то сопряженное с ним число равно ему: $\bar{z} = z$, так как мнимая часть числа z равна нулю.

Так как комплексное число $(a; b)$ изображается точкой P координатной плоскости, имеющей абсциссу a и ординату b, а сопряженное с ним комплексное число $(a; -b)$ — точкой P' той же плоскости, имеющей абсциссу a и ординату $-b$, то точки P и P' и радиусы-векторы OP и OP', изображающие взаимно сопряженные комплексные числа, симметрично расположены относительно оси OX (черт. 181).

Модули двух сопряженных чисел $(a; b)$ и $(a; -b)$ имеют одно и то же значение $\sqrt{a^2+b^2}$:

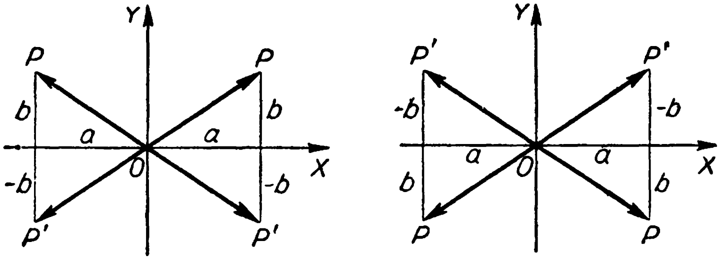
$$|z| = |\bar{z}|,$$

а аргументы их, принадлежащие промежутку $(0, 2\pi)$, дополняют друг друга до 2π:

$$\arg z + \arg \bar{z} = 2\pi.$$

Например, если $z=\left(\frac{5}{2};\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, то $|z|=5$, $\arg z=\frac{\pi}{3}$; в этом случае найдем, что

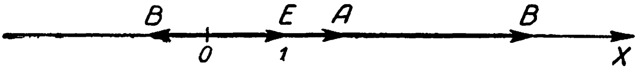
$$\bar{z}=\left(\frac{5}{2};\ -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right);\ |\bar{z}|=5,\ \arg\bar{z}=\frac{5\pi}{3}.$$



Черт. 181

§ 3. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. **Сложение комплексных чисел.** Как мы знаем (гл. I, § 3, п. 5), сумма двух рациональных чисел a и b определялась как алгебраическое значение направленного отрезка OB, равного сумме направленных отрезков OA и AB, изображающих числа a и b (черт. 182).



Черт. 182

Но направленные отрезки представляют собой не что иное, как векторы, расположенные на числовой оси. Поэтому для установления понятия о сумме двух комплексных чисел мы также прибегнем к изображению их векторами.

Именно суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2, изображаемых векторами OP_1 и OP_2, мы будем считать то комплексное число z, которое изображается радиусом-вектором OP, представляющим собой сумму векторов OP_1 и OP_2 (черт. 183).

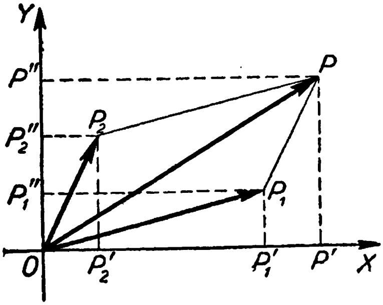
Перед тем как приступить к дальнейшим рассуждениям, вспомним: 1) что проекция вектора PQ, заданного на координатной плоскости, на какую-либо из осей есть направленный отрезок $P'Q'$, имеющий определенное алгебраическое значение $\overline{P'Q'}$; 2) что проекции равных векторов на одну и ту же ось равны между собой и, следовательно, имеют равные алгебраические значения, т. е. если вектор PQ равен вектору RS, то

$$P'Q'=R'S' \text{ и } \overline{P'Q'}=\overline{R'S'}.$$

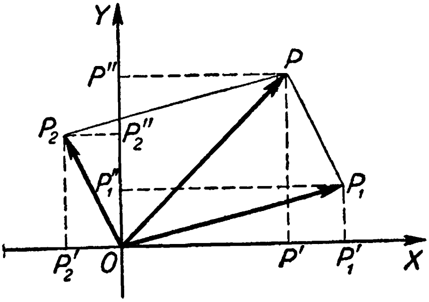
Если $z_1=(a_1;\ b_1)$ и $z_2=(a_2;\ b_2)$, а $z=(x;\ y)$, то из чертежа 183, где OP есть диагональ параллелограмма, построенного на сторонах OP_1 и OP_2, последовательно найдем:

$$x=\overline{OP'}=\overline{OP_1'}+\overline{P_1'P'}=\overline{OP_1'}+\overline{OP_2'}=a_1+a_2;$$

$$y=\overline{OP''}=\overline{OP_2''}+\overline{P_2''P''}=\overline{OP_2''}+\overline{OP_1''}=b_2+b_1.$$



Черт. 183



Черт. 184

Следовательно, вектор OP изображает комплексное число $(a_1+a_2;\ b_1+b_2)$.

К этому выводу мы придем независимо от того, в какой четверти расположен каждый из векторов OP_1 и OP_2. Например, в случае, представленном на чертеже 184, мы найдем тот же результат, если, выполняя указанные выше вычисления для x и y, примем во внимание, что алгебраические значения направленных отрезков $P_1'\ P'$, OP_2' — отрицательные числа и что направленные отрезки $P_2''P''$ и OP_1'', как проекции равных векторов P_2P и OP_1, равны.

Итак, независимо от того, как расположены векторы OP_1 и OP_2, изображающие комплексные числа $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$, вектор OP, являющийся суммой векторов OP_1 и OP_2, изображает комплексное число $(a_1+a_2;\ b_1+b_2)$. Это дает основание принять следующее определение.

Определение 1. Суммой двух комплексных чисел $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$ называется комплексное число $(a_1+a_2;\ b_1+b_2)$, действительная часть которого равна сумме действительных частей слагаемых, а мнимая часть — сумме мнимых частей слагаемых:

$$(1)\qquad (a_1;\ b_1)+(a_2;\ b_2)=(a_1+a_2;\ b_1+b_2).$$

Примеры.

1) $(3;\ 2)+(8;\ 1)=(11;\ 3)$;
2) $(4;\ -6)+(5;\ 2)=(9;\ -4)$;
3) $(-3;\ 7)+(2;\ -12)=(-1;\ -5)$;
4) $(2,\ -6)+4=(2;\ -6)+(4;\ 0)=(6;\ -6)$;
5) $(-5;\ 3)+(2;-3)=(-3;\ 0)=-3$.

Так как

$$(a;\ b)+(a;\ -b)=(2a;\ 0)=2a,$$

то оказывается, что сумма двух сопряженных комплексных чисел всегда есть действительное число; это легко проверить на чертеже: суммой векторов, изображающих сопряженные комплексные числа, служит вектор, расположенный на оси OX, т. е. вектор, изображающий действительное число.

Обратим внимание на то, что если два действительных числа a и b мы представим в виде комплексных чисел $(a;\ 0)$ и $(b;\ 0)$, то их сумма $(a+b;\ 0+0)$, найденная по правилу (1), совпадает с суммой $a+b$, найденной посредством сложения действительных чисел a и b, так как

$$(a+b;\ 0+0)=(a+b;\ 0)=a+b.$$

Сумма нескольких комплексных чисел понимается так же, как сумма нескольких действительных чисел, т. е. как число, получаемое посредством последовательного сложения слагаемых в том порядке, в котором они заданы; например,

$$z_1+z_2+z_3+z_4=[(z_1+z_2)+z_3]+z_4.$$

При установленном определении сложения комплексных чисел сохраняются все общие свойства сложения действительных чисел:

1) свойство переместительности:

$$(a_1;\ b_1)+(a_2;\ b_2)=(a_2;\ b_2)+(a_1;\ b_1),$$

так как

$$a_1+a_2=a_2+a_1;\quad b_1+b_2=b_2+b_1;$$

2) свойство сочетательности:

$$(a_1;\ b_1)+[(a_2;\ b_2)+(a_3;\ b_3)]=[(a_1;\ b_1)+(a_2;\ b_2)]+(a_3;\ b_3),$$

так как

$$a_1+(a_2+a_3)=(a_1+a_2)+a_3,\quad b_1+(b_2+b_3)=(b_1+b_2)+b_3;$$

3) основное свойство нуля:

$$(a;\ b)+0=(a;\ b)+(0;\ 0)=(a+0;\ b+0)=(a;\ b).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти сумму комплексных чисел:

1) $(3;\ -7)+(-8;\ -1)$; 2) $(-4;2)+(0;5)$; 3) $5+(3;\ -2)$; 4) $-5+(0;3)$; 5) $(3;\ -2\sqrt{2})+(-5;\sqrt{2})$; 6) $(-3;\ -6)+(2;\ -1)+(8;\ -5)$; 7) $(7;\ 2)+(-3;\ 5)+(1;2)+4$.

2. Доказать, что

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2},$$

т. е. что число, сопряженное с суммой двух чисел, равно сумме чисел, сопряженных со слагаемыми.

3. Доказать, что если $z_1=z_2$, то $z_1+z_3=z_2+z_3$.

Указание к упражнениям 2 и 3. Положить $z_i=(a_i;\ b_i)$, где $i=1, 2, 3$.

2. Умножение комплексных чисел. Для того чтобы установить понятие о произведении комплексных чисел, сначала рассмотрим тот частный случай, когда комплексные числа являются действительными числами.

Если $z_1=(a_1;\ 0)$ и $z_2=(a_2;\ 0)$, то

$$z_1\ z_2=(a_1;\ 0)\cdot(a_2;\ 0)=a_1\cdot a_2=(a_1\ a_2;\ 0).$$

Проследим, как связан модуль произведения с модулями сомножителей и аргумент произведения с аргументами сомножителей:

1) Так как z_1, z_2 и $z_1\ z_2$ — действительные числа, то их модули сводятся к абсолютным значениям этих чисел:

$$|z_1|=|a_1|\ ,\ |z_2|=|a_2|\ ,\ |z_1\ z_2|=|a_1\ a_2|.$$

Но абсолютное значение произведения действительных чисел равно произведению абсолютных значений сомножителей:

$$|a_1a_2|=|a_1|\cdot|a_2|.$$

Поэтому $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, т. е. модуль произведения двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен произведению модулей сомножителей.

2) Так как z_1, z_2 и $z_1\ z_2$ — действительные числа, то их аргументы зависят от их знаков:

а) если $a_1>0$, $a_2>0$, то

$$\operatorname{Arg} z_1=2k\pi,\quad \operatorname{Arg}\ z_2=2l\pi\ ;$$

б) если $a_1>0$, $a_2<0$, то

$$\operatorname{Arg} z_1=2k\pi,\quad \operatorname{Arg} z_2=\pi+2l\pi.$$

в) если $a_1<0$, $a_2<0$, то

$$\operatorname{Arg} z_1=\pi+2k\pi,\quad \operatorname{Arg} z_2=\pi+2l\pi;$$

в случае 2а) имеем: $z_1\ z_2=a_1a_2>0$, так что число z_1z_2 изображается вектором, за аргумент которого можно принять число $2(k+l)\pi$; в случае 2б) имеем: $z_1z_2=a_1a_2<0$, так что число z_1z_2 изображается вектором, за аргумент которого можно принять число $\pi+2(k+l)\pi$; в случае 2в) имеем: $z_1z_2=a_1a_2>0$, так что число z_1z_2 изображается вектором, за аргумент которого можно принять число $2\pi+2(k+l)\pi$; поэтому во всех случаях имеем:

$$\operatorname{Arg}\ (z_1z_2)=\operatorname{Arg}\ z_1+\operatorname{Arg} z_2.$$

Выводы, к которым мы пришли при рассмотрении произведения комплексных чисел вида $(a;\ 0)$, дают основание принять следующее определение.

Определение 2. Произведением двух комплексных чисел $(a_1;\ b_1)$ и $(a_2;\ b_2)$ называется такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей, а аргумент — сумме аргументов сомножителей.

Исходя из этого определения, найдем произведение двух комплексных чисел. Для этого построим радиус-вектор, изображающий это произведение.

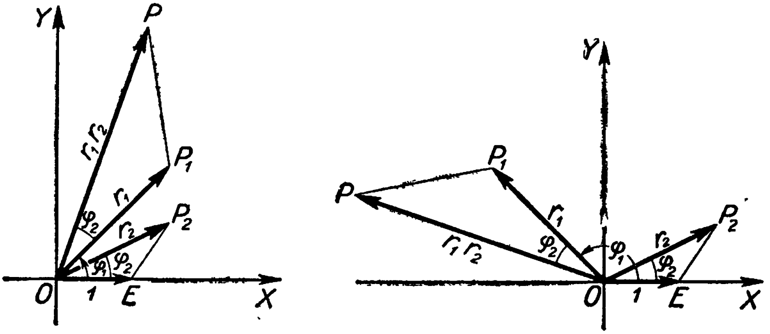
Если $z_1=(a_1;\ b_1)$, $z_2=(a_2;\ b_2)$, то

$$|z_1|=r_1=\sqrt{a_1^2+b_1^2}\qquad |z_2|=r_2=\sqrt{a_2^2+b_2^2}.$$

Обозначим $\arg z_1$ и $\arg z_2$ соответственно через φ_1 и φ_2 (черт. 185). Пусть числа z_1 и z_2 изображаются соответственно векторами OP_1 и OP_2, а число 1 — вектором OE.

Если мы, принимая отрезок OP_1 за сторону, сходственную стороне OE, построим треугольник OP_1P, подобный треугольнику OEP_2, то вектор OP будет иметь длину $\overline{OP}$, удовлетворяющую пропорции:

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OP_1}}=\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OE}}.$$



Черт. 185

Но $\overline{OP_1}=r_1$, $\overline{OP_2}=r_2$, $\overline{OE}=1$; следовательно, $\overline{OP}=r_1r_2$, т. е. длина вектора OP равна произведению длин r_1 и r_2 векторов OP_1 и OP_2, изображающих числа z_1 и z_2.

При этом вектор OP образует с осью OX угол POE, равный сумме углов POP_1 и P_1OE. Но по построению

$$\angle P_1OE=\varphi_1, \quad \angle P_2OE=\varphi_2, \quad \angle POP_1=\angle P_2OE=\varphi_2.$$

Следовательно,

$$\angle POE=\varphi_1+\varphi_2.$$

Итак, вектор OP изображает комплексное число, модуль которого равен произведению модулей комплексных чисел z_1 и z_2, а аргумент—сумме аргументов этих чисел, т. е. комплексное число, которое является произведением чисел z_1 и z_2.

Важно заметить, что вектор OP, изображающий произведение z_1z_2 чисел z_1 и z_2, может быть так получен из вектора OP_1, изображающего множимое z_1, как вектор OP_2, изображающий множитель z_2, получен из единичного вектора OE. В самом деле, вектор OP_2 может быть получен из вектора OE посредством поворота этого вектора на угол φ_2 и растяжения его в r_2 раз; точно так же вектор OP может быть получен из вектора OP_1 посредством поворота этого вектора на угол φ_2 и растяжения его в r_2 раз, после чего вектор OP будет составлять с осью OX угол $\varphi_1+\varphi_2$ и иметь длину r_1r_2.

Пользуясь этим выводом, мы сейчас найдем произведение комплексных чисел $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$, изображаемых векторами OP_1 и OP_2.

Для этого, заметив, что

$$a_1=r_1 \cos \varphi_1,\ b_1=r_1 \sin \varphi_1;\ a_2=r_2 \cos \varphi_2,\ b_2=r_2 \sin \varphi_2,$$

и обозначая искомое произведение через $(x; y)$, последовательно найдем:

$$x=\overline{OP}\cdot\cos(\varphi_1+\varphi_2)=r_1 r_2(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2-\sin\varphi_1 \sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2-r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2=a_1a_2-b_1b_2;$$

$$y=\overline{OP}\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)=r_1r_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2+r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2=b_1a_2+a_1b_2.$$

Итак,

(2) $$(a_1; b_1)\cdot(a_2; b_2)=(a_1 a_2-b_1 b_2;\ a_1 b_2+a_2 b_1).$$

Примеры.

1) $(4; 7)\cdot(2; 1)=(4\cdot2-7\cdot1;\ 4\cdot1+7\cdot2)=(1; 18);$

2) $(-2; 3)\cdot(5; -6)=(-10+18;\ 12+15)=(8; 27);$

3) $(1; -4)\cdot(-8; 3)=(-8+12;\ 3+32)=(4; 35).$

Так как

$$(a;\ b)\cdot(a; -b)=(a^2+b^2;\ 0)=a^2+b^2,$$

то оказывается, что произведение двух сопряженных комплексных чисел всегда есть действительное число, равное квадрату модуля каждого из сомножителей.

К тому же выводу можно прийти, найдя модуль произведения сопряженных чисел:

$$|(a; b)\cdot(a; -b)|=|(a;\ b)|\cdot|(a; -b)|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=a^2+b^2$$

и заметив, что

$$\arg(a;\ b)+\arg(a;\ -b)=2\pi.$$

Обратим внимание на то, что если два действительных числа a и b мы представим в виде комплексных чисел $(a;\ 0)$ и $(b;\ 0)$, то их произведение $(ab-0;\ 0+0)$, найденное по правилу (2), совпадает с произведением ab, найденным посредством умножения действительных чисел, так как

$$(ab-0;\ 0+0)=(ab;\ 0)=ab.$$

Произведение нескольких комплексных чисел понимается так же, как произведение нескольких действительных чисел, т. е. как число, получаемое посредством последовательного умножения сомножителей в том порядке, в котором они заданы; например,

$$z_1 z_2 z_3 z_4=[(z_1 z_2) z_3] z_4.$$

При установленном определении умножения комплексных чисел сохраняются все общие свойства умножения действительных чисел:

1) свойство переместительности:

$$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1;$$

2) свойство сочетательности:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3;$$

3) свойство распределительности:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3;$$

4) основное свойство единицы:

$$z \cdot 1 = z.$$

Доказательства этих тождеств будут приведены ниже. Пока же ограничимся проверкой их на примерах.

Примеры.

1) $(2;\ 3) \cdot (4;5) = (-7;\ 22)$; $(4;5) \cdot (2;\ 3) = (-7;\ 22)$.

2) $(1;\ -2) \cdot [(-3;\ 5) \cdot (-4;\ -6)] = (1;\ -2) \cdot (42;\ -2) = (38;\ -86)$;
$[(1;\ -2) \cdot (-3;\ 5)]\ (-4;\ -6) = (7;\ 11)\ (-4;\ -6) = (38;\ -86)$.

3) $[(7;\ -10) + (-3;\ 8)](2;5) = (4;-2)\ (2;\ 5) = (18;\ 16)$;
$(7;-10)\ (2;5) + (-3;\ 8)\ (2;\ 5) = (64;\ 15) + (-46;\ 1) = (18;\ 16)$.

4) $(a;\ b) \cdot 1 = (a;\ b)\ (1;\ 0) = (a;\ b)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

т. е. что число, сопряженное с произведением двух чисел, равно произведению чисел, сопряженных с сомножителями.

2. Пусть $z = (2;\ 1)$. Найти z^2, z^3, z^4.

3. Найти произведение $(1;\ -3) \cdot (-2;2)$ с помощью построения и проверить результат вычислением.

§4. МНИМАЯ ЕДИНИЦА

1. Определение мнимой единицы. Действия над комплексными числами приобретут значительно более удобную и привычную форму, если мы введем в употребление мнимую единицу.

Определение. Комплексное число (0; 1) называется **мнимой единицей**. Оно обозначается буквой i (начальной буквой латинского слова imaginarius, имеющего значение — мнимый):

$$i = (0;\ 1).$$

Мнимая единица изображается точкой P, имеющей абсциссу 0 и ординату 1.

Мнимая единица обладает следующим важным свойством: квадрат мнимой единицы равен —1: $i^2 = -1$.

В самом деле,

$$i^2 = (0;\ 1)^2 = (0;1) \cdot (0;1) = (0-1;\ 0+0) = (-1;\ 0) = -1.$$

2. Другая форма комплексного числа. Используя мнимую единицу, можно каждое комплексное число $(a;\ b)$ представить в новой форме.

Для того чтобы выполнить это, заметим, что

1) $(a;\ b)=(a;\ 0)+(0;\ b)$ (§ 3, п. 1);

2) $(0;\ b)=(b;\ 0)\cdot(0;\ 1)$ (§ 3, п. 2).

Поэтому

$$(a;\ b)=(a;\ 0)+(b;\ 0)\cdot(0;\ 1)=a+bi \quad (\S\ 4,\ \text{п. } 1).$$

Итак, каждое комплексное число $(a;\ b)$ есть сумма действительного числа a и произведения действительного числа b на мнимую единицу i.

Пользуясь этим обозначением комплексного числа, мы можем представить установленные выше (§ 3) правила действий над комплексными числами в следующей форме:

1) $(a+bi)+(c+di)=(a;\ b)+(c;\ d)=(a+c;\ b+d)=(a+c)+(b+d)i,$

т. е.

$$(1) \qquad (a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$

2) $(a+bi)(c+di)=(a;\ b)(c;\ d)=(ac-bd;\ ad+bc)=(ac-bd)+$ $+(ad+bc)i,$

т. е.

$$(2) \qquad (a+bi)\ (c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Формула (1) указывает, что для нахождения суммы двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ достаточно найти по правилам алгебры сумму двучленов $a+bi$ и $c+di$ и в полученном многочлене выполнить приведение подобных членов, содержащих букву i.

Формула (2) указывает, что для нахождения произведения двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ достаточно найти по правилам алгебры произведение двучленов $a+bi$ и $c+di$ и в полученном многочлене выполнить приведение подобных членов, содержащих букву i, и заменить множитель i^2 числом -1.

Примеры.

1) $(1+6i)+(-2+3i)+(4-5i)=3+4i;$

2) $(4+7i)(2+i)=8+18i+7i^2=8+18i-7=1+18i;$

3) $(-2+3i)(5-6i)=-10+27i-18i^2=-10+27i+18=8+27i.$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить:

1) $(6-i)\ (11+5i)$; 2) $(-3-2i)\ (-1+i)$; 3) $(1+2i)\ (2-5i)$; 4) $2i(-3+3i)$; 5) $(2-7i)\ (-4i)$.

Ответы.

1) $71+19i$; 2) $5-i$; 3) $12-i$; 4) $-6-6i$; 5) $-28-8i$.

2. Пусть $z=2+i$. Вычислить z^2, z^3, z^4.

Ответы. $3+4i$; $2+11i$; $-7+24i$.

3. Пусть $z=2+i$. Найти посредством построения на клетчатой бумаге числа z^2, z^3, z^4.

§ 5. ВЫЧИТАНИЕ И ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. Вычитание комплексных чисел. Вычитание комплексных чисел имеет тот же смысл, что и вычитание действительных чисел: вычесть из числа z_1 число z_2 — значит найти такое число z_3, которое удовлетворяет равенству

$$(1) \qquad z_1 = z_2 + z_3$$

Если

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i,$$

то, обозначая искомое число z_3 через $x+yi$, мы придадим равенству (1) сначала вид

$$(a_2 + b_2 i) + (x + yi) = a_1 + b_1 i,$$

а затем вид

$$(2) \qquad (a_2 + x) + (b_2 + y)\, i = a_1 + b_1 i.$$

Согласно определению 3 (§ 2), это равенство может выполняться только для тех систем значений неизвестных x и y, которые служат решениями системы уравнений:

$$(3) \qquad \begin{cases} a_2 + x = a_1, \\ b_2 + y = b_1. \end{cases}$$

Решив систему (3), мы найдем, что при всех значениях действительных частей a_1 и a_2 и мнимых частей b_1 и b_2 данных комплексных чисел z_1 и z_2 эта система имеет одно и только одно решение

$$(4) \qquad x = a_1 - a_2, \quad y = b_1 - b_2.$$

Мы пришли к выводу, что разность $z_1 - z_2$ чисел z_1 и z_2 существует и имеет единственное значение

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i.$$

Таким образом, в области комплексных чисел вычитание всегда выполнимо и однозначно.

Именно для нахождения разности комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ достаточно найти по правилам алгебры разность двучленов $a+bi$ и $c+di$ и в полученном многочлене выполнить приведение подобных членов, содержащих букву i.

Примеры.

1) $(5 - 8i) - (-3 + 4i) - (1 + 2i) = 7 - 14i$;

2) $(2a - 3bi) - (5a - 9bi) = -3a + 6bi$.

2. Противоположные комплексные числа.

Определение. Комплексное число, при сложении которого с числом z получается в сумме число 0, называется противоположным числу z.

Очевидно, что если $z=a+bi$, то число, противоположное числу z, имеет вид $(-a-bi)$, так как

$$(a+bi)+(-a-bi)=0+0i=0.$$

Поэтому

$$(-a-bi)=0-z.$$

В то же время

$$(-a-bi)=(-1)\cdot(a+bi)=(-1)\cdot z.$$

Ввиду этого число, противоположное числу z, обозначают через $-z$.

Как и в области действительных чисел, вычитание какого-либо комплексного числа может быть заменено прибавлением к уменьшаемому числа, противоположного вычитаемому. В самом деле,

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i;$$

$$(a+bi)+(-c-di)=(a-c)+(b-d)\,i.$$

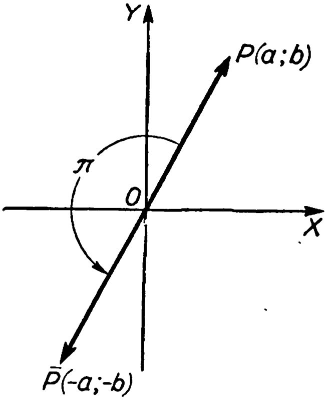
Этим положением выгодно пользоваться при вычитании. Например:

$$(3-5i)-(-4+8i)=(3-5i)+(4-8i)=7-13i.$$

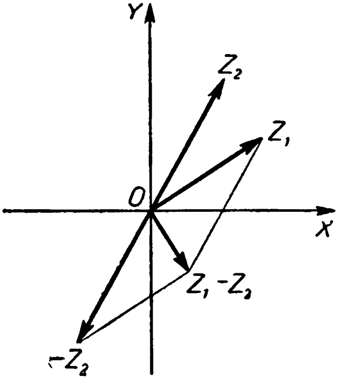
Какой точкой и каким вектором изображается число $-z$, противоположное числу z?

Пусть $z=a+bi$. Тогда число z изображается точкой P с координатами a, b и соответствующим этой точке радиусом-вектором OP.

Но $-z=-a-bi$. Следовательно, число $-z$, противоположное числу z, изображается: 1) точкой $\bar{P}$ с координатами $-a$, $-b$, т. е. точкой, симметричной точке P относительно начала координат O, и 2) радиусом-вектором $O\bar{P}$, который может быть получен из радиуса-вектора OP посредством вращения его вокруг центра O на угол π (черт. 186).



Черт. 186



Черт. 187

Зная, как строятся точка и вектор, изображающие число $-z$, можно легко построить точку и вектор, изображающие разность $z_1 - z_2$ чисел z_1 и z_2. Именно, исходя из того, что

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2),$$

мы сводим построение вектора, изображающего число $z_1 - z_2$, к построению: 1) вектора, изображающего число $-z_2$, и 2) суммы векторов, изображающих числа z_1 и $(-z_2)$, что выполняется по правилу параллелограмма (черт. 187).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти посредством построения на клетчатой бумаге разности:

   1) $(5 + i) - (-1 - 2i)$;

   2) $(-1 + 4i) - (3 + i)$

и проверить результаты вычислением.

2. Найти модули и аргументы тех же разностей и построить эти разности по их модулям и аргументам.

3. Деление комплексных чисел. Деление комплексных чисел имеет тот же смысл, что и деление действительных чисел: разделить число z_1 на число z_2 — значит найти такое число z_3, которое удовлетворяет равенству

$$z_2 z_3 = z_1. \tag{1}$$

Если

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i,$$

то, обозначая искомое число z_3 через $x + yi$, мы придадим равенству (1) сначала вид

$$(a_2 + b_2 i)(x + yi) = a_1 + b_1 i,$$

а затем вид

$$(a_2 x - b_2 y) + (b_2 x + a_2 y)i = a_1 + b_1 i. \tag{2}$$

Согласно определению 3 (§ 2), это равенство может выполняться только для тех систем значений неизвестных x и y, которые служат решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} a_2 x - b_2 y = a_1, \\ b_2 x + a_2 y = b_1. \end{cases} \tag{3}$$

Решив систему (3), мы найдем, что при условии

$$a_2^2 + b_2^2 \neq 0 \tag{4}$$

она имеет одно и только одно решение

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \tag{5}$$

Условие (4) означает, что одно, по крайней мере, из чисел a_2 и b_2 отлично от нуля, т. е. что $z_2 \neq 0$.

Мы пришли к выводу, что если делитель z_2 отличен от нуля, то частное от деления числа z_1 на число z_2 существует и имеет единственное значение

$$\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\,i. \tag{6}$$

Если же $z_2=0$, но $z_1\neq 0$, т. е.

$$a_2=0,\quad b_2=0,\quad a_1\neq 0 \quad\text{или}\quad b_1\neq 0,$$

то первое или второе уравнение системы (3) и, следовательно, система (3) не имеет решений.

Таким образом, в области комплексных чисел деление на число, отличное от нуля, всегда выполнимо и однозначно, но деление на нуль числа, отличного от нуля, невозможно.

Пример. Разделить число $2+i$ на число $1+3i$.

Решение. Принимая во внимание, что здесь

$$a_1=2,\ b_1=1,\ a_2=1,\ b_2=3,$$

по формуле (6) находим, что

$$\frac{2+i}{1+3i}=\frac{2+3}{1+9}+\frac{1-6}{1+9}\,i=\frac{5}{10}-\frac{5}{10}\,i=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,i.$$

4. Основное свойство частного (дроби). Практический прием деления. Формулу деления (6) довольно трудно запомнить. Поэтому на практике для выполнения деления пользуются следующим свойством частного (дроби): если делимое (числитель) z_1 и делитель (знаменатель) z_2 мы умножим на одно и то же отличное от нуля число z, то частное (дробь) не изменит своего значения, т. е.

$$(z_1z):(z_2z)=z_1:z_2.$$

Это свойство частного (дроби) легко доказать. Пусть

$$z_1:z_2=z_3.$$

Для того чтобы проверить, служит ли число z_3 частным также и при делении числа z_1z на число z_2z, умножим делитель z_2z на число z_3:

$$(z_2z)z_3=z_2zz_3=z_2z_3z=(z_2z_3)z=z_1z;$$

мы получили в произведении делимое z_1z; следовательно, частное z_3, полученное при делении числа z_1 на z_2, служит также частным и при делении числа z_1z на число z_2z.

Как видим, основное свойство частного (дроби), имеющее место в области действительных чисел, сохраняется и в области комплексных чисел.

Воспользуемся этим свойством для выполнения деления комплексных чисел.

Допустим, что требуется найти частное от деления числа a_1+b_1i на число a_2+b_2i, т. е. значение дроби

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}. \tag{7}$$

Согласно только что установленному основному свойству дроби, дробь (7) не изменит своего значения, если мы ее числитель и знаменатель умножим на число a_2-b_2i, сопряженное со знаменателем, т. е.

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)};$$

выполнив действия, найдем, что

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1\cdot a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1\cdot b_2)i}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\,i,$$

т. е. опять придем к формуле (6).

Примеры.

1) $\frac{2+i}{1+3i}=\frac{(2+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{5-5i}{10}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i;$

2) $\frac{1+3i}{2+i}=\frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{5+5i}{5}=1+i;$

3) $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,i$ (ср. примеры 1 и 2);

4) $\frac{6-i}{i}=\frac{(6-i)(-i)}{1}=-1-6i;$

5) $\frac{i}{6-i}=\frac{i(6+i)}{37}=\frac{-1+6i}{37}=-\frac{1}{37}+\frac{6}{37}\,i;$

6) $\frac{1}{-1-6i}=-\frac{1}{1+6i}=-\frac{1-6i}{37}=-\frac{1}{37}+\frac{6}{37}\,i$

(ср. примеры 4 и 5).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить дроби:

1) $\frac{1+i}{3-i}$; 2) $\frac{5i}{2+i}$; 3) $\frac{18}{\sqrt{5}-2i}$; 4) $\frac{3+4i}{i}$.

Ответы. 1) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$; 2) $1+2i$; 3) $2\sqrt{5}+4i$; 4) $4-3i$.

2. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}2x-iy=1+i,\\(2-i)x+y=2i.\end{cases}$$

Ответ.

$$x=\frac{-1+5i}{13},\quad y=\frac{-3+15i}{13}.$$

5. Построение частного. Для того чтобы построить точку и вектор, изображающие частное $\frac{z_1}{z_2}$ от деления числа z_1 на число

z_2, сначала найдем, в какой зависимости находится модуль частного от модулей делимого и делителя и аргумент частного от аргументов делимого и делителя.

1) Если $\frac{z_1}{z_2} = z_3$, то $z_1 = z_2 \cdot z_3$.

Мы знаем (§ 3, п. 2), что

$$|z_1| = |z_2 \cdot z_3| = |z_2| \cdot |z_3|;$$

следовательно,

$$|z_3| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \text{ т. е. } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Итак, модуль частного равен частному от деления модуля делимого на модуль делителя.

2) Мы знаем также (§ 3, п. 2), что если $z_1 = z_2 \cdot z_3$, то

$$\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg}(z_2 \cdot z_3) = \operatorname{Arg} z_2 + \operatorname{Arg} z_3;$$

следовательно,

$$\operatorname{Arg} z_3 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2,$$

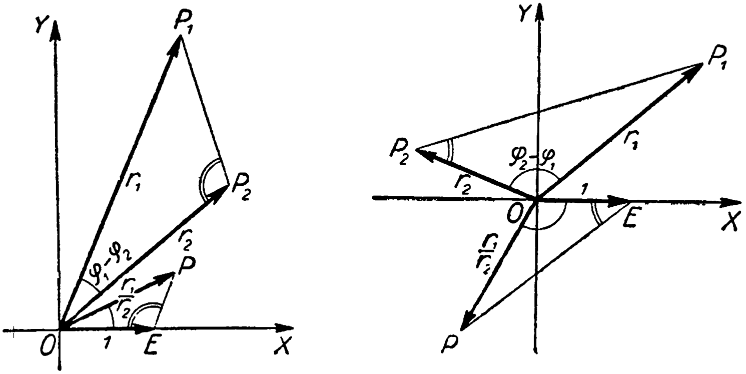
т. е.

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

Итак, аргумент частного равен разности между аргументом делимого и аргументом делителя.

Эти сведения о модуле и аргументе частного позволяют найти построение точки и вектора, изображающих частное $\frac{z_1}{z_2}$ от деления числа z_1 на число z_2.

Пусть числа z_1 и z_2 изображаются соответственно точками P_1 и P_2 и векторами OP_1 и OP_2 (черт. 188).



Черт. 188

Полагая

$$\overline{OP_1} = r_1,\ \overline{OP_2} = r_2,\ \overline{OE} = 1,\ \angle P_1OE = \varphi_1,\ \angle P_2OE = \varphi_2$$

и принимая во внимание, что искомый вектор, изображающий частное $\frac{z_1}{z_2}$, должен составлять с осью OX угол $\varphi_1 - \varphi_2$, т. е. угол, равный разности углов P_1OE и P_2CE, мы строим луч OP, составляющий с осью OX угол P_1OP_2 (с учетом его знака), а затем из точки E проводим прямую EP так, чтобы угол OEP оказался равным углу OP_2P_1.

Очевидно, что в результате этого построения мы получим треугольник OEP, подобный треугольнику OP_1P_2.

Из этих треугольников мы найдем, что

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OP_2}},$$

т. е. что

$$\frac{\overline{OP}}{1} = \frac{r_1}{r_2},\quad \overline{OP} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Следовательно, вектор OP будет иметь длину $\frac{r_1}{r_2}$ и составлять с осью OX угол $\varphi_1 - \varphi_2$, т. е. он будет изображать комплексное число, имеющее модуль $\frac{r_1}{r_2}$ и аргумент $\varphi_1 - \varphi_2$. А таким числом как раз и является число $\frac{z_1}{z_2}$.

Итак, для того чтобы построить вектор, изображающий частное от деления числа z_1 на число z_2, достаточно построить треугольник OP_1P_2, имеющий вершины O, z_1, z_2, а затем, принимая единичный отрезок за сторону, сходственную со стороной OP_2, и учитывая знак угла P_1OP_2, построить треугольник OEP, подобный треугольнику OP_1P_2; вектор OP и будет искомым вектором, изображающим частное $\frac{z_1}{z_2}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Построить частные

$$1)\ \frac{1+i}{3-i};\quad 2)\ \frac{5i}{2+i};$$

затем вычислить их и проверить выполненные построения.

2) Построить число $\frac{1}{4+3i}$.

§ 6. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1. **Тригонометрическая форма комплексного числа.** Как мы знаем (§ 2, п. 3 и 4), каждое комплексное число имеет модуль и аргумент Именно, если $z = a + bi$, то при $a \neq 0$, $b \neq 0$ модуль числа z есть положительное число r, равное $+\sqrt{a^2 + b^2}$, а аргумент числа z есть то значение угла φ, которое удовлетворяет системе уравнений:

$$a = r \cdot \cos\varphi, \quad b = r \cdot \sin\varphi$$

и принадлежит промежутку $(0; 2\pi)$.

Поэтому каждое комплексное число $a + bi$ может быть представлено в форме:

$$a + bi = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Пример 1. Если $z = 3 + 3i\sqrt{3}$, то

$$r = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6; \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}; \ \varphi = \frac{\pi}{3};$$

поэтому

$$3 + 3i\sqrt{3} = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Пример 2. Если $z = 4$, то представляем число 4 в виде

$$4 + 0 \cdot i = 4(\cos 0 + i\sin 0).$$

Пример 3. Если $z = 4i$, то представляем число $4i$ в виде

$$0 + 4i = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 4. Если $z = -4$, то представляем число -4 в виде

$$-4 + 0 \cdot i = 4(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Пример 5. Если $z = -4i$, то представляем число $-4i$ в виде

$$0 - 4i = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Указание. При решении примеров 2—5 может помочь привлечение равенств:

$$1 = \cos 0 + i\sin 0; \quad -1 = \cos\pi + i\sin\pi;$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}; \quad -i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2},$$

которые легко найти из геометрических соображений, учтя модули и аргументы чисел 1, -1, i, $-i$.

УПРАЖНЕНИЯ

Представить в тригонометрической форме числа:

1) $-4 + 4i$; 2) $-1 - i\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{3} - 2i$; 4) $5 + 5i$; 5) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$;
6) $3i$; 7) $-5i$; 8) -10; 9) 2; 10) $3 + 6i$.

Ответы.

1) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 2) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$;

3) $4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{4}\right)$; 4) $5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; 6) $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

7) $5\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; 8) $10(\cos\pi+i\sin\pi)$;

9) $2(\cos 0+i\sin 0)$; 10) $\sqrt{45}\left(\frac{3}{\sqrt{45}}+i\frac{6}{\sqrt{45}}\right)=$

$=\sqrt{45}\,(\cos 63^\circ 26'+i\sin 63^\circ 26')$.

2. Умножение комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме.

Если

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

то

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+$$
$$+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2)]=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Оказалось, как и следовало ожидать, что модуль произведения z_1z_2 чисел z_1 и z_2 равен произведению r_1r_2 модулей r_1 и r_2 сомножителей, а аргумент этого произведения равен сумме $\varphi_1+\varphi_2$ аргументов φ_1 и φ_2 сомножителей.

Имея в виду этот вывод, сразу найдем, что если числа z_1, z_2, z_3 имеют соответственно модули r_1, r_2, r_3 и аргументы φ_1, φ_2, φ_3, то

$$z_1z_2z_3=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\cdot r_3(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3)=$$
$$=r_1r_2r_3[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)].$$

Вообще, применив метод математической индукции, докажем, что если

$$z_k=r_k(\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k),\ \text{где}\ k=1,2,\dots,n,$$

то

$$z_1z_2\dots z_n=r_1\cdot r_2\dots r_n[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n)].$$

Примеры.

1) $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 4\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=12\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$;

2) $\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)=$

$=2\left(\cos\frac{17}{6}\pi+i\sin\frac{17}{6}\pi\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

$$3)\ 4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2i=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2}+\right.$$
$$\left.+\,i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить:

1) $7\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$;

2) $\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

3) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$;

4) $5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{5}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

5) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

6) $7\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

7) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot(-4i)$;

8) $2\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)\cdot(-3)$.

Ответы. 1) $21\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$; 2) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}\right)$; 4) $\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}$; 5) $6i$; 6) $-\frac{7}{4}$;

7) $4\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; 8) $6\left(\cos\frac{8\pi}{7}+i\sin\frac{8\pi}{7}\right)$.

3. Деление комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме. Если

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=$$
$$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Оказалось, как и следовало ожидать, что модуль частного $\frac{z_1}{z_2}$ от деления числа z_1 на число z_2 равен частному от деления модуля r_1 делимого на модуль r_2 делителя, а аргумент этого частного равен разности $\varphi_1 - \varphi_2$ между аргументом φ_1 делимого и аргументом φ_2 делителя.

Примеры.

1) $$\frac{8\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

2) $$\frac{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}{3\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}=\frac{1}{3}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right);$$

3) $$\frac{5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2i}=\frac{5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}=$$
$$=\frac{5}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить:

1) $\dfrac{12\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}{3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$; 2) $\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}}$;

3) $\dfrac{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}{5\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}$; 4) $\dfrac{4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{2i}$;

5) $\dfrac{2\left(\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)}$.

Ответы. 1) $4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 2) $2\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$;
3) $-\frac{1}{5}i$; 4) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 5) $\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$.

4. **Возведение комплексного числа в степень.** Если в формуле, по которой находится произведение n комплексных чисел, мы положим:

$$z_1=z_2=\ldots=z_n=z,\quad r_1=r_2=\ldots=r_n=r,\quad \varphi_1=\varphi_2=\ldots=\varphi_n=\varphi,$$

то придем к формуле

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Из этой формулы следует, что при возведении комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в целую положительную степень n модуль этого числа возводится в степень n, а аргумент умножается на показатель степени n.

Представив выведенную формулу в виде

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

и разделив обе части этого тождества на r^n, найдем формулу

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

называемую *формулой Муавра*.

Примеры.

1) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^4 = 16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right);$

2) $\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$

3) $\left[3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right]^2 = 9\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right) = 9\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислить выражения:

1) $\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^3;$ 2) $\left[4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^2;$

3) $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6.$

Ответы. 1) $\frac{1}{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 2) $16i$; 3) -1.

5. Приложение формулы Муавра. Пользуясь формулой Муавра, можно вывести формулы для косинусов и синусов кратных углов.

1°. По формуле Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Но

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2i\sin\varphi\cdot\cos\varphi.$$

Поэтому

$$(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2i\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Из равенства этих двух комплексных чисел следует (§2, п. 2), что

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi;\ \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi,$$

как это известно из тригонометрии.

2°. По формуле Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Но

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi + 3i^2\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi = \\ = (\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi) + i(3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Поэтому

$$(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi) + i(3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi) = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi;$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

3°. По формуле Муавра

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi.$$

Но

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = [(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2]^2 = [(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + \\ + 2i\cdot\sin\varphi\cdot\mathrm{cof}\,\varphi]^2 = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^2 - 4\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi + \\ + 4i\sin\varphi\cdot\cos\varphi\,(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi - 2\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi - \\ - 4\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi + 4i(\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi - \sin^3\varphi\cdot\cos\varphi).$$

Следовательно,

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi + \sin^4\varphi;$$
$$\sin 4\varphi = 4(\sin\varphi\cdot\cos^3\varphi - \sin^3\varphi\cdot\cos\varphi).$$

6. Извлечение квадратного корня из отрицательного числа. Если $-a$ есть действительное отрицательное число, то, рассматривая его как комплексное число, мы можем представить его в виде $-a + 0\cdot i$.

Допустим, что существует комплексное число $x + yi$, квадрат которого равен числу $-a + 0\cdot i$:

$$(x + yi)^2 = -a + 0\cdot i. \tag{1}$$

Сделав это допущение, последовательно найдем:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -a + 0\cdot i;$$
$$x^2 - y^2 = -a,\ 2xy = 0. \tag{2}$$

Из равенства $2xy = 0$ следует, что либо $x = 0$, либо $y = 0$.

Если $x = 0$, то $-y^2 = -a$, $y^2 = a$, $y = \pm\sqrt{a}$.

Если $y = 0$, то $x^2 = -a$, что невозможно.

Итак, если существует комплексное число $x + yi$, удовлетворяющее равенству (1), то этим числом является либо число $+ i\sqrt{a}$, либо число $- i\sqrt{a}$.

Возведя каждое из этих чисел в квадрат, найдем, что

$$(3) \qquad (+ i\sqrt{a})^2 = -a, \quad (-i\sqrt{a})^2 = -a.$$

Следовательно, требованию (1) удовлетворяют оба эти числа и притом только эти числа.

Но равенства (3) могут быть представлены в виде

$$\sqrt{-a} = \pm i\sqrt{a}.$$

Мы пришли к выводу, что в области комплексных чисел существуют два и только два числа, которые являются квадратными корнями из отрицательного числа $-a$. Эти числа представляют собой произведения арифметического квадратного корня из положительного числа a на числа $+i$ и $-i$.

Например:

$$\sqrt{-9} = \pm 3i; \quad \sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}.$$

7. **Решение квадратного уравнения, имеющего отрицательный дискриминант.** Если коэффициенты a, b, c квадратного уравнения

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$, — действительные числа, а его дискриминант D имеет положительное значение или значение 0, то корни этого уравнения могут быть найдены по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Теперь рассмотрим тот случай, когда дискриминант D этого квадратного уравнения имеет отрицательное значение:

$$D = b^2 - 4ac < 0.$$

Мы вновь (гл. III, § 1, п. 2) представим уравнение (1) в виде

$$(2) \qquad a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0.$$

Так как, по условию, $b^2 - 4ac$ есть отрицательное число, то, как мы установили в п. 6, квадратный корень из числа $b^2 - 4ac$ имеет 2 значения. Обозначим через $\sqrt{b^2 - 4ac}$ одно из этих значений (безразлично какое). Тогда уравнение (2) можно будет заменить сначала уравнением

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] = 0,$$

а затем уравнением

$$(3) \qquad a\left[x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right]\left[x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right] = 0.$$

Так как $a \neq 0$, то уравнение (3) равносильно совокупности уравнений

$$x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0, \quad x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0,$$

которые приводят к тем же формулам:

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

по которым решалось квадратное уравнение, имеющее положительный дискриминант или дискриминант, равный нулю.

Но в то время, как в случаях $D \geqslant 0$ радикал $\sqrt{b^2-4ac}$ обозначал арифметический квадратный корень из положительного числа $b^2 - 4ac$, в случае $D < 0$ этот радикал обозначает один из двух (безразлично какой) мнимых квадратных корней из отрицательного числа $b^2 - 4ac$.

Например, уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ имеет корни:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

а уравнение $3x^2 - 2x + 3 = 0$ — корни:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-8}}{3} = \frac{1 \pm 2i\sqrt{2}}{3}.$$

Теорема. Если корнем квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

с действительными коэффициентами a, b, c служит комплексное число $\alpha + \beta i$, то и комплексное число $\alpha - \beta i$, сопряженное с числом $\alpha + \beta i$, служит корнем этого уравнения.

Доказательство. Так как

$$a(\alpha + \beta i)^2 + b(\alpha + \beta i) + c = 0,$$

то

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c = 0, \quad 2a\alpha\beta + b\beta = 0.$$

Поэтому

$$a(\alpha - \beta i)^2 + b(\alpha - \beta i) + c =$$
$$= a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c - (2a\alpha\beta + b\beta) = 0 - 0 = 0.$$

Следовательно, число $\alpha - \beta i$ есть корень данного квадратного уравнения.

Например, если одним из корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами является корень $\frac{1}{2 + i\sqrt{5}}$, то, принимая во внимание, что

$$\frac{1}{2 + i\sqrt{5}} = \frac{2 - i\sqrt{5}}{9} = \frac{2}{9} - i\frac{\sqrt{5}}{9},$$

заключаем, что и число $\frac{2}{9}+i\frac{\sqrt{5}}{9}$ является корнем того же уравнения, которое в силу этого имеет вид

$$\left(x-\frac{2}{9}+i\frac{\sqrt{5}}{9}\right)\left(x-\frac{2}{9}-i\frac{\sqrt{5}}{9}\right)=0,$$

т. е. вид

$$9x^2-4x+1=0.$$

УПРАЖНЕНИЯ И ВОПРОСЫ

1. Верны ли равенства:

1) $\sqrt{-25}+\sqrt{-49}=5i+7i=12i$;

2) $\sqrt{-16}\cdot\sqrt{-19}=4i\cdot 3i=12i^2=-12$;

3) $(\sqrt{a+bi})^2=\sqrt{(a+bi)^2}$?

2. Написать два комплексных числа, обладающих тем свойством, что 1) их сумма, 2) их произведение, 3) их сумма и произведение — действительные числа.

3. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы комплексное число $a+bi$ было равно: 1) своему сопряженному числу, 2) числу, обратному по отношению к сопряженному.

4. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы произведение двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ было: 1) действительным числом, 2) чисто мнимым числом.

5. Тот же вопрос относительно частного двух комплексных чисел.

6. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее одним из корней выражение $\frac{5+i\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}}$.

7. Найти числовое значение многочлена:

$$z^4+iz^3-(1+2i)z^2+3z+1+3i$$

при $z=2+3i$.

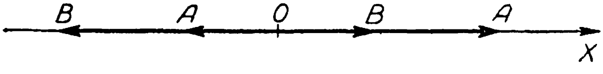
ГЛАВА XII

НЕРАВЕНСТВА

§ 1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. **Основные понятия и теоремы.** При изучении целых и дробных чисел в арифметике мы называли число a бо́льшим, чем число b, в том случае, если число a можно было рассматривать как сумму числа b и некоторого целого или дробного числа c; это соответствовало нашему представлению о том, что непрерывная величина A, изображаемая отрезком прямой, больше, чем величина B, если величину A можно представить в виде суммы (соединения) величины B и некоторой величины C.

При изучении рациональных чисел в алгебре мы называли число a бо́льшим, чем число b, в том случае, если число a можно было рассматривать как сумму числа b и некоторого положительного числа c; это соответствовало нашему представлению о том, что направленная непрерывная величина A, изображаемая направленным отрезком, расположенным на оси, больше, чем такая же величина B, если для получения отрезка OA, изображающего величину A, надо к отрезку OB, изображающему величину B, прибавить положительный отрезок BA, т. е. переместиться от конца отрезка B в положительном направлении на отрезок BA (черт. 189).



Черт. 189

Этот геометрический признак наличия соотношения «больше» между рациональными числами был распространен на область действительных чисел: именно из двух действительных чисел a и b бо́льшим считается то, которому на числовой оси соответствует точка, расположенная вправо от точки, соответствующей другому числу; иначе говоря, если числам a и b на числовой оси соответствуют точки A и B, то $a>b$ при расположении BA этих точек.

Но это означает, что $a>b$, если $a=b+c$, где c — положительное число, так как перемещение по числовой оси от точки B до точки A вправо равносильно прибавлению к вектору OB вектора BA, алгебраическое значение которого есть положительное число.

Мы установили смысл соотношения «больше» между действительными числами. Аналогично может быть установлен смысл соотношения «меньше» между действительными числами. В соответствии с этим мы имеем основание принять следующие определения:

Определение 1. Если разность $a-b$ чисел a и b есть нуль, то число a называют равным числу b. Это соотношение между числами a и b обозначают знаком $=$:

$$a=b.$$

Определение 2. Если разность $a-b$ чисел a и b есть положительное число, то число a называют бóльшим, чем число b. Это соотношение между числами a и b обозначают знаком $>$:

$$a>b.$$

Определение 3. Если разность $a-b$ чисел a и b есть отрицательное число, то число a называют меньшим, чем число b. Это соотношение между числами a и b обозначают знаком $<$:

$$a<b.$$

Следствия.

1. Каждое положительное число больше, чем 0, а каждое отрицательное число меньше, чем 0.

Обратно, каждое число, большее, чем 0, — положительное, а каждое число, меньшее, чем 0, — отрицательное.

В самом деле, если a — положительное (отрицательное) число, то и разность $a-0$ — положительное (отрицательное) число; поэтому $a>0$ $(a<0)$ (определения 2 и 3).

Обратно, если $a>0$, то $a-0>0$ и, следовательно, a — положительное число (определение 2); если же $a<0$, то $a-0<0$ и, следовательно, a — отрицательное число (определение 3).

В силу следствия 1 утверждение, что a — положительное (отрицательное) число, записывают так: $a>0$ $(a<0)$, а запись $a>0 (a<0)$ понимают так, что a — положительное (отрицательное) число.

2. Если a и b — действительные числа и α и β — их абсолютные значения, то

при условиях	имеет место соотношение:
$a>0,\ b>0,\ \alpha>\beta$	$a>b$;
$a<0,\ b<0,\ \alpha>\beta$	$a<b$;
$a>0,\ b>0,\ a>b$	$\alpha>\beta$;
$a<0,\ b<0,\ a<b$	$\alpha>\beta$,

т. е. если a и b — положительные (отрицательные) числа, то бо́льшему абсолютному значению соответствует большее (меньшее) число и, обратно, большему числу соответствует большее (меньшее) абсолютное значение.

Это можно доказать, опираясь на определения 2 и 3, но можно также установить, основываясь на том, что абсолютное значение числа указывает расстояние изображающей его точки от начала координат.

На определениях 1 — 3 основаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если $a = b$, то и $b = a$.

Это следует из того, что если $a - b = 0$, то и $b - a = 0$.

Замечание. Теорема 1 обнаруживает, что соотношение равенства между числами обладает свойством обратимости.

Это свойство принадлежит ряду соотношений между объектами. Так, пересечение, параллелизм, перпендикулярность прямых, касание двух окружностей, конгруентность и подобие фигур и тел, соотношение «по ту же сторону, что и», соотношение «вне» в геометрии, уравновешивание двух физических тел — обратимые соотношения.

Теорема 2. Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.

Это следует из того, что если разность $a - b$ есть положительное (отрицательное) число, то разность $b - a$ есть отрицательное (положительное) число.

Теорема 3. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

В самом деле, если $a = b$ и $b = c$, то $a - b = 0$ и $b - c = 0$; следовательно, $(a - b) + (b - c) = 0$, т. е. $a - c = 0$; поэтому $a = c$ (определение 1).

Теорема 4. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

В самом деле, если $a > b$ и $b > c$, то каждая из разностей $a - b$ и $b - c$ есть положительное число; поэтому и сумма $(a - b) + (b - c)$, т. е. разность $a - c$, есть положительное число; значит, $a > c$ (определение 2). Если же $a < b$ и $b < c$, то $c > b$ и $b > a$ (теорема 2); поэтому $c > a$, т. е. $a < c$ (теорема 2).

Замечание. Теоремы 3 и 4 обнаруживают, что соотношения равенства и неравенства между числами обладают свойством транзитивности.

Это свойство принадлежит ряду соотношений между объектами. Так, параллельность прямых, конгруентность и подобие фигур и тел, уравновешивание физических тел, соотношения «предшествует и следует», «раньше и позже» — транзитивные соотношения («транзитивный» — значит «переходящий»: соотношение, связывающее объекты A и B и объекты B и C, благодаря наличию общего объекта B «переходит» на объекты A и C).

Следствие 3. Каждое положительное число больше каждого отрицательного числа.

Действительно, если a — положительное, а b — отрицательное число, то $a > 0$ (следствие 1) и $0 > b$ (следствие 2 и теорема 2); поэтому $a > b$ (теорема 4).

Определение 4. Если число a связано с числом b соотношением «больше» или соотношением «меньше», то наличие этого соотношения указывают соответственно в виде обозначений

$$a > b \text{ или } a < b$$

и каждое из этих обозначений называют арифметическим неравенством.

Два арифметических неравенства, содержащие один и тот же знак неравенства ($>$ или $<$), называются неравенствами одного и того же смысла; два арифметических неравенства, из которых одно содержит знак $>$, а другое — знак $<$, называются неравенствами противоположного смысла.

Число, находящееся слева от знака неравенства, называется его левой частью, а число, находящееся справа от знака неравенства, называется его правой частью.

2. Неравенства, вытекающие из одного данного неравенства.

Теорема 1. Если мы к обеим частям неравенства прибавим какое-либо число, то получим неравенство того же смысла, т. е.

$$\text{если } a > b, \text{ то } a + c > b + c.$$

Доказательство. Так как $a - b > 0$ (п. 1, определение 2), а $(a + c) - (b + c) = a - b$, то и $(a + c) - (b + c) > 0$; значит, $a + c > b + c$ (п. 1, определение 2).

Следствие. Если мы из обеих частей неравенства вычтем какое-либо число, то получим неравенство того же смысла.

Действительно, вычитание числа c выполняется посредством прибавления числа $-c$.

Теорема 1 выражает так называемое свойство монотонности суммы: при увеличении какого-либо слагаемого суммы эта сумма также увеличивается. В самом деле, если слагаемое b суммы $b + c$ мы заменим бо́льшим числом a, то сумма $b + c$ заменится большим числом $a + c$.

Иначе говоря, функция $y = x + c$ — возрастающая.

Теорема 1 допускает обращение в виде следующей теоремы.

Теорема 1 (обратная). Если $a + c > b + c$, то $a > b$.

В самом деле, если $a + c > b + c$, то $a + c - c > b + c - c$, т. е. $a > b$.

Итак, каждое из двух неравенств

$$a > b \text{ и } a + c > b + c$$

влечет за собой другое, или, как говорят, является следствием другого.

Теорема 2. Если мы обе части неравенства умножим на положительное число, то получим неравенство того же смысла; если же мы обе части неравенства умножим на отрицательное число, то получим неравенство противоположного смысла, т. е.

$$\text{если } a > b \text{ и } c > 0, \text{ то } ac > bc;$$

$$\text{если же } a > b \text{ и } c < 0, \text{ то } ac < bc.$$

Доказательство. Так как $a - b > 0$ (п. 1, определение 2), а $ac - bc = (a - b)c$, то в случае, если $c > 0$, находим, что $ac - bc > 0$, т. е. что $ac > bc$ (п. 1, определение 2), а в случае, если $c < 0$, находим, что $ac - bc < 0$, т. е. что $ac < bc$ (п. 1, определение 3).

Следствие. Если мы обе части неравенства разделим на положительное число, то получим неравенство того же смысла; если же мы обе части неравенства разделим на отрицательное число, то получим неравенство противоположного смысла, т. е.

$$\text{если } a > b \text{ и } c > 0, \text{ то } \frac{a}{c} > \frac{b}{c};$$

$$\text{если } a > b \text{ и } c < 0, \text{ то } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}.$$

Действительно, деление на число c может быть выполнено посредством умножения на число $\frac{1}{c}$, имеющее тот же знак, что и число c.

Теорема 2 выражает так называемое свойство монотонности произведения: 1) если один из двух сомножителей произведения есть число положительное, то при увеличении другого сомножителя произведение также увеличивается; 2) если же один из двух сомножителей произведения есть число отрицательное, то при увеличении другого сомножителя произведение уменьшается. В самом деле, если $c > 0$, то при замене сомножителя b произведения bc бо́льшим сомножителем a это произведение заменится бо́льшим произведением ac; если же $c < 0$, то при замене сомножителя b произведения bc бо́льшим сомножителем a это произведение заменится меньшим произведением ac.

Иначе говоря, функция $y = cx$ при условии $c > 0$ — возрастающая, а при условии $c < 0$ — убывающая.

Теорема 2 допускает обращение в виде следующей теоремы.

Теорема 2 (обратная). Если $ac > bc$ и $c > 0$, то $a > b$; если $ac > bc$ и $c < 0$, то $a < b$.

В самом деле, если $c > 0$, то $\frac{1}{c} > 0$; в этом случае $ac \cdot \frac{1}{c} > bc \cdot \frac{1}{c}$, т. е. $a > b$. Если же $c < 0$, то $\frac{1}{c} < 0$; в этом случае

$$ac \cdot \frac{1}{c} < bc \cdot \frac{1}{c}, \text{ т. е. } a < b.$$

Итак, при условии $c > 0$ каждое из двух неравенств

$$a > b \text{ и } ac > bc$$

является следствием другого, а при условии $c < 0$ каждое из двух неравенств

$$a > b \text{ и } ac < bc$$

является следствием другого.

Замечание. Общий смысл теорем 1 и 2 состоит в том, что, зная, в каком из соотношений $a > b$, $a < b$ находятся числа a и b, мы можем на основании этих теорем заранее сказать, в каком соотношении находятся суммы $a + c$ и $b + c$ и произведения ac и bc, которые получаются после прибавления к этим числам числа c или умножения их на это число.

3. Неравенства, вытекающие из двух данных неравенств.

Теорема 1. Если мы два или несколько неравенств одного и того же смысла почленно сложим, то получим неравенство того же смысла, т. е.

если $a > b$, $c > d$, $e > f$, то и $a + c + e > b + d + f$.

Доказательство. Так как $a - b > 0$, $c - d > 0$, $e - f > 0$, а $(a + c + e) - (b + d + f) = (a - b) + (c - d) + (e - f)$, то также и $(a + c + e) - (b + d + f) > 0$; поэтому $a + c + e > b + d + f$ (п. 1, определение 2).

Теорема 2. Если мы из неравенства какого-либо смысла почленно вычтем неравенство противоположного смысла, то получим неравенство того смысла, который имеет первое неравенство, т. е. если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

Доказательство. Так как $a - b > 0$ и $d - c > 0$, а $(a - c) - (b - d) = (a - b) + (d - c)$, то и $(a - c) - (b - d) > 0$; поэтому $a - c > b - d$ (п. 1, определение 2).

Теорема 3. Если два неравенства имеют один и тот же смысл и если левая часть одного из неравенств и правая часть другого неравенства имеют положительные (отрицательные) значения, то, почленно перемножив эти неравенства, получим неравенство того же (противоположного) смысла, т. е.

$$\text{если } a > b,\ c > d,\ a > 0,\ d > 0, \text{ то } ac > bd;$$

$$\text{если } a > b,\ c > d,\ a < 0,\ d < 0, \text{ то } ac < bd.$$

Доказательство. 1) Так как $a > 0$, то $ac > ad$ (п. 2, теорема 2); так как $d > 0$, то $ad > bd$ (п. 2. теорема 2); сопоставляя два полученных неравенства, находим, что $ac > bd$ (п. 1, теорема 4).

2) Так как $a < 0$, то $ac < ad$ (п. 2, теорема 2); так как $d < 0$, то $ad < bd$ (п. 2, теорема 2); сопоставляя полученные неравенства, находим, что $ac < bd$ (п. 1, теорема 4).

В случае, если $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ из неравенств одного и того же смысла

$$a > b \quad \text{и} \quad c > d,$$

следует неравенство

$$ac > bd$$

того же смысла.

Следствие. Если обе части неравенства имеют положительные (отрицательные) значения, то, возводя эти части в квадрат, получим неравенство того же (противоположного) смысла.

Действительно, возведение частей неравенства $a > b$ в квадрат есть не что иное, как почленное умножение неравенств

$$a > b, \quad a > b.$$

Теорема 4. Если части неравенства имеют одинаковые (неодинаковые) знаки, то, заменяя их обратными числами, получим неравенство противоположного (того же) смысла, т. е.

$$\text{если } a > b \text{ и } ab > 0, \text{ то } \frac{1}{a} < \frac{1}{b};$$

$$\text{если } a > b \text{ и } ab < 0, \text{ то } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Доказательство. 1) Так как $ab > 0$, то, почленно умножая неравенство $a > b$ на положительное число $\frac{1}{ab}$, получаем неравенство $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$ (п. 2, теорема 2); отсюда следует, что $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

2) Так как $ab < 0$, то, почленно умножая неравенство $a > b$ на отрицательное число $\frac{1}{ab}$, получаем неравенство $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$ (п. 2, теорема 2); отсюда следует, что $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Теорема 5. Если: 1) два неравенства имеют противоположный смысл, 2) части второго неравенства имеют одинаковые знаки и 3) левая часть одного из неравенств и правая часть другого неравенства имеют положительные (отрицательные) значения, то, почленно разделив эти неравенства, получим неравенство того смысла, который имеет первое (второе) неравенство, т. е.

$$\text{если } a > b, \ c < d; \ cd > 0; \ a > 0, \ d > 0, \text{ то } \frac{a}{c} > \frac{b}{d};$$

$$\text{если } a > b, \ c < d; \ cd > 0; \ a < 0, \ d < 0, \text{ то } \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

Доказательство. Так как $cd > 0$, то $\frac{1}{c} > \frac{1}{d}$ (теорема 4). Перемножая неравенства $a > b$ и $\frac{1}{c} > \frac{1}{d}$, получаем в случае $a > 0$, $d > 0$ неравенство $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ (теорема 3), а в случае $a < 0$, $d < 0$ — неравенство $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ (теорема 3).

В случае, если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ из неравенств противоположного смысла

$$a > b \text{ и } c < d,$$

следует неравенство

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$$

того смысла, который имеет первое неравенство.

Замечание к теоремам 1—5. Общий смысл теорем 1—5 состоит в том, что, зная, в каком из соотношений находятся пары чисел a, b и c, d, мы можем на основании этих теорем заранее сказать, в каком соотношении находятся произведения ac и bd и частные $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{d}$, которые получаются после выполнения над соответствующими членами этих пар действий умножения и деления.

Теорема 6. Если a и b — положительные числа и m — натуральное число, то из неравенства $a > b$ следует неравенство $a^m > b^m$.

Доказательство. Рассмотрим m неравенств:

$$a > b, \ a > b, \dots, a > b.$$

Так как левые и правые части их имеют положительные значения, то, применяя теорему 3, последовательно найдем, что

$$a^2 > b^2; \ a^3 > b^3; \ a^4 > b^4; \dots; \ a^m > b^m.$$

Теорема 6 (обратная). Если a и b—положительные числа и m—натуральное число, то из неравенства $a^m > b^m$ следует неравенство $a > b$.

Доказательство. Так как $a^m > b^m$, то $a^m - b^m > 0$ (п. 1, определение 2). Но

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}).$$

Второй множитель, полученный в результате разложения разности $a^m - b^m$ на множители, при данных условиях $a > 0$ и $b > 0$ имеет положительное значение. Поэтому произведение, в виде которого представлена эта разность, может иметь положительное значение только в том случае, если $a > b$.

Теорема 7. Если a и b — отрицательные числа и m — натуральное число, то при четном m из неравенства $a > b$ следует неравенство $a^m < b^m$, а при нечетном m — неравенство $a^m > b^m$.

Доказательство. Так как $a < 0$ и $b < 0$, то 1) $-a > 0$ и $-b > 0$ и 2) $-a < -b$ (п. 2, теорема 2). Поэтому $(-a)^m < (-b)^m$ (теорема 6).

Представляя это неравенство в виде

$$(-1)^m \cdot a^m < (-1)^m \cdot b^m,$$

заключаем, что при четном m имеет место неравенство $a^m < b^m$, а при нечетном m — неравенство $a^m < -b^m$, из которого следует неравенство $a^m > b^m$.

Теорема 8. Если a и b — положительные числа и m — натуральное число, превосходящее 1, то из неравенства $a > b$ следует неравенство $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$, где корни имеют арифметические значения.

Доказательство (способом от противного). Если мы допустим, что $\sqrt[m]{a} \leqslant \sqrt[m]{b}$, то, возведя обе части этого соотношения в степень m, мы придем к соотношению $a \leqslant b$, которое противоречит условию $a > b$.

Теорема 8 (обратная). Если a и b — положительные числа, а m — натуральное число, превосходящее 1, то из неравенства $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ следует неравенство $a > b$.

Доказательство. Принимая во внимание, что обе части неравенства $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$ — положительные числа, и почленно возведя это неравенство в степень m, найдем, что $a > b$ (теорема 6).

Примеры.

1) Умножить обе части неравенства $a^2 > b$ на b.

Решение. Если $b > 0$, то $a^2b > b^2$; если $b < 0$, то $a^2b < b^2$

2) Разделить обе части неравенства $a^2 - b^2 > a - b$ на $a - b$.

Решение. Если $a > b$, то $a + b > 1$; если $a < b$, то $a + b < 1$.

3) Возвести обе части неравенства а) $a > b$ в куб; б) $a > b$ в квадрат.

Решение. а) Если $ab > 0$ или $a > 0$, $b < 0$, то $a^3 > b^3$; случай $a < 0$, $b > 0$ невозможен.

б) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $a^2 > b^2$; если $a > 0$, $b < 0$, то результат зависит от абсолютных значений чисел a и b. Например, если $2 > -3$, то $4 < 9$; если $3 > -2$, то $9 > 4$.

4) Извлечь корень:

а) кубичный из обеих частей неравенств: $27 > 8$; $-125 < 64$; $-729 < -343$;

б) четвертой степени из обеих частей неравенства $625 < 2401$.

Решение. а) $3 > 2$; $-5 < 4$; $-9 < -7$;

б) $\sqrt{625} < \sqrt{2401}$; $25 < 49$; $5 < 7$.

5) Которая из двух сумм $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{3} + \sqrt{19}$ больше?

Решение. Для ответа на этот вопрос

а) найдем квадраты этих чисел:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 17 + 2\sqrt{70}; \quad (\sqrt{3} + \sqrt{19})^2 = 22 + 2\sqrt{57};$$

б) найдем квадраты чисел $2\sqrt{70}$ и $5 + 2\sqrt{57}$:

$$(2\sqrt{70})^2 = 280; \quad (5 + 2\sqrt{57})^2 = 253 + 20\sqrt{57}.$$

Так как $253 + 20\sqrt{57} > 280$, то (п. 3, теорема 6 обратная)

$$\sqrt{3} + \sqrt{19} > \sqrt{7} + \sqrt{10}.$$

в) Которая из двух сумм $\sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{6}$ и $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{24}$ больше?

Решение. Так как

$$\sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{6} = \sqrt{10} + 2\sqrt{2} + \sqrt{6},$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{24} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{6},$$

то достаточно сравнить суммы:

$$\sqrt{10} + \sqrt{2} \text{ и } \sqrt{3} + \sqrt{6}.$$

Находим:

$$(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2 = 12 + 4\sqrt{5}; \ (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 = 9 + 6\sqrt{2}.$$

Сравниваем числа $3 + 4\sqrt{5}$ и $6\sqrt{2}$:

$$(3 + 4\sqrt{5})^2 = 89 + 24\sqrt{5}; \ (6\sqrt{2})^2 = 72.$$

Следовательно, первая из данных сумм больше.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Умножить обе части неравенства

1) $m - 1 > a$ на m, где $m \neq 0$; 2) $18 - a^2 < 5$ на b^2; где $b \neq 0$.

Ответы. 1) Если $m > 0$, то $m^2 - m > am$; если $m < 0$, то $m^2 - 1 < am$. 2) $18b^2 - a^2b^2 < 5b^2$.

2. Разделить обе части неравенства

1) $a^3 < a^5$ на a^2; 2) $5a^3 < 15a^2$ на $-5a$.

Ответы. 1) $a < a^3$; 2) если $a > 0$, то $-a^7 > -3a$; если $a < 0$, то $-a^7 < -3a$.

3. Возвести обе части неравенства

1) $3 > -2$ в куб; 2) $-1 > -2$ в пятую степень; 3) $a - b < m$ в квадрат; 4) $a < b - 1$ в пятую степень.

Ответы. 1) $27 > -8$; 2) $-1 > -32$; 3) если $a - b > 0$ и $m > 0$, то $(a - b)^2 < m^2$; если $a - b < 0$ и $m < 0$, то $(a - b)^2 > m^2$; если $a - b < 0$, а $m > 0$, то результат зависит от абсолютных значений чисел $a - b$ и m; 4) если $a(b - 1) > 0$ или $a < 0$, $b - 1 > 0$, то $a^5 < (b - 1)^5$.

4. Извлечь корень:

1) кубичный из обеих частей неравенства $-64 < -27$;

2) четвертой степени из обеих частей неравенства $256 < 625$.

Ответы. 1) $-4 < -3$; 2) $4 < 5$.

5. Которая из двух сумм больше:

$$\sqrt{8} + \sqrt{12} \text{ или } \sqrt{2} + \sqrt{20}?$$

Ответ. Первая.

6. Можно ли сказать заранее, какого смысла неравенство получится при почленном сложении неравенств:

1) $8 > 5$, $-2 > -3$, $7 > -1$;

2) $8 > 5$, $2 < 3$, $-7 < 1$.

Ответы. 1) Можно; знак $>$; 2) нельзя.

7. Показать на примерах, что при почленном сложении двух неравенств противоположного смысла может получиться неравенство того смысла, который имеет: 1) первое неравенство, 2) второе неравенство, но может получиться и равенство.

8. Можно ли сказать заранее, какого смысла неравенство получится при почленном умножении неравенств:
1) $9 > 8$ и $4 > 1$; 2) $-9 < -8$; $-4 < -1$; 3) $9 > 8$ и $4 > -1$; 4) $-9 < 8$, $-4 < 1$.

Ответы. 1) Можно; знак $>$; 2) можно; знак $>$; 3) можно; знак $>$; 4) нельзя.

9. Показать на примерах, что при почленном умножении неравенств противоположного смысла может получиться неравенство того смысла, который имеет: 1) первое неравенство, 2) второе неравенство, но может получиться и равенство.

10. Придумать вопросы, аналогичные вопросам 6—9, относительно вычитания и деления неравенств.

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

1. Тождественные неравенства. Если о двух алгебраических выражениях A и B, содержащих одни и те же буквы, известно, что при определенных системах значений этих букв числовые значения выражений A и B связаны соотношением «больше» или соотношением «меньше», то наличие этого соотношения указывают соответственно в виде обозначений

$$A > B \text{ или } A < B$$

и каждое из этих обозначений называют тождественным алгебраическим неравенством.

Таким образом, тождественное алгебраическое неравенство надо понимать как утверждение, что при определенных условиях числовое значение одного выражения A больше или меньше, чем числовое значение другого выражения B.

Так как выражения A и B содержат одни и те же буквы, то они представляют собой не что иное, как функции одной и той же группы переменных. Поэтому каждое тождественное неравенство выражает утверждение, что две функции $f(x, y, z, \ldots)$ и $g(x, y, z, \ldots)$ от одних и тех же переменных $x, y, z, \ldots$ в некоторой определенной области имеют числовые значения, связанные соотношением «больше» или соотношением «меньше».

Например, тождественное неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 > xy + yz + zx$$

утверждает, что при всех попарно неравных действительных значениях переменных x, y, z числовое значение функции $x^2 + y^2 + z^2$ больше, чем числовое значение функции $xy + yz + zx$.

2. Доказательство тождественных неравенств. Так как каждое тождественное неравенство выражает некоторое утверждение, то для того, чтобы узнать, верно ли это утверждение или нет, необходимо доказать тождественное неравенство, т. е. установить его справедливость посредством рассуждений.

При этом область, которой должны принадлежать системы значений входящих в неравенство переменных для того, чтобы оно было справедливо, может быть либо указана при задании неравенства, либо найдена в процессе доказательства его.

Для доказательства тождественных неравенств употребляются различные способы; некоторые из них мы укажем на следующих примерах.

Пример 1. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$, то

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

Доказательство. Применим I способ.

1) Составим разность

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

и докажем, что она при данных условиях имеет положительное значение.

Так как $a > 0$, $b > 0$, то

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

При $a \neq b$ имеем: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0$. Следовательно,

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > 0$, $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ (§ 1, п. 1, определение 2).

2) Составим разность

$$\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b}.$$

Так как $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}.$$

При $a \neq b$ найденная разность имеет положительное значение. Следовательно (§ 1, п. 1, определение 2),

$$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

При доказательстве данных неравенств мы использовали тот факт, что если $a - b > 0$, то $a > b$ (§ 1, п. 1, определение 2), т. е. доказательство неравенства вида $A > B$ мы свели к доказательству неравенства вида $A - B > 0$.

Вместе с тем каждое из этих неравенств можно доказать и II способом.

1) Допустим, что неравенство

$$(1)\quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

верно. Оно может быть верно только при условиях $a > 0$ и $b > 0$, которые мы и примем. Исходя из сделанного предположения, мы последовательно найдем, что при принятых условиях верны неравенства

(2) $a+b>2\sqrt{ab}$ (§ 1, п. 2, теорема 2);
(3) $(a+b)^2>4ab$ (§ 1, п. 3, теорема 3, следствие);
(4) $(a+b)^2-4ab>0$ (§ 1, п. 2, теорема 1, следствие);
(5) $(a-b)^2>0$ (в силу преобразования);
(6) $a\neq b$.

Итак, при условиях $a>0$, $b>0$ из неравенства (1) вытекает неравенство (6). Следовательно, при этих условиях неравенство (6) является условием, **необходимым** для выполнения неравенства (1).

Докажем, что при условиях $a>0$, $b>0$ оно является вместе с тем и достаточным. Для этого, сохраняя условия $a>0$, $b>0$, проведем рассуждения в обратном порядке:

(6) $a\neq b$ (данное условие);
(5) $(a-b)^2>0$ (другая форма условия 6);
(4) $(a+b)^2-4ab>0$ (в силу преобразования);
(3) $(a+b)^2>4ab$ (§ 1, п. 2, теорема 1);
(2) $a+b>2\sqrt{ab}$ (§ 1, п. 3, теорема 8);
(1) $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ (§ 1, п. 2, теорема 2, следствие).

Примененный способ доказательства неравенства (1) состоял: 1) в нахождении условия, **необходимого** для выполнения подлежащего доказательству неравенства, и 2) в доказательстве того, что найденное необходимое условие является вместе с тем и **достаточным**.

2) Докажем тем же способом неравенство

(1) $\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$.

Это неравенство может выполняться только при условии $ab>0$.

а) Если $a<0$ и $b<0$, то $\sqrt{ab}>0$, а $\frac{2ab}{a+b}<0$, так что неравенство (1) справедливо.

б) Если же $a>0$ и $b>0$, то **допустим**, что при этих условиях оно справедливо. Тогда будут верны неравенства:

(2) $\sqrt{ab}\,(a+b)>2ab$;
(3) $\sqrt{ab}\,(a+b-2\sqrt{ab})>0$;
(4) $a+b-2\sqrt{ab}>0$;
(5) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0$;
(6) $a\neq b$.

Проведя рассуждение в обратном порядке, докажем, что при условиях $a>0$, $b>0$, $a\neq b$ неравенство (1) справедливо.

Итак, мы вновь сначала нашли, что при условиях $a>0$, $b>0$

для выполнения неравенства (1) необходимо условие $a \neq b$, а затем доказали его достаточность.

Тот метод рассуждения, на котором было построено применение II способа доказательства неравенств, представляет собой один из двух видов метода, называемого в науке аналитико-синтетическим; он состоит в том, что мы, допустив, что подлежащее доказательству соотношение верно, находим ряд соотношений, каждое из которых вытекает из предыдущего и поэтому является условием, необходимым для выполнения доказываемого соотношения (эта первая часть рассуждения называется анализом), а затем, остановившись на некотором необходимом условии, применяем обратный порядок рассуждения и устанавливаем, что это необходимое условие является вместе с тем и достаточным для выполнения доказываемого соотношения (эта вторая часть рассуждения называется синтезом).

Очевидно, что этот обратный переход может быть выполнен только в том случае, если каждое из соотношений, последовательно получаемых из сделанного допущения, не только влечет за собой следующее соотношение, но и, обратно, вытекает из него.

Такого же рода аналитико-синтетическое рассуждение мы применяем в геометрии при решении задач на построение и в алгебре при решении задач с помощью составления уравнений по их условиям.

Пример 2. Доказать неравенство

(1) $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca.$

Доказательство. Применим III способ.

Учитывая, что неравенство содержит квадраты и произведения чисел, заменяем неравенство (1) неравенством

(2) $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 > 2ab + 2bc + 2ca,$

из которого следует неравенство (1).

Неравенство (2) заменяем неравенством

(3) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 > 0,$

из которого следует неравенство (2).

Неравенство (3) выполняется, если

(4) либо $a \neq b$, либо $b \neq c$, либо $c \neq a$,

т. е. если имеет место одно, по крайней мере, из этих соотношений.

Так как

$(4) \rightarrow (3) \rightarrow (2) \rightarrow (1),$

где знак $\rightarrow$ обозначает «влечет за собой», то соотношение (4) является условием, достаточным для выполнения неравенства (1).

Итак, при условии (4) неравенство (1) выполняется.

Этот метод рассуждения представляет собой второй вид аналитико-синтетического метода. Он отличается от первого вида тем, что посредством аналитической части рассуждения мы ищем не необходимое, а достаточное условие выполнения доказываемого соотношения. Для этого мы заменяем это соотношение рядом соотношений, каждое из которых влечет за собой предыдущее и поэтому является условием, достаточным для выполнения доказываемого соотношения, до тех пор, пока не останавливаемся на некотором достаточном условии.

После этого выполняется синтетическая часть рассуждения, состоящая в последовательном проведении обратного перехода от найденного достаточного условия ко всем предыдущим соотношениям до тех пор, пока не будет установлено требуемое соотношение.

Ясно, что при применении этого второго вида аналитико-синтетического метода синтез проводится как бы в порядке проверки рассуждения, выполненного при проведении анализа, так как анализ раскрыл уже в сущности путь, по которому следует идти при доказательстве данного соотношения.

Пример 3. Доказать, что, если $a > b > c > 0$, и $a < b + c$, то

(1) $$abc > (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

Доказательство. Представив очевидные неравенства

$$a^2 > a^2 - (b - c)^2, \quad b^2 > b^2 - (c - a)^2, \quad c^2 > c^2 - (a - b)^2$$

соответственно в виде

$$a^2 > (a + b - c)(a - b + c),$$
$$b^2 > (b + c - a)(b - c + a),$$
$$c^2 > (c + a - b)(c - a + b),$$

заключаем, что при данных условиях все множители в правых частях этих неравенств имеют положительные значения. Поэтому

$$a^2b^2c^2 > (a + b - c)^2(b + c - a)^2(c + a - b)^2,$$

откуда

(1) $$abc > (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

Для доказательства неравенства (1) мы применили нетипичное рассуждение, связанное с особенностями данного примера.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать тождественные неравенства:

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$, где $a > 0$, $b > 0$.

2) $(a + b)(b + c)(c + a) > 8abc$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Указание. Воспользоваться зависимостью между средним арифметическим и средним геометрическим (см. пример 1).

3) $a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 > 6abc$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Указание. Перенести все члены в левую часть и представить член $-6abc$ в виде суммы $-2abc - 2abc - 2abc$.

4) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

Указание. Допустив, что $a > b > c$, использовать неравенства:

$$a > b - c,\ b > a - c,\ c > a - b.$$

5) $(a + b - c)^2 + (a + c - b)^2 + (b + c - a)^2 > ab + bc + ca$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Указание. Раскрыть скобки.

6) $\sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

7) $a^2 (b + c) + a (b^2 + c^2 - bc) > 0$, где $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

2. Доказать, что при всех значениях переменной x имеет место неравенство $x^2 - 8x + 22 > 6$.

3. Доказать, что если $a > b > 0$, то

$$\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{2ab - b^2} > a.$$

4. Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма гипотенузы и высоты больше полупериметра.

Указание. Ввести в рассмотрение проекции катетов на гипотенузу.

5. Доказать, что если m_a есть медиана, выходящая из вершины A треугольника, то

$$m_a^2 + bc > \frac{a^2}{4} > m_a^2 - bc.$$

3. Определение условных неравенств. Если относительно двух функций $f(x)$ и $g(x)$ ставится вопрос о том, при каких значениях независимой переменной x числовое значение функции $f(x)$ больше или меньше числового значения функции $g(x)$, то обозначения этих функций соединяют соответственно знаком $>$ или $<$ и составленное этим путем обозначение называют условным неравенством или неравенством, содержащим неизвестную.

Так же поступают всякий раз, когда речь идет о двух функциях от любого числа одних и тех же независимых переменных.

Таким образом, неравенство

$$F(x, y, z) \gtrless G(x, y, z)$$

выражает вопрос (или требование найти), при каких системах значений независимых переменных x, y, z числовое значение функции F соответственно больше или меньше числового значения функции G.

Область, в которой одновременно определены функции F и G, называется областью определения неравенства.

Определение 1. Каждая система значений переменных x, y, z, при которой числовое значение функции, составляющей левую часть условного неравенства, соответственно больше или меньше числового значения функции, составляющей правую часть этого условного неравенства, называется решением данного условного неравенства.

Вместо того чтобы говорить, что система $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ значений неизвестных x, y, z является решением данного условного неравенства, говорят, что эта система удовлетворяет неравенству.

Примеры.

1) Решением неравенства $x + 2 > 4 - x$ является каждое число, большее, чем 1, т. е. $x > 1$.

2) Решением неравенства $3 + x > 2\sqrt{3x}$ служит каждое неотрицательное число, кроме числа 3, т. е. $0 \leqslant x < 3$, $x > 3$.

3) Решением неравенства $x + y > 2\sqrt{xy}$ служит каждая пара неотрицательных неравных между собой чисел:

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x \neq y.$$

4. Равносильные условные неравенства. Решение условных неравенств опирается на теоремы о равносильных, или эквивалентных, неравенствах.

Определение. Если каждое решение одного условного неравенства есть вместе с тем решение другого условного неравенства и, обратно, каждое решение второго условного неравенства есть вместе с тем решение первого условного неравенства, то эти условные неравенства называются равносильными или эквивалентными.

Это определение можно заменить следующим:

Если каждая система значений неизвестных, удовлетворяющая одному условному неравенству, вместе с тем удовлетворяет и другому условному неравенству, но каждая система значений неизвестных, не удовлетворяющая первому условному неравенству, не удовлетворяет также и второму условному неравенству, то эти условные неравенства называются равносильными или эквивалентными.

Тождественность этих определений следует из того известного факта, что каждое предложение может быть преобразовано в другое предложение, обратно-противоположное первому.

Теорема 1. Если мы к обеим частям условного неравенства прибавим одно и то же число или одну и ту же функцию, имеющую смысл при всякой системе значений неизвестных, удовлетворяющей данному неравенству, и при этом сохраним знак этого неравенства, то мы получим новое условное неравенство, равносильное данному.

Кратко: к обеим частям условного неравенства можно прибавить одно и то же число или одну и ту же функцию, определенную в области, содержащей все решения данного неравенства.

Доказательство. Пусть

$$(1) \qquad f(x) > g(x)$$

будет данное условное неравенство. Докажем, что если мы прибавим к обеим частям этого неравенства функцию $\varphi(x)$, имеющую смысл при всяком значении неизвестной x, удовлетворяющем неравенству (1), и при этом сохраним знак неравенства, то получим новое неравенство

$$(2) \qquad f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x),$$

равносильное неравенству (1).

1°. Если α есть решение неравенства (1), то имеет место арифметическое неравенство

$$f(\alpha) > g(\alpha).$$

Так как функция $\varphi(x)$ имеет смысл при всяком значении неизвестной x, удовлетворяющем неравенству (1), то $\varphi(\alpha)$ есть определенное число.

Поэтому (§ 1, п. 2, теорема 1) имеет место и арифметическое неравенство

$$f(\alpha) + \varphi(\alpha) > g(\alpha) + \varphi(\alpha),$$

а из него следует, что решение неравенства (1) есть вместе с тем решение неравенства (2).

2°. Если β есть решение неравенства (2), то имеет место арифметическое неравенство

$$f(\beta) + \varphi(\beta) > g(\beta) + \varphi(\beta).$$

Поэтому (§ 1, п. 2,теорема 1, следствие) имеет место и арифметическое неравенство

$$f(\beta) > g(\beta),$$

а из него следует, что решение неравенства (2) есть вместе с тем решение неравенства (1).

Примеры.

1) Неравенства

$$2 - x < 7x - 9 \text{ и } 2 - x + \sqrt{x} < 7x - 9 + \sqrt{x}$$

равносильны, так как функция $\sqrt{x}$ имеет смысл при $x \geqslant 0$, а проверка показывает, что при $x < 0$ первое неравенство не удовлетворяется.

2) Неравенства

$$2 - x > 7x - 9 \text{ и } 2 - x + \sqrt{x} > 7x - 9 + \sqrt{x}$$

не равносильны, так как функция $\sqrt{x}$ определена в области $x \geqslant 0$, а все решения первого неравенства принадлежат области $x \leqslant \frac{11}{8}$, так что все отрицательные значения неизвестной x удовлетворяют первому неравенству, но не удовлетворяют второму.

Следствие из теоремы 1. Из одной части неравенства можно перенести в другую любое слагаемое, изменив при этом его знак на противоположный.

В самом деле, если неравенство имеет вид

$$f(x) + h(x) > g(x),$$

то, прибавив к обеим его частям слагаемое $-h(x)$, найдем неравенство

$$f(x) > g(x) - h(x),$$

которое, согласно теореме 1, будет равносильно первому.

Пользуясь этим следствием, можно заменить неравенство $2 - x < 7x - 9$ равносильным ему неравенством $8x > 11$, а неравенство $y - 3 > 2x + 1$ — неравенством $y > 2x + 4$.

Теорема 2а. Если мы обе части условного неравенства умножим на положительное число или на функцию, принимающую в области определения неравенства только положительные значения, и при этом сохраним знак данного неравенства, то получим новое условное неравенство, равносильное данному.

Кратко: обе части условного неравенства можно умножить на положительное число или на функцию, принимающую в области определения неравенства только положительные значения, сохраняя при этом знак данного неравенства.

Доказательство. Пусть

$$f(x) > g(x) \tag{1}$$

будет данное условное неравенство. Докажем, что если мы умножим обе части этого неравенства на положительное число или на функцию $\varphi(x)$, принимающую в области определения неравенства только положительные значения, и при этом сохраним знак данного неравенства, то получим новое неравенство

$$f(x) \cdot \varphi(x) > g(x) \cdot \varphi(x), \tag{2}$$

равносильное неравенству (1).

1°. Если α есть решение неравенства (1), то имеет место арифметическое неравенство

$$f(\alpha) > g(\alpha).$$

Так как функция $\varphi(x)$ в области определения неравенства принимает только положительные значения, то $\varphi(\alpha)$ есть определенное положительное число.

Поэтому (§ 1, п. 2, теорема 2) имеет место и арифметическое неравенство

$$f(\alpha) \cdot \varphi(\alpha) > g(\alpha) \cdot \varphi(\alpha),$$

а из него следует, что решение неравенства (1) есть вместе с тем решение неравенства (2).

2°. Если β есть решение неравенства (2), то имеет место арифметическое неравенство

$$f(\beta) \cdot \varphi(\beta) > g(\beta) \cdot \varphi(\beta).$$

Поэтому (§ 1, п. 2, теорема 2, следствие) имеет место и арифметическое неравенство

$$f(\beta) > g(\beta),$$

а из него следует, что решение неравенства (2) есть вместе с тем решение неравенства (1).

Теорема 2б. Если мы обе части условного неравенства умножим на отрицательное число или на функцию, принимающую в области определения неравенства только отрицательные значения, и при этом изменим знак данного неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Кратко: обе части условного неравенства можно умножить на отрицательное число или на функцию, принимающую в области определения неравенства только отрицательные значения, изменяя при этом знак неравенства на противоположный.

Доказательство. Пусть

$$(1) \qquad f(x) > g(x)$$

будет данное условное неравенство.

Если функция $\varphi(x)$ в области определения неравенства принимает только отрицательные значения, то функция $-\varphi(x)$ в той же области принимает только положительные значения. Поэтому (теорема 2а) неравенство

$$(2) \qquad -f(x)\cdot\varphi(x) > -g(x)\cdot\varphi(x)$$

равносильно неравенству (1). Но, согласно следствию из теоремы 1, неравенство (2) равносильно неравенству

$$g(x)\cdot\varphi(x) > f(x)\cdot\varphi(x)$$

и, следовательно, неравенству

$$f(x)\cdot\varphi(x) < g(x)\cdot\varphi(x),$$

а это и требовалось доказать.

Примеры.

1) Неравенство $\frac{1}{2}(x+y) > \frac{1}{3}$ равносильно неравенству $3(x+y) > 2$, полученному из данного умножением на 6.

2) Неравенство $\frac{3-x}{2} > -\frac{x}{5}$ равносильно неравенству $5(x-3) < 2x$, полученному из данного умножением на число -10 и изменением знака неравенства.

3) Неравенство $2x-8 > 6x$ равносильно неравенству $x-4 > 3x$, полученному из данного умножением на $\frac{1}{2}$.

4) Неравенство

$$(2x-3)(x^2+1) < (1-x)(x^2+1)$$

равносильно неравенству

$$2x-3 < 1-x,$$

полученному из данного умножением на функцию $\frac{1}{x^2+1}$, принимающую только положительные значения.

5) Неравенство

$$(x+y)(x^2+y^2+1) > (3-y)(x^2+y^2+1)$$

равносильно неравенству

$$x+y>3-y,$$

полученному из данного неравенства умножением на функцию $\frac{1}{x^2+y^2+1}$, принимающую только положительные значения.

6) Неравенство

$$(x+1)(-x^2-1) < (y+2)(-x^2-1)$$

равносильно неравенству

$$x+1>y+2,$$

полученному из данного неравенства умножением на функцию $-\frac{1}{x^2+1}$, принимающую только отрицательные значения, и изменением знака неравенства.

5. Неравенства первой степени с одной неизвестной. Неравенством первой степени с одной неизвестной называется неравенство вида

$$ax+b>0 \quad \text{или} \quad ax+b<0,$$

левая часть которого есть целая рациональная функция первой степени от неизвестной x, а правая — число 0.

Таким образом, это неравенство выражает вопрос, при каких значениях переменной x целая рациональная функция первой степени от переменной x имеет положительные или отрицательные значения.

Так как неравенство $a'x+b'<0$ равносильно неравенству $-a'x-b'>0$, имеющему вид $ax+b>0$, то каждое неравенство первой степени с одной неизвестной может быть представлено в виде

$$ax+b>0.$$

Заменив неравенство $ax+b>0$ равносильным ему неравенством

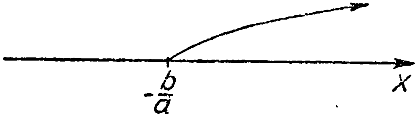
(1) $$ax>-b,$$

рассмотрим 3 случая:

1°. $a>0$. Разделив обе части неравенства (1) на положительное число a, получим равносильное неравенство

$$x>-\frac{b}{a},$$

которому, очевидно, удовлетворяют все числа, превосходящие число $-\frac{b}{a}$, и только эти числа. Следовательно, в случае 1° решениями неравенства (1) служат все те и только те числа, которые изображаются точками числовой оси, расположенными вправо от точки с абсциссой $-\frac{b}{a}$, как это показано на чертеже 190.

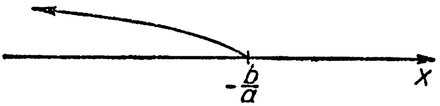


Черт. 190

2°. $a < 0$. Тем же путем получаем равносильное неравенство

$$x < -\frac{b}{a},$$

которому, очевидно, удовлетворяют все числа, меньшие, чем число $-\frac{b}{a}$, и только эти числа. Следовательно, в случае 2° решениями неравенства (1) служат все те и только те числа, которые изображаются точками числовой оси, расположенными влево от точки с абсциссой $-\frac{b}{a}$, как это показано на чертеже 191:



Черт. 191

3°. $a = 0$. Данное неравенство принимает вид:

$$0 \cdot x > -b.$$

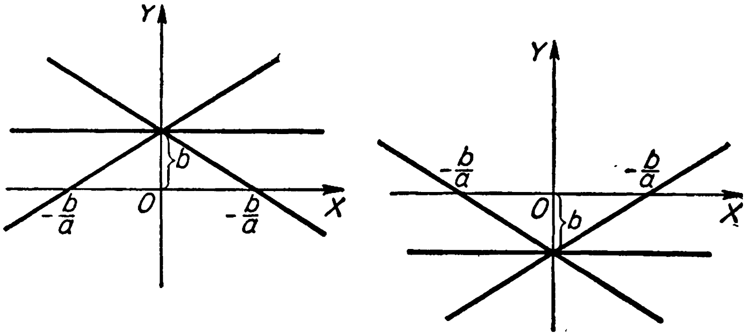
Если b есть положительное число, то неравенству удовлетворяет любое число, так как число 0 больше каждого отрицательного числа; если же b есть отрицательное число, то неравенство не имеет решений, так как число 0 не больше, а меньше любого положительного числа.

К тем же выводам можно прийти на основании следующих простых соображений.

Так как линейная функция $y = ax + b$ является при $a > 0$ возрастающей, при $a < 0$ убывающей, а при $x = -\frac{b}{a}$ принимает значение 0, то в случае $a > 0$ она имеет положительные значения после того, как она приняла значение 0, т. е. при $x > -\frac{b}{a}$, а в случае $a < 0$ — до этого, т. е. при $x < -\frac{b}{a}$. Иначе говоря: если $a > 0$, то $ax + b > 0$ при $x > -\frac{b}{a}$; если $a < 0$, то $ax + b > 0$ при $x < -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, то функция $y = ax + b$ сводится к функции $y = 0 \cdot x + b$, которая при условии $b > 0$ принимает одно и то же положительное значение b при любом значении переменной x, а при $b < 0$ не принимает положительного значения ни при одном значении переменной x.

Эти соображения наглядно иллюстрируются графиком функции $y = ax + b$: прямая, которая служит этим графиком, при условии $a \neq 0$ пересекает ось OX в точке $x = -\frac{b}{a}$; при этом ее точки, имеющие положительные ординаты, имеют в случае $a > 0$ абсциссы, превосходящие абсциссу $-\frac{b}{a}$ $\left(x > -\frac{b}{a}\right)$, а в случае $a < 0$ — абсциссы, меньшие, чем абсцисса $-\frac{b}{a}$ $\left(x < -\frac{b}{a}\right)$ (черт. 192):



Черт. 192

Если $a = 0$, то графиком функции $y = ax + b$ служит прямая, пересекающая ось ординат в точке $(0;\ b)$ и параллельная оси OX. Поэтому если $b > 0$, то точками этого графика, имеющими положительные ординаты, служат все его точки, так что в этом случае функция y имеет положительное значение при любом значении абсциссы $x (-\infty < x < +\infty)$; если же $b < 0$, то ни одна точка графика не имеет положительной ординаты.

На теоремах о равносильности неравенств основаны все этапы, из которых состоит процесс решения неравенств. Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{3x-1}{2} > \frac{2x}{3} - 3.$$

Решение. 1) Умножаем обе части неравенства на наименьшее кратное знаменателей 2 и 3, т. е. на 6 (теорема 2а):

$$9x - 3 > 4x - 18;$$

2) переносим члены, содержащие неизвестную x, влево, а остальные вправо (следствие из теоремы 1) и выполняем приведение:

$$5x > -15;$$

3) делим обе части неравенства на положительное число 5 (теорема 2а):

$$x > -3$$

Ответ. Данному неравенству удовлетворяют все числа, превосходящие число -3, т. е. принадлежащие промежутку $(-3 \ldots +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$m(x-1) > x-2$$

Решение. Последовательно находим:

1) $mx - m > x - 2$; $mx - x > m - 2$ (следствие из теоремы 1);

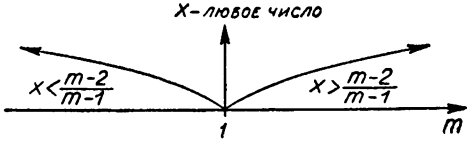
$$(m-1)x > m-2;$$

2а) если $m > 1$, то $x > \frac{m-2}{m-1}$ (теорема 2а);

2б) если $m < 1$, то $x < \frac{m-2}{m-1}$ (теорема 2б);

2в) если $m = 1$, то неравенство принимает вид: $0 \cdot x > -1$, так что его решением служит любое число.

Эти результаты полезно представить в виде следующей графической схемы (черт. 193):



Черт. 193

Схема указывает, что при $m > 1$ функция $(m-1)x - (m-2)$ принимает положительные значения в промежутке $\left(\frac{m-2}{m-1}, +\infty\right)$, при $m < 1$ — в промежутке $\left(-\infty, \frac{m-2}{m-1}\right)$ и при $m = 1$ — на всей числовой оси.

Пример 3. Решить неравенство

$$\frac{x}{m} + \frac{1-3x}{2} > \frac{x+2}{4m}.$$

Решение. 1) Перенеся все члены неравенства в левую часть и приведя ее к виду дроби, получаем сначала неравенство

$$(1)\qquad \frac{4x+2m(1-3x)-(x+2)}{4m}>0,$$

а затем неравенство

$$(2)\qquad \frac{3(1-2m)x+2(m-1)}{m}>0.$$

Это неравенство можно решить двумя способами.

I способ. Рассмотрим 2 случая:

Если $m>0$, то неравенство (2) равносильно неравенству

$$3(1-2m)x+2(m-1)>0$$

и, следовательно, неравенству

$$3(1-2m)x>-2(m-1).$$

Если $1-2m>0$, т. е. $m<\frac{1}{2}$, то $x>-\frac{2(m-1)}{3(1-2m)}$;
если $1-2m<0$, т. е. $m>\frac{1}{2}$, то $x<-\frac{2(m-1)}{3(1-2m)}$;
если $1-2m=0$, т. е. $m=\frac{1}{2}$, то неравенство принимает вид $0\cdot x>1$ и, следовательно, не имеет решений.

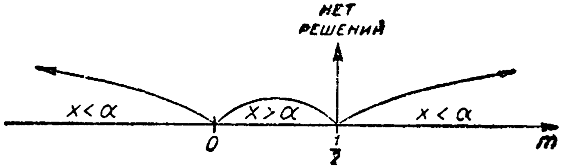
Если $m<0$, то неравенство (2) равносильно неравенству

$$3(1-2m)x<-2(m-1).$$

Так как $m<0$, то $1-2m>0$, так что

$$x<-\frac{2(m-1)}{3(1-2m)}.$$

Обозначая число $-\frac{2(m-1)}{3(1-2m)}$ через α, представляем результаты в виде схемы (черт. 194):



Черт. 194

Схема указывает, что при $m<0$ и $m>\frac{1}{2}$ функция

$$\frac{3(1-2m)}{m}x+\frac{2(m-1)}{m}$$

принимает положительные значения в промежутке $(-\infty,\ \alpha)$, при $0 < m < \frac{1}{2}$ — в промежутке $(\alpha,\ +\infty)$, а при $m = \frac{1}{2}$ не имеет положительных значений.

II способ. Вернемся к неравенству (2). Так как отношение двух отличных от нуля чисел имеет тот же знак, что и произведение этих чисел, то неравенство (2) можно заменить равносильным ему неравенством

$$(3)\qquad 3m(1-2m)x + 2m(m-1) > 0.$$

Придав ему вид

$$3m(2m-1)x < 2m(m-1),$$

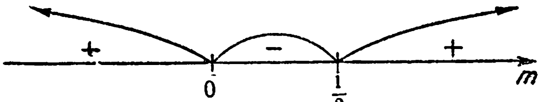
находим:

если $m(2m-1) > 0$, то $x < \frac{2m(m-1)}{3m(2m-1)}$, т. е. $x < \frac{2(m-1)}{3(2m-1)}$;

если $m(2m-1) < 0$, то $x > \frac{2m(m-1)}{3m(2m-1)}$, т. е. $x > \frac{2(m-1)}{3(2m-1)}$;

если $m(2m-1) = 0$, т. е. $m = \frac{1}{2}$, то решений нет.

Но, представив произведение $m(2m-1)$ в виде $2m\left(m-\frac{1}{2}\right)$ и заметив, что оно обращается в нуль при $m = 0$ и $m = \frac{1}{2}$, наносим эти числа на числовую ось (черт. 195):



Черт. 195

и заключаем, что произведение $m\left(m-\frac{1}{2}\right)$ имеет положительное значение при $m < 0$ или $m > \frac{1}{2}$ и отрицательное значение при $0 < m < \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$x < \frac{2(m-1)}{3(2m-1)} \text{ при } m < 0 \text{ и } m > \frac{1}{2},$$

$$x > \frac{2(m-1)}{3(2m-1)} \text{ при } 0 < m < \frac{1}{2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить неравенства:

1) $\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}$; 2) $\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$.

Ответы. 1) $x < 1$; 2) $x < 7$.

2. Решить неравенства:

$$1)\ (m+1)x-2<(1-2m)x+3.$$

Ответ. $x<\frac{5}{3m}$ при $m>0$; $x>\frac{5}{3m}$ при $m<0$; x — любое число при $m=0$,

$$2)\ \frac{2x-1}{m+1}-\frac{x+2}{3}>\frac{2x-5}{2(m+1)}.$$

Ответ. $x<\frac{4m-5}{2(2-m)}$ при $m<-1$ и $m>2$;

$x>\frac{4m-5}{2(2-m)}$ при $-1<m<2$; нет решений при $m=2$.

$$3)\ \frac{mx}{m-2}-\frac{x-1}{3}<\frac{2x+3}{4}.$$

Ответ. $x<\frac{5(m-2)}{2(m+10)}$ при $m<-10$ и $m>2$;

$x>\frac{5(m-2)}{2(m+10)}$ при $-10<m<2$;

x — любое число при $m=-10$.

6. Системы двух неравенств первой степени с одной неизвестной.

Пусть дана система неравенств

$$ax+b>0,\ a'x+b'>0$$

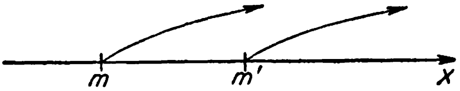
с одной и той же неизвестной x.

Решить эту систему неравенств — значит найти все те решения того и другого неравенства, которые служат общими решениями этих неравенств.

Для того чтобы решить систему, поступают так: сначала решают каждое неравенство в отдельности, а затем, сопоставляя результаты, находят общие решения, если они существуют, или приходят к выводу об отсутствии общих решений.

При этом могут представиться следующие случаи:

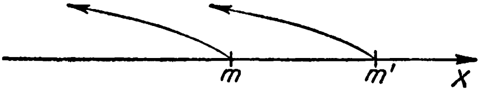
1°. Мы нашли из первого неравенства: $x>m$, из второго: $x>m'$. Если, например, $m'>m$, то, замечая, что из неравенств $x>m'$ и $m'>m$ следует неравенство $x>m$, приходим к выводу, что все решения второго неравенства являются вместе с тем решениями первого неравенства. Следовательно, решениями системы служат все значения неизвестной x, удовлетворяющие неравенству $x>m'$, т. е. принадлежащие промежутку $(m', +\infty)$. Этот результат может быть наглядно представлен графической схемой (черт. 196):



Черт. 196

2°. Мы нашли из первого неравенства: $x<m$, из второго: $x<m'$. Если $m'>m$, то, замечая, что из неравенств $x<m$ и $m<m'$ следует неравенство $x<m'$, приходим к выводу, что все решения первого неравенства являются вместе с тем решениями второго неравенства. Следовательно, решениями системы служат все значения неизвестной x, удовлетворяющие неравенству $x<m$, т. е. принадлежащие промежутку $(-\infty, m)$.

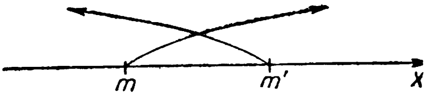
Этому случаю соответствует графическая схема (черт. 197):



Черт. 197

3°. Мы нашли из первого неравенства: $x>m$, из второго: $x<m'$. Если $m<m'$, то, записывая совокупность неравенств $x>m$ и $x<m'$ в виде $m<x<m'$, приходим к выводу, что решениями системы служат все значения неизвестной x, которые больше меньшего из чисел m и m' и меньше большего из них, т. е. которые принадлежат промежутку (m, m').

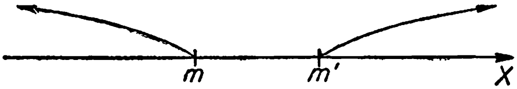
Этот результат представим следующей графической схемой (черт. 198):



Черт. 198

4°. Мы нашли из первого неравенства: $x<m$, из второго: $x>m'$. Если $m<m'$, то данные неравенства, очевидно, не будут иметь ни одного общего решения, так как не существует чисел, которые были бы одновременно больше большего из двух чисел m и m' и меньше меньшего из них.

Это можно наглядно усмотреть из графической схемы (черт. 199):



Черт. 199

Итак, в результате решения двух неравенств, составляющих систему, мы можем прийти:

1) к двум неравенствам $x>m$ и $x>m'$ или $x<m$ и $x<m'$ одного и того же смысла (случаи 1° и 2°), одно из которых влечет за

собой другое, или, как говорят, представляет собой более сильное неравенство; оно и указывает тот (бесконечный) промежуток, которому принадлежат все решения системы;

2) к двум совместным неравенствам $x>m$ и $x<m'$, где $m<m'$, противоположного смысла, ограничивающим одно другое и указывающим в своей совокупности тот (конечный) промежуток, которому принадлежат все решения системы;

3) к двум несовместным неравенствам $x<m$ и $x>m'$, где $m<m'$, противоположного смысла, указывающим, что неравенства, составляющие систему, не имеют общих решений и что, следовательно, система неравенств не имеет решений (противоречива).

Примеры.

1) Система неравенств

$$5x-3>1+x \text{ и } 3-18x<4x-30$$

сводится к системе неравенств

$$x>1 \text{ и } x>\frac{3}{2},$$

из которых второе сильнее первого, так что остается неравенство $x>\frac{3}{2}$.

2) Система неравенств

$$5x-3<1+x \text{ и } 3-18x>4x-80$$

сводится к системе неравенств

$$x<1 \text{ и } x<\frac{3}{2},$$

из которых первое сильнее второго, так что остается неравенство $x<1$.

3) Система неравенств

$$5x-3>1+x \text{ и } 3-18x>4x-30$$

сводится к системе неравенств

$$x>1 \text{ и } x<\frac{3}{2},$$

указывающей, что все решения системы должны одновременно удовлетворять этим неравенствам, т. е. что

$$1<x<\frac{3}{2}.$$

4) Система неравенств

$$5x - 3 < 1 + x \text{ и } 3 - 18x < 4x - 30$$

сводится к системе несовместных неравенств

$$x < 1 \text{ и } x > \frac{3}{2},$$

указывающих, что система противоречива, т. е. что она не имеет решений.

5) Решить неравенство $|2x - 3| < \frac{1}{2}$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств (гл. VII, § 1, п. 4):

$$-\frac{1}{2} < 2x - 3 < \frac{1}{2},$$

т. е. системе

$$2{,}5 < 2x < 3{,}5;$$

следовательно,

$$1{,}25 < x < 1{,}75.$$

6) Решить неравенство $\frac{2x-4}{3x+15} < 0$.

Решение. Для того чтобы дробь имела отрицательное значение, необходимо и достаточно, чтобы ее члены имели значения противоположных знаков. Поэтому данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

1) $2x - 4 > 0, \quad 3x + 15 < 0;$

2) $2x - 4 < 0, \quad 3x + 15 > 0.$

Первая система сводится к системе

$$x > 2,\ x < -5,$$

не имеющей решений, а вторая — к системе

$$x < 2,\ x > -5,$$

из которой заключаем, что

$$-5 < x < 2.$$

К тому же выводу можно прийти также на основании следующих соображений. Так как отношение двух чисел имеет тот же знак, что и произведение этих чисел, то данное неравенство равносильно неравенству $2(x - 2) \cdot 3(x + 5) < 0$, т. е. неравенству

$$(x - 2)\ [x - (-5)] < 0.$$

Очевидно, что это неравенство удовлетворяется теми и только теми значениями неизвестной x, при которых множители $x - 2$ и $x - (-5)$ имеют разные знаки, т. е. при $-5 < x < 2$.

7) Решить неравенство $\frac{x-1}{x+1} < 3$.

Решение. Представляя неравенство сначала в виде $\frac{x-1}{x+1}-3<0$, а затем в виде $\frac{x+2}{x+1}>0$, заменяем его либо равносильной совокупностью систем:

$$1)\ x+2>0,\ x+1>0;\quad 2)\ x+2<0,\ x+1<0,$$

либо равносильным неравенством $(x+2)(x+1)>0$.

Оба способа решения приводят к ответу:

$$x<-2 \text{ или } x>-1.$$

8) Решить систему неравенств $3<\frac{5x-1}{2x-3}<5$.

Решение. Заменяем эту систему неравенств равносильным ей неравенством

$$\left(5-\frac{5x-1}{2x-3}\right)\left(3-\frac{5x-1}{2x-3}\right)<0,$$

которое приводим к виду: $\frac{(5x-14)(x-8)}{(2x-3)^2}<0$.

Так как $(2x-3)^2\geqslant 0$, то последнее неравенство равносильно смешанной системе:

$$(5x-14)(x-8)<0,\ x\neq\frac{3}{2}.$$

Отсюда находим, что

$$2\frac{4}{5}<x<8.$$

9) Найти область определения функции

$$y=\arccos\frac{2-x}{x+1}.$$

Решение. Эта область указывается системой соотношений:

$$-1\leqslant\frac{2-x}{x+1}\leqslant 1.$$

Заменяем ее следующим соотношением:

$$\left(1-\frac{2-x}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{2-x}{x+1}+1\right)\geqslant 0,$$

которое приводим к виду $\frac{(2x-1)\cdot 3}{(x+1)^2}\geqslant 0$.

Так как $(x+1)^2\geqslant 0$, то последнее неравенство равносильно смешанной системе: $2x-1\geqslant 0$, $x\neq -1$.

Отсюда находим, что $x\geqslant\frac{1}{2}$.

10) При каких значениях параметра m система неравенств

$$(m-1)x>2m,\ mx<m+1$$

имеет решения?

Решение. Из первого неравенства находим:

(1) $x > \frac{2m}{m-1}$ при $m > 1$, (2) $x < \frac{2m}{m-1}$ при $m < 1$.

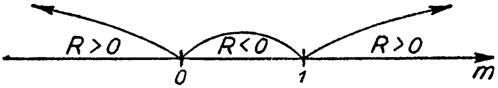
Из второго неравенства находим:

(3) $x < \frac{m+1}{m}$ при $m > 0$, (4) $x > \frac{m+1}{m}$ при $m < 0$.

Найдем разность R чисел $\frac{2m}{m-1}$ и $\frac{m+1}{m}$:

$$R = \frac{2m}{m-1} - \frac{m+1}{m} = \frac{m^2+1}{m(m-1)}.$$

Так как $m^2 + 1 > 0$, а $m(m-1) > 0$ при $m < 0$ и $m > 1$ и $m(m-1) < 0$ при $0 < m < 1$, то получаем схему (черт. 200):



Черт. 200

Теперь обратимся к неравенствам (1) — (4).

Если $m > 1$, то имеет место каждое из неравенств (1) и (3). Но так как при этом условии $R>0$, т. е. $\frac{2m}{m-1} > \frac{m+1}{m}$, то неравенства (1) и (3) несовместны.

Если $0<m<1$, то имеет место каждое из неравенств (2) и (3). Так как при этом условии $R < 0$, т. е. $\frac{2m}{m-1} < \frac{m+1}{m}$, то заключаем, что

(5) $$x < \frac{2m}{m-1}.$$

Если $m<0$, то имеет место каждое из неравенств (2) и (4). Так как при этом условии $R> 0$, т. е. $\frac{2m}{m-1} > \frac{m+1}{m}$, то заключаем, что

(6) $$\frac{m+1}{m} < x < \frac{2m}{m-1}.$$

Если $m = 0$, то система принимает вид

$$x < 0, \quad 0 \cdot x < 1$$

и, следовательно, сводится к неравенству $x<0$.

Если $m = 1$, то система принимает вид

$$0 \cdot x > 2, \quad x < 2$$

и, следовательно, не имеет решений.

Итак, при условии $0 \leqslant m < 1$ данная система сводится к неравенству (5), а при условии $m < 0$ — к системе (6).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить неравенство $\dfrac{x-2}{2x+3} > 1$.

Ответ. $-5 < x < -\dfrac{3}{2}$.

2. При каких целых значениях неизвестной x верны неравенства:

$$1)\ \frac{3x-5}{2-9x} > 0; \quad 2)\ 1 < \frac{2x-3}{3x-2} < 3?$$

Ответы. 1) 1; 2) 0.

3. При каких значениях переменной x возможно равенство

$$\frac{x-1}{x-2} = \cos\varphi, \text{ если } 0^\circ < \varphi < 60^\circ?$$

Ответ. $x < 0$.

4. Решить неравенства:

1) $|x - 3{,}4| < 0{,}6$; 2) $|\operatorname{tg} x| < 1$; 3) $|\lg x| > 2$.

Ответы. 1) $2{,}8 < x < 4$; 2) $180^\circ n - 45^\circ < x < 180^\circ n + 45^\circ$; 3) $x > 100$ или $x < 0{,}01$.

5. Найти область определения функций:

$$1)\ y = \sqrt{\frac{x-2}{1-3x}}; \quad 2)\ y = \lg\frac{1-2x}{3+x}; \quad 3)\ y = \arcsin\frac{4x}{x+3}.$$

Ответы. 1) $\dfrac{1}{3} < x \leqslant 2$; 2) $-3 < x < 0{,}5$; 3) $-\dfrac{3}{5} \leqslant x \leqslant 1$.

7. Неравенства, приводящиеся к неравенствам первой степени с одной неизвестной. Решение: 1) неравенств, левая часть которых есть произведение множителей, линейных относительно одной и той же неизвестной x, а правая часть есть нуль, и 2) неравенств, левая часть которых есть отношение произведений таких множителей, — сводится к нахождению промежутков, в которых функция имеет определенный знак. Этот вопрос был подробно рассмотрен в главе X, § 3, п. 2.

ГЛАВА XIII

ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

§ 1. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

1. Смысл исследования уравнений. Как известно, каждый корень уравнения с одной неизвестной представляет собой результат выполнения некоторой группы действий над коэффициентами этого уравнения, так что каждой определенной системе значений коэффициентов вообще соответствует один или несколько корней уравнения.

Точно так же каждое решение системы уравнений с двумя или большим числом неизвестных получается в результате выполнения действий над коэффициентами уравнений, составляющих систему.

В связи с этим возникает вопрос, всякая ли система значений коэффициентов одного уравнения или всех уравнений, составляющих систему, определяет решение уравнения или системы, и если определяет, то сколько решений и каких решений.

Точный и полный ответ на этот вопрос будет дан в том случае, если будут найдены те необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты уравнения или уравнений системы для того, чтобы это уравнение или система имели решения, и если при этом будет установлено, сколько решений и какие именно решения имеет уравнение или система уравнений в каждом отдельном случае. Нахождение этих необходимых и достаточных условий и называется исследованием уравнения или системы уравнений.

2. Исследование уравнений первой степени с одной неизвестной. Уравнением первой степени с одной неизвестной называется уравнение вида

$$ax + b = 0, \tag{1}$$

левая часть которого есть целая рациональная функция первой степени от неизвестной, а правая — число 0.

Заменив данное уравнение равносильным ему уравнением

$$ax = -b, \tag{2}$$

рассмотрим следующие случаи.

1°. Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения (2) на отличное от нуля число a, получим уравнение

$$x = -\frac{b}{a}, \tag{3}$$

равносильное уравнению (2).

Уравнение (3) имеет единственный корень $-\frac{b}{a}$. Отсюда следует, что если в уравнении первой степени с одной неизвестной коэффициент при неизвестной отличен от нуля, то уравнение имеет один и только один корень.

Уравнение первой степени с одной неизвестной, имеющее единственный корень, называется определенным.

2°. Если $a = 0$, но $b \neq 0$, то уравнение (2) принимает вид

$$0 \cdot x = -b. \tag{4}$$

Очевидно, что ни при каком значении неизвестной x левая часть не будет иметь значения, отличного от нуля; поэтому уравнение (4) не имеет корней. Отсюда следует, что если в уравнении первой степени с одной неизвестной коэффициент при неизвестной равен нулю, но свободный член отличен от нуля, то уравнение не имеет корней.

Уравнение первой степени с одной неизвестной, не имеющее корней, называется противоречивым.

3°. Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение принимает вид

$$0 \cdot x = 0. \tag{5}$$

Очевидно, что любое число есть корень уравнения (5), ввиду чего оно имеет бесконечное множество корней. Отсюда следует, что если в уравнении первой степени с одной неизвестной коэффициент при неизвестной и свободный член равны нулю, то любое число служит корнем уравнения, ввиду чего уравнение имеет бесконечное множество корней.

Уравнение первой степени с одной неизвестной, имеющее бесконечное множество корней, называется неопределенным.

Полученные результаты могут быть легко истолкованы геометрически. Так как решить уравнение (1) — значит найти, при каком значении переменной x функция $ax + b$ принимает значение 0, то решение уравнения (1) можно свести к нахождению тех точек оси абсцисс OX, в которых прямая, служащая графиком уравнения $y = ax + b$, пересекает эту ось.

Если $a \neq 0$, то прямая $y = ax + b$ не параллельна оси OX и не совпадает с ней и, следовательно, пересекает эту ось, т. е. имеет с ней единственную общую точку: $y = 0$ при $x = -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, то при $b \neq 0$ прямая $y = ax + b$ параллельна оси OX и, следовательно, не имеет с ней ни одной общей точки (нет корней), а при $b = 0$ прямая $y = ax + b$ совпадает с осью OX и, следовательно, каждая точка этой прямой является также точкой оси OX, т. е. имеет ординату 0 (бесконечное множество корней).

Примеры.

1) Исследовать уравнение

$$(a-b)\,x = b - c$$

по отношению к параметрам (буквам) a, b, c.

При $a \neq b$ — уравнение определенное (имеет единственное решение).

При $a = b$, $b \neq c$ — уравнение противоречивое.

При $a = b = c$ — уравнение неопределенное.

2) Исследовать уравнение

$$(a^2 - 1)\,x = a^2$$

по отношению к параметру a.

При $a \neq \pm 1$ — уравнение определенное.

При $a = \pm 1$ — уравнение принимает вид

$$0 \cdot x = 1$$

и, следовательно, не имеет решений.

3) Исследовать уравнение

$$(a - 2)\,x = a^2 - 3$$

по отношению к параметру a.

При $a \neq 2$ уравнение определенное.

При $a = 2$ уравнение принимает вид:

$$0 \cdot x = 1$$

и, следовательно, не имеет решений.

Подобному исследованию можно подвергнуть любой из примеров на решение буквенного уравнения первой степени с одной неизвестной, содержащий один или два параметра.

4) Исследовать уравнение

$$(1) \qquad \frac{x}{c} + \frac{x}{d-c} = \frac{c}{c+d}$$

по отношению к параметрам c и d.

Прежде всего замечаем, что, как указывает самый вид уравнения, мы должны под буквами c и d разуметь только такие числа, которые подчинены ограничениям:

$$(2) \qquad c \neq 0,\ c \neq d,\ c \neq -d.$$

Приведя данное уравнение к нормальному виду

$$(3) \qquad d(c + d)\,x = c^2\,(d - c)$$

и принимая во внимание ограничения (2), заключаем:

1) если $d \neq 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение

$$x = \frac{c^2(d-c)}{d(c+d)};$$

2) если $d = 0$, то уравнение (3) принимает вид

$$0 \cdot x = -c^3$$

и при ограничениях (2) не имеет корней; следовательно, при тех же условиях и уравнение (1) не имеет корней.

В самом деле, при $d = 0$ уравнение (1) обращается в противоречивое уравнение

$$\frac{x}{c} - \frac{x}{c} = 1.$$

По этому образцу можно исследовать уравнения, которые имеют члены дробные по отношению к каким-либо параметрам. В этом случае исследование должно начинаться с наложения на эти параметры ограничений, которые и должны приниматься во внимание при дальнейшем исследовании.

5) Исследовать уравнение

$$(1) \qquad \frac{ax-1}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$$

по отношению к параметрам a и b.

Принимая во внимание, что это уравнение имеет дробные члены, содержащие в знаменателе неизвестную, мы с самого начала укажем, что после нахождения корней уравнения мы должны будем отбросить те из них, которые удовлетворяют одному, по крайней мере, из равенств: $x = 1$, $x = -1$, т. е. обращают в нуль какой-либо из знаменателей дробных членов уравнения.

Выполняя известные преобразования, приводим уравнение (1) к виду

$$(2) \qquad (a + b - 1)x = a + b + 1.$$

Если $a + b \neq 1$, то уравнение (2) имеет единственное решение:

$$(3) \qquad x = \frac{a+b+1}{a+b-1}.$$

Для того чтобы это решение было также и решением уравнения (1), оно должно не обращать в нуль ни знаменатель $x - 1$, ни знаменатель $x + 1$. Но

$$\frac{a+b+1}{a+b-1} - 1 = \frac{2}{a+b-1}; \quad \frac{a+b+1}{a+b-1} + 1 = \frac{2(a+b)}{a+b-1}.$$

Первая разность отлична от нуля, а вторая обращается в нуль при $a + b = 0$. Поэтому окончательно заключаем: если $a + b \neq 1$ и $a + b \neq 0$, то данное уравнение (1) имеет решение (3).

Если $a+b=1$, то уравнение (2) и, следовательно, уравнение (1) не имеют решений.

В исключенном случае $a+b=0$ уравнение (2) имеет решение -1, которое не служит, однако, решением уравнения (1).

6) Исследовать уравнение

$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^2-ab} \tag{1}$$

по отношению к параметрам a и b.

Принимая во внимание, что это уравнение имеет дробные члены, содержащие в знаменателе неизвестную, мы с самого начала укажем, что после нахождения корней уравнения мы должны будем отбросить те из них, которые удовлетворяют одному, по крайней мере, из равенств:

$$x-a=0,\ x-b=0,\ x^2-ab=0,$$

т. е. обращают в нуль какой-либо из знаменателей дробных членов уравнения.

Выполняя известные преобразования, приводим уравнение к виду

$$(a+b)(a-b)\,x=2ab\,(a-b). \tag{2}$$

Если $a \neq b$ и $a \neq -b$, то уравнение (2) имеет единственное решение:

$$x=\frac{2ab}{a+b}. \tag{3}$$

Для того чтобы это решение было также и решением уравнения (1), оно должно не обращать в нуль ни знаменатель $x-a$, ни знаменатель $x-b$, ни знаменатель x^2-ab. Но

$$\frac{2ab}{a+b}-a=\frac{ab-a^2}{a+b}=\frac{a(b-a)}{a+b},$$

$$\frac{2ab}{a+b}-b=\frac{ab-b^2}{a+b}=\frac{b(a-b)}{a+b},$$

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2-ab=\frac{4a^2b^2-ab(a+b)^2}{(a+b)^2}=-\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}.$$

Так как $a \neq b$ и $a \neq -b$, то первая разность обращается в нуль при $a=0$, вторая — при $b=0$, а третья — при $a=0$ или $b=0$. Поэтому окончательно заключаем: если $a \neq b$, $a \neq -b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то данное уравнение (1) имеет решение (3).

Если $a=b$, то каждое число служит решением уравнения (2). Однако уравнению (1) удовлетворяет не любое число: числа a, b и ab, обращающие в нуль соответственно знаменатели $x-a$, $x-b$, x^2-ab, должны быть исключены.

Если $a=-b$, то уравнение (2) принимает вид

$$0\cdot x=-4a^3. \tag{4}$$

Поэтому при $a \neq 0$ оно не имеет решений, а при $a = 0$ каждое число служит его решением.

Следовательно, при условиях $a = -b$, $a \neq 0$ уравнение (1) также не имеет решений, а при условиях $a = -b$, $a = 0$, т. е. при условии $a = b = 0$, уравнению (1) не удовлетворяет только число 0.

По этим образцам можно исследовать уравнение, которое имеет дробные члены, содержащие в знаменателе неизвестную. Это исследование имеет ту особенность, что требует выполнения важного дополнительного этапа: каждый корень уравнения, полученного из данного путем освобождения его от знаменателей, должен быть подвергнут проверке, имеющей целью установить, при каких значениях параметров этот корень способен обратить в нуль знаменатель какого-либо дробного члена уравнения; при этих значениях параметров найденный корень освобожденного от знаменателей уравнения уже не является корнем данного уравнения.

§ 2. СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. **Понятие о системе уравнений.** Если в задаче требуется найти неизвестные значения двух величин x и y по данным значениям тех же или других величин и если при этом искомые значения связаны с данными значениями двумя уравнениями, то для решения этой задачи необходимо найти такие пары значений неизвестных x и y, которые одновременно удовлетворяли бы составленным уравнениям.

Определение 1. Каждая пара значений неизвестных, которые одновременно удовлетворяют двум уравнениям с двумя неизвестными, называется общим решением этих уравнений.

Определение 2. Совокупность (группа) двух уравнений с двумя неизвестными, для которых требуется найти их общие решения, называется системой двух уравнений с двумя неизвестными.

Обратим внимание на то, что по смыслу этого определения из того, что группа двух уравнений с двумя неизвестными рассматривается как система уравнений, не следует, что эти уравнения имеют общее решение. Называя совокупность уравнений системой, мы выражаем этим лишь требование: 1) решить вопрос о том, имеют ли данные уравнения общие решения, и 2) найти эти решения, если они существуют.

Определение 3. Общее решение уравнений, составляющих систему, называется решением системы уравнений.

2. **Решение системы двух уравнений.** Существует несколько способов (методов) решения системы двух уравнений. Из них основные: 1) способ уравнивания коэффициентов и 2) способ подстановки. Оба эти способа имеют целью свести решение системы двух уравнений с двумя неизвестными к последовательному решению двух уравнений с одной неизвестной.

3. Равносильность систем уравнений.

Определение. Система двух уравнений с двумя неизвестными называется равносильной данной системе двух уравнений с двумя неизвестными, если она удовлетворяется всеми решениями данной системы и не удовлетворяется ни одной парой значений неизвестных, которая не служит решением данной системы.

Подобно тому как решение одного уравнения с одной неизвестной состоит в том, что мы последовательно заменяем данное уравнение другими уравнениями, равносильными данному, но все более простыми, и, наконец, приходим к простейшему уравнению, корень которого очевиден, точно так же решение системы двух уравнений с двумя неизвестными состоит в том, что мы заменяем данную систему уравнений другой системой уравнений, равносильной данной, но более простой и притом настолько простой, что путь решения ее оказывается вполне очевидным.

Для того чтобы сделать изложение теории решения системы уравнений легче понимаемым и усваиваемым, весьма целесообразно ввести понятие о выводном уравнении данной системы уравнений.

4. Понятие о выводном уравнении.

Определение. Если мы обе части одного из уравнений системы двух уравнений с двумя неизвестными умножим на какое угодно число, затем обе части другого уравнения этой системы также умножим на какое угодно число и после этого полученные уравнения почленно (т. е. по частям) сложим, то составленное этим способом уравнение мы будем называть выводным уравнением данной системы уравнений.

Пример. Из уравнений системы

$$\text{(I)}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} 5 & 8 \\ -6 & 9 \end{array} \qquad \begin{cases} 2x+3y=12, \\ 5x-4y=\ \ 7 \end{cases}$$

можно составить выводное уравнение:

$$\text{(1)}\qquad (2x+3y)\cdot 8+(5x-4y)\cdot 9=12\cdot 8+7\cdot 9,$$

которое после упрощения принимает вид:

$$\text{(1a)}\qquad 61x-12y=159.$$

Можно составить также выводное уравнение:

$$\text{(2)}\quad (2x+3y)\cdot 5+(5x-4y)(-6)=12\cdot 5+7\cdot(-6),$$

т. е. уравнение

$$\text{(2a)}\qquad -20x+39y=18.$$

Уравнения (1a) и (2a) можно было бы получить из уравнений данной системы и более коротким путем — выполняя действия по вертикалям (столбцам): сумма $2\cdot 8+5\cdot 9$ дает коэффициент при неизвестной x, а сумма $3\cdot 8+(-4)\cdot 9$ дает коэффициент при неизвестной y в выводном уравнении (1a); точно так же сумма $2\cdot 5+5\cdot(-6)$ есть коэффициент при неизвестной x, а сумма

$3\cdot5+(-4)(-6)$ есть коэффициент при неизвестной y в выводном уравнении (2а).

5. Свойство выводного уравнения. Каждое выводное уравнение данной системы уравнений обладает следующим свойством:

Всякое решение данной системы уравнений есть вместе с тем решение каждого выводного уравнения, составленного из уравнений этой системы.

Доказательство. Допустим, что решением системы I (п. 4) служит пара чисел a и b, т. е. что при $x=a$ и $y=b$ левая и правая части каждого из уравнений системы (I) приобретают равные числовые значения, так что число $2a+3b$ равно числу 12, а число $5a-4b$ равно числу 7.

Для того чтобы узнать, будут ли те же числа a и b удовлетворять выводному уравнению (1), подставим в этом уравнении вместо неизвестных x и y соответственно числа a и b. Тогда левая часть его примет числовое значение

$$(2a+3b)\cdot8+(5a-4b)\cdot9.$$

Но $2a+3b=12$, а $5a-4b=7$. Поэтому числовое значение левой части выводного уравнения (1) при $x=a$ и $y=b$ окажется равным тому же числу $12\cdot8+7\cdot9$, которое служит его правой частью.

Из этого следует, что пара чисел a, b, которая является решением данной системы уравнений, служит вместе с тем и решением составленного из этих уравнений выводного уравнения (1).

Пример. Решение (3; 2) системы (I) есть вместе с тем решение выводного уравнения (1а) и выводного уравнения (2а).

Точно так же пара чисел (3; 2) окажется решением любого выводного уравнения, составленного из уравнений системы (I).

6. Выводная система уравнений. Теперь представим себе, что мы, оставив одно из уравнений системы

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases}2x+3y=12,\\5x-4y=7\end{cases}$$

без изменения, другое уравнение этой системы заменили каким-либо выводным уравнением, составленным из ее уравнений.

Тогда мы получим, например, систему

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases}2x+3y=12,\\-20x+39y=18.\end{cases}$$

Мы не знаем решений системы (I). Но на основании доказанного свойства выводного уравнения мы можем утверждать, что каждое ее решение (a, b) есть вместе с тем решение системы (II), т. е. что все решения системы (I) находятся среди решений системы (II).

7. Способ уравнивания коэффициентов. Система (II), которую мы составили, не проще системы (I); поэтому замена системы (I) системой (II) не представляет никакой выгоды. Однако, как мы знаем, путем особого способа составления выводного уравнения мы можем заменить систему (I) такой системой, которая решается весьма просто. Этот способ заключается в том, что множители, на которые надо умножить уравнения данной системы для составления из них выводного уравнения, выбирают так, чтобы коэффициент при одной из неизвестных в выводном уравнении оказался равным нулю.

Так, например, если мы, принимая во внимание, что абсолютными значениями коэффициентов при неизвестной y в уравнениях системы (I) служат взаимно простые числа 3 и 4, умножим первое уравнение на 4, а второе на 3, то мы составим выводное уравнение

$$23x + 0 \cdot y = 69. \tag{3a}$$

Если мы теперь заменим систему (I) системой

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 23x = 69, \end{cases} \tag{III}$$

которую мы можем назвать выводной, то мы окажемся в выгодном положении, так как система (III) решается весьма просто.

Именно из второго уравнения этой системы мы находим, что $x = 3$, а из первого, что $y = 2$. Пара чисел (3; 2) представляет собой единственное решение системы (III).

Но так как все решения системы (I) находятся среди решений системы (III), то система (I) либо имеет то же решение (3; 2), либо вовсе не имеет решений.

Подстановкой убеждаемся, что пара чисел (3; 2) служит также решением и данной системы (I).

Таким образом, выводная система (III) оказалась равносильной системе (I).

Взглянем на выводную систему (III). Чем объяснить, что она оказалась имеющей решение?

Это, очевидно, объясняется тем, что коэффициент при неизвестной x в выводном уравнении получился отличным от нуля; ввиду этого из выводного уравнения оказалось возможным найти (путем деления на отличное от нуля число 23) значение неизвестной x; после этого мы из первого уравнения, коэффициенты которого с самого начала предполагались отличными от нуля, нашли и соответствующее найденному значению неизвестной x значение неизвестной y.

Теперь проведем все рассужденче в общем виде, т. е. для системы уравнений

$$\begin{array}{r|l} b' & \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c'. \end{cases} \\ -b & \end{array} \tag{I}$$

1) Путем уравнивания коэффициентов при неизвестной y мы можем найти выводное уравнение

$$(ab' - a'b)\,x + 0 \cdot y = b'c - bc'$$

которое удовлетворяется каждым решением системы (I).

2) Заменяя систему (I) выводной системой

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ (ab' - a'b)\, x = b'c - bc', \end{cases}$$

мы получаем систему, которая проще системы (I) и которая удовлетворяется каждым ее решением, так что все решения системы (I) находятся среди решений системы (II).

3) При условии, если $ab' - a'b \neq 0$, система (II) имеет решение

$$\text{(III)} \qquad x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

и притом только это решение; заметим, что при нахождении значения неизвестной y нам пришлось делить на коэффициент b; мы имели право сделать это, так как при условии $ab' - a'b \neq 0$ коэффициенты b и b' одновременно не могут быть нулями; поэтому один из этих коэффициентов, например b, мы могли считать отличным от нуля, в связи с чем мы включили в систему (II) уравнение $ax + by = c$, а не уравнение $a'x + b'y = c'$.

4) Так как решения системы (I) находятся среди решений системы (II), то система (I) при условии $ab' - a'b \neq 0$ либо вовсе не имеет решений, либо также имеет единственное решение (III); путем подстановки значений (III) неизвестных x и y в уравнения системы (I) убеждаемся, что при условии $ab' - a'b \neq 0$ система (I) также имеет единственное решение (III) и, следовательно, равносильна системе (I).

5) Условие $ab' - a'b \neq 0$, при котором система (I) имеет единственное решение, обозначает, что коэффициенты a' и b' одного из уравнений системы не пропорциональны соответствующим коэффициентам a и b другого ее уравнения или что коэффициенты a' и b' не могут быть получены из соответствующих коэффициентов a и b путем умножения их на одно и то же число h, так что равенства

$$\text{(IV)} \qquad a' = ah, \ b' = bh$$

невозможны ни при каком значении множителя h.

Заметим, что это последнее требование вполне эквивалентно требованию $ab' - a'b \neq 0$ и в то же время общее, чем требование непропорциональности коэффициентов a' и b' коэффициентам a и b, ибо требование непропорциональности относится только к коэффициентам, отличным от нуля, и, следовательно, только к случаю $h \neq 0$, между тем как равенство $ab' - a'b = 0$ наступает при условии (IV) независимо от того, отлично ли h от нуля или равно нулю.

Так, в случае системы

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = c' \end{cases}$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, имеем:

$$a' = a \cdot 0, \quad b' = b \cdot 0; \ ab' - a'b = 0,$$

но коэффициенты a' и b' нельзя назвать пропорциональными коэффициентами a и b.

В случае системы:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + 0 \cdot y = c', \end{cases}$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a' \neq 0$, имеем:

$$ab' - a'b = -a'b \neq 0;$$

здесь опять неудобно говорить об отсутствии пропорциональности, но можно сказать, что

$$0 = b \cdot 0, \ a' \neq a \cdot 0,$$

т. е. что множитель h не существует.

Итак, целесообразнее признак $ab' - a'b \neq 0$ заменить эквивалентным ему признаком, состоящим в том, что равенства

$$a' = ah, \ b' = bh$$

невозможны ни для какого множителя h, т. е. что коэффициенты a' и b' не могут быть получены из коэффициентов a и b путем умножения на одно и то же число h.

Вывод. Если в системе уравнений первой степени с двумя неизвестными

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

коэффициенты a, b, a', b' при неизвестных связаны неравенством

$$ab' - a'b \neq 0,$$

то эта система имеет единственное решение:

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Определение. Система уравнений первой степени, имеющая одно и только одно (единственное) решение, называется определенной.

Для нахождения решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными по способу уравнивания коэффициентов можно:

1) составлять одно выводное уравнение, исключая одну неизвестную;

2) составлять два выводных уравнения, последовательно исключая из данной системы каждую из неизвестных;

3) составлять знаменатель и числители дробей, служащих значениями неизвестных, используя понятие об определителе второго порядка, с помощью табличек

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

8. Способ подстановки. До сих пор для составления выводного уравнения мы пользовались способом уравнивания коэффициентов. Однако то же самое выводное уравнение мы можем получить и другим способом. Именно, если мы из первого уравнения системы (I) определим равенством

$$y = \frac{12-2x}{3}$$

неизвестную y в зависимости от неизвестной x и полученное для неизвестной y выражение вставим вместо нее во второе уравнение, то мы получим уравнение

$$5x - \frac{4(12-2x)}{3} = 7,$$

которое после упрощений сведется к уравнению

$$23x = 69,$$

т. е. к тому же выводному уравнению системы (I), которое мы получили из нее способом уравнивания коэффициентов при той же неизвестной y

Тот факт, что это совпадение не случайное, а вполне закономерное, можно подтвердить путем исключения одной и той же неизвестной обоими способами из уравнений системы

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

9. Неопределенная и противоречивая система. Мы установили, что если в системе двух уравнений первой степени с двумя неизвестными коэффициенты одного из этих уравнений не могут быть получены из коэффициентов другого уравнения путем умножения на одно и то же число, отличное от нуля, то эта система имеет единственное решение.

Теперь посмотрим, какое заключение мы можем сделать о системе двух уравнений первой степени с двумя неизвестными в том случае, когда коэффициенты одного из этих уравнений могут быть получены из коэффициентов другого уравнения путем умножения их на некоторое число, отличное от нуля.

При этом мы будем различать два случая.

I случай. Сначала допустим, что не только коэффициенты, но и свободный член второго уравнения получены из коэффициентов и свободного члена первого уравнения путем умножения на число, отличное от нуля. Пусть, например, дана система:

$$(1) \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 16x + 24y = 96, \end{cases}$$

второе уравнение которой может быть получено из ее первого уравнения путем умножения обеих его частей на одно и то же отличное от нуля число 8.

Нам известно, что если мы обе части какого-либо уравнения умножим на число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному. Поэтому о втором уравнении системы (1) мы можем сказать, что оно равносильно первому уравнению этой системы, т. е. что оно имеет те же решения, что и первое уравнение. Но в таком случае очевидно, что для нахождения решений системы (1) достаточно, отбросив, например, второе уравнение, найти решения первого уравнения. Так как все эти решения могут быть найдены по правилу

$$(2) \qquad y = \frac{12-2x}{3},$$

то и решениями системы (1) будут все те и только те пары значений неизвестных x и y, которые связаны уравнением (2).

Можно, конечно, зависимости между значениями неизвестных x и y придать также вид

$$(3) \qquad x = \frac{12-3y}{2}.$$

Так как коэффициенты и свободный член второго уравнения системы (1) получены из коэффициентов и свободного члена первого уравнения этой системы с помощью умножения их на число 8, отличное от нуля, то мы можем сказать, что коэффициенты и свободный член второго уравнения пропорциональны коэффициентам и свободному члену первого уравнения:

$$16 : 2 = 24 : 3 = 96 : 12,$$

причем каждое из этих отношений равно числу 8.

Мы пришли к определенному выводу при рассмотрении того случая, когда мы умножали коэффициенты и свободный член первого уравнения на число, отличное от нуля. Но легко видеть, что к тому же выводу (правда, на основании других соображений) мы придем, если умножим коэффициенты и свободный член одного из уравнений на число нуль. В самом деле, в системе

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

второе уравнение, полученное из коэффициентов и свободного члена первого уравнения путем умножения на число нуль, удовлетворяется любой парой чисел (и притом не находящихся одно от другого ни в какой зависимости); поэтому решение системы, естественно, сводится к решению первого уравнения.

Таким образом, независимо от того, получены ли коэффициенты и свободный член второго уравнения из коэффициентов и свободного члена первого уравнения путем умножения их на число, отличное от нуля, или на нуль, мы приходим к системе, решение которой сводится к решению одного из уравнений данной системы.

Вывод. Система уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ ahx + bhy = ch, \end{cases}$$

одно из которых может быть получено из другого путем почленного умножения его на одно и то же число h (отличное от нуля или равное нулю), имеет бесконечное множество решений; для нахождения этих решений достаточно, отбросив уравнение $ahx + bhy = ch$, решить уравнение $ax + by = c$.

Определение. Система уравнений, имеющая бесконечное множество решений, называется неопределенной.

II случай. Теперь допустим, что коэффициенты второго уравнения системы двух уравнений первой степени могут быть получены из коэффициентов ее первого уравнения путем умножения их на некоторое число, но свободный член второго уравнения не может быть получен этим способом из свободного члена первого уравнения. Пусть, например, дана система

$$(4) \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 16x + 24y = 36, \end{cases}$$

второе уравнение которой может быть получено из первого уравнения путем умножения левой его части на 8, а правой на 3.

Легко видеть, что уравнения этой системы общих решений не имеют. В самом деле, если $(a;\ b)$ есть какое-либо решение первого уравнения, то число $2a + 3b$ есть 12; следовательно, число $16a+24b$, равное числу $(2a + 3b) \cdot 8$, есть $12 \cdot 8$, а не $12 \cdot 3$; иначе говоря, если $(a;\ b)$ есть решение первого уравнения данной системы, то оно не может быть решением второго уравнения этой системы, полученного из первого уравнения указанным способом.

Легко видеть, что эти рассуждения остаются в силе и в том случае, если одним из двух неравных множителей, на который надо умножить левую или правую часть первого уравнения, чтобы получить соответствующую часть второго уравнения, будет служить число нуль. В самом деле, в каждой из систем

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 36; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 16x + 24y = 0 \end{cases}$$

второе уравнение несовместно с первым: в первой системе оно вовсе не имеет решений, а во второй системе уравнения не имеют ни одного общего решения.

Определение. Два уравнения с одним и тем же числом неизвестных, не имеющие ни одного общего решения, называются несовместными. Система уравнений, среди которых имеются несовместные уравнения, называется противоречивой.

Уравнения системы (4) оказались несовместными; следовательно, система (4) — противоречивая.

Вывод. Если в системе

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и y коэффициенты a' и b' одного из них могут быть получены из соответствующих коэффициентов a и b другого уравнения путем умножения их на одно и то же число h (отличное от нуля или равное нулю), но свободный член c' не может быть получен из свободного члена c этим путем, т. е. если

$$a' = ah,\ b' = bh, \text{ но } c' \neq ch,$$

то уравнения системы несовместны и система не имеет ни одного решения.

В случае, если коэффициенты и свободные члены отличны от нуля, можно сказать, что коэффициенты при неизвестных x и y одного уравнения пропорциональны коэффициентам другого уравнения, но свободные члены не пропорциональны коэффициентам при неизвестной x или при неизвестной y.

10. Геометрическое истолкование решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Тот факт, что система двух линейных уравнений с двумя неизвестными либо имеет единственное решение, либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений, получает наглядное объяснение после того, как установлено, что каждому линейному уравнению с двумя неизвестными соответствует прямая линия, представляющая собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

1) Уравнению $y = ax + b$ соответствует прямая, получающаяся путем параллельного перемещения прямой $y = ax$ на отрезок b в направлении, совпадающем с положительным направлением оси ординат при $b > 0$ и в направлении, совпадающем с отрицательным направлением оси ординат при $b < 0$.

2) Уравнение $ax + by = c$, где $b \neq 0$, может быть заменено равносильным ему уравнением

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b},$$

которому соответствует прямая с угловым коэффициентом $-\frac{a}{b}$.

3) Если дана система уравнений

$$(1) \qquad \begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c', \end{cases}$$

то, заменяя ее при условии $b \neq 0$ и $b' \neq 0$ равносильной ей системой

$$(2) \qquad \begin{cases} y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, \\ y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'}, \end{cases}$$

заключаем, что уравнениям систем (2) и (1) соответствуют две прямые AB и $A'B'$, имеющие угловые коэффициенты $-\frac{a}{b}$ и $-\frac{a'}{b'}$.

При этом могут представиться следующие случаи:

1) Если $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$, то угловые коэффициенты $-\frac{a}{b}$ и $-\frac{a'}{b'}$ прямых AB и $A'B'$ не равны между собой, вследствие чего эти прямые пересекаются в некоторой точке $(x_0;\ y_0)$, т. е. имеют единственную общую точку $(x_0;\ y_0)$. Следовательно, при условии

$$\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$$

данная система уравнений имеет единственное решение $(x_0;\ y_0)$.

2) Если $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, то угловые коэффициенты $-\frac{a}{b}$ и $-\frac{a'}{b'}$ прямых AB и $A'B'$ равны между собой, вследствие чего эти прямые либо параллельны, либо совпадают.

Именно, если

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \text{ но } \frac{c}{b} \neq \frac{c'}{b'},$$

то прямые AB и $A'B'$, образуя равные углы с осью абсцисс, пересекают ось ординат не в одной и той же точке, т. е. они параллельны. Но параллельные прямые не имеют ни одной общей точки. Следовательно, при этом условии данная система уравнений не имеет решений.

3) Если же

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \quad \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'},$$

то прямые AB и $A'B'$ совпадают. Следовательно, при этом условии данная система уравнений имеет бесконечное множество решений.

Придавая перечисленным выше условиям соответственно вид:

$$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'},$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \text{ но } \frac{c}{c'} \neq \frac{a}{a'} \text{ или } \frac{c}{c'} \neq \frac{b}{b'},$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'},$$

мы можем удобно сформулировать их так:

Если коэффициенты при неизвестных x и y уравнений данной системы не пропорциональны, то система имеет единственное решение.

Если коэффициенты при неизвестных x и y уравнений данной системы пропорциональны, но отношение свободных членов этих уравнений не равно отношению коэффициентов при неизвестной x или при неизвестной y, то система не имеет решений.

Если коэффициенты при неизвестных x и y и свободные члены уравнений данной системы пропорциональны, то система имеет бесконечное множество решений.

Предыдущие выводы верны в предположении, что не только $b \neq 0$ и $b' \neq 0$, но также $a' \neq 0$ и $c' \neq 0$, т. е. при условии, что только один из четырех коэффициентов при неизвестных x и y и только один из двух свободных членов могут быть равными нулю.

Случаи, когда это условие не соблюдается, могут быть рассмотрены дополнительно. Но тогда мы придем к тому выводу, что условия определенности, противоречивости и неопределенности системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными выражаются в такой форме:

Если $ab' - a'b \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Если $ab' - a'b = 0$, но $cb' - c'b \neq 0$ или $ac' - a'c \neq 0$, то система не имеет решений.

Если $ab' - a'b = 0$, $cb' - c'b = 0$, $ac' - a'c = 0$, но один, по крайней мере, из коэффициентов a, b, a', b' при неизвестных x и y отличен от нуля, то система имеет бесконечное множество решений, не сводящихся к решению $(0;\ 0)$.

Эти условия обладают наибольшей общностью.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исследовать систему уравнений

$$ax + y = 1,\ x + y = a$$

по отношению к параметру a.

1) Если $a \cdot 1 - 1 \cdot 1 = a - 1 \neq 0$, т. е. $a \neq 1$, то система имеет единственное решение.

2) Если $a = 1$, то система принимает вид:

$$x + y = 1,\ x + y = 1,$$

т. е. сводится к уравнению $x + y = 1$, имеющему бесконечное множество решений, которые можно получить из равенства $y = 1 - x$ или из равенства $x = 1 - y$.

2. $$ax - 2y = a, \quad (a - 1)\,x - y = 1.$$

Ответ. При $a \neq 2$ система определенная ($x = 1$, $y = -a$); при $a = 2$ — система неопределенная.

3. $$x + (3a - 1)\,y = 0,\ x + 2y = a - 4.$$

Ответ. При $a \neq 1$ система определенная; при $a = 1$ система противоречивая.

4. Исследовать систему уравнений

$$(1 + a)\,x + (3 + a)\,y = 3 + a,\ ax + (5 + a)\,y = 4 + a$$

по отношению к параметру a.

1) Если $(1 + a)(5 + a) - (3 + a)\,a = 5 + 3a \neq 0$, т. е. $a \neq -\frac{5}{3}$, то система имеет единственное решение.

2) Если $a = -\frac{5}{3}$, то система после упрощений принимает вид:

$$-x + 2y = 2, \quad -5x + 10y = 7;$$

ввиду того что

$$\frac{-5}{-1} = \frac{10}{2} \neq \frac{7}{2},$$

данная система при $a = -\frac{5}{3}$ противоречива.

5. $(2 + a)\,x + (3 + a)\,y = 1 + a, \ ax + (5 + a)\,y = 9 + a.$

Ответ. При $a \neq -\frac{5}{2}$ система определенная; при $a = -\frac{5}{2}$ система противоречивая.

6. $(3 + a)\,x + (2 + a)\,y = 3 + a, \ ax + (a + 1)\,y = a - 1.$

Ответ. При $a \neq -\frac{3}{2}$ система определенная, при $a = -\frac{3}{2}$ система противоречивая.

7. $(a - 3)x + (a - 1)y = a + 1, \ ax + (a + 4)y = a + 8.$

Ответ. При $a \neq 6$ система определенная, причем решение не зависит от a ($x = -1$, $y = 2$); при $a = 6$ система неопределенная.

8. $(a + 2)x + (a - 1)y = 4a + 2, \ (2a - 1)x + (2a - 4)y = 3a + 5.$

Ответ. При $a \neq 3$ система определенная; при $a = 3$ система неопределенная.

9. Исследовать систему уравнений

$$ax + by = 2a, \quad a^2x - b^2y = a^2 + b^2$$

по отношению к параметрам a и b.

1) Если $-ab^2 - ba^2 = -ab\,(a + b) \neq 0$, т. е. если $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a + b \neq 0$, то система имеет единственное решение.

2) Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, но $a + b = 0$, т. е. $b = -a$, то система после упрощений принимает вид:

$$x - y = 2, \ x - y = 2,$$

т. е. сводится к уравнению $x - y = 2$, имеющему бесконечное множество решений: $x = y + 2$ или $y = x - 2$.

3) Если $a \neq 0$, $b = 0$ (и, следовательно, $a + b \neq 0$), то система после упрощений принимает вид:

$$x + 0 \cdot y = 2, \quad x - 0 \cdot y = 1;$$

уравнения этой системы явно несовместны ($x = 2$, $x = 1$).

4) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то приходим к тому же выводу, что и в случае 3).

5) Если $a = 0$, $b = 0$, то каждое из уравнений системы есть тождество: система удовлетворяется любой парой не зависящих одно от другого чисел.

10. $ax + y = -a^2, \ bx + y = -b^2.$

Ответ. При $a \neq b$ система определенная; при $a = b$ система неопределенная.

11. $ax + by = a^2 + ab + b^2, \ bx + ay = ab.$

Ответ. При $a \neq \pm b$ система определенная; при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a = b$ система противоречивая; при $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a = -b$ система неопределенная; при $a = 0$, $b = 0$ система неопределенная.

12. Исследовать систему уравнений:

$$(a - b)x - by = c, \ bx + (a + b)y = d.$$

1) Для того чтобы система имела единственное решение, достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(a-b)(a+b)+b^2 \neq 0, \text{ т. е. } a^2 \neq 0,$$

что будет иметь место при $a \neq 0$.

2) Если $a=0$, то система принимает вид:

$$bx+by=-c,\ bx+by=d.$$

а) При $b \neq 0$, $-c \neq d$ система противоречивая.

б) При $b \neq 0$, $-c=d$ система неопределённая (уравнения совпадают).

в) При $b=0$, $c \neq 0$ или $d \neq 0$ система противоречивая (одно из уравнений вовсе не имеет решений).

г) При $b=c=d=0$ система неопределенная (каждое из уравнений есть тождество).

13. Исследовать систему уравнений:

$$ax+by=al,\ bx+cy=bl.$$

1) Если $ac-b^2 \neq 0$, то система имеет единственное решение.

2) Если $ac-b^2=0$, то рассмотрим следующие случаи:

а) При $a \neq 0$ и $b \neq 0$ равенство $ac=b^2$ может быть записано в виде пропорции $b:a=c:b$, означающей, что коэффициенты второго уравнения пропорциональны коэффициентам первого уравнения; но так как и свободные члены находятся в отношении $b:a$, то второе уравнение совпадает с первым: система неопределенная.

б) При $a=0$ из равенства $ac-b^2=0$ следует, что и $b=0$; в этом случае система принимает вид:

$$0 \cdot x+0 \cdot y=0,\quad 0 \cdot x+c \cdot y=0;$$

ее решением будет пара чисел, из которых первое может быть выбрано произвольно, а второе есть 0 при $c \neq 0$ и произвольное число при $c=0$.

14. Составить уравнение, которое было бы несовместно с уравнением

$$(1)\qquad 5x+7y=15$$

и имело бы решение: $x=3$, $y=2$.

Искомое уравнение имеет вид:

$$5mx+7my=c,$$

где $c \neq 15m$.

Так как ему удовлетворяет решение (3, 2), то

$$c=15m+14m=29m.$$

При $m \neq 0$ $29m \neq 15m$; следовательно, требованиям задачи удовлетворяет уравнение

$$5mx+7my=29m$$

или равносильное ему уравнение

$$(2)\qquad 5x+7y=29.$$

Уравнение (2) есть уравнение прямой, проходящей через точку (3; 2) и параллельной прямой, соответствующей данному уравнению (1).

15. Составить уравнение, которое было бы несовместным с уравнением

$$3x-5y=10$$

и имело бы решение: $x=5$, $y=2$.

Ответ. $3x-5y=5$.

16. При каком значении параметра a система

$$(a+3)x+(a+2)y=2a+1,\ (a+8)x+(a+6)y=2a+6$$

будет неопределенной?

Ответ. При $a=2$.

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХЧЛЕНА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

1. Знак трехчлена второй степени. Мы знаем (глава III, §1, п. 2), что в зависимости от того, который из трех случаев

1) $b^2-4ac>0$, 2) $b^2-4ac=0$, 3) $b^2-4ac<0$

имеет место, трехчлен второй степени

$$ax^2+bx+c \tag{1}$$

1) имеет два неравных корня, 2) имеет два равных корня, 3) не имеет корней (в области действительных чисел).

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1°. Если $b^2-4ac>0$, то трехчлен (1) имеет два неравных между собой корня x_1 и x_2, причем имеет место тождество

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2).$$

Корни x_1 и x_2, где $x_1<x_2$, делят числовую ось на три промежутка

$$(-\infty\ldots x_1),\ (x_1\ldots x_2),\ (x_2\ldots \infty).$$

Каждое действительное число, отличное от чисел x_1 и x_2, принадлежит одному и только одному из этих промежутков, т. е. расположено либо внутри промежутка $(x_1\ldots x_2)$, либо вне этого промежутка (слева или справа от него).

Промежуток $(x_1\ldots x_2)$ называется промежутком корней.

Для всех значений переменной x, расположенных вне промежутка $(x_1\ldots x_2)$, т. е. при $x<x_1$ и при $x>x_2$ произведение $(x-x_1)(x-x_2)$ (чисел одного и того же знака) имеет положительное значение, а для всех значений переменной x, расположенных внутри промежутка корней $(x_1\ldots x_2)$, т. е. при $x_1<x<x_2$, произведение $(x-x_1)(x-x_2)$ (чисел различных знаков) имеет отрицательное значение.

Поэтому

а) при $a>0$ произведение

$$a(x-x_1)(x-x_2)$$

для всех значений переменной x, расположенных вне промежутка корней $(x_1\ldots x_2)$, имеет положительное значение, а для всех значений переменной x, расположенных внутри этого промежутка, имеет отрицательное значение;

б) при $a<0$ произведение

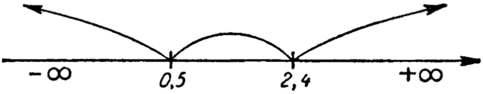
$$a(x-x_1)(x-x_2)$$

для всех значений переменной x, расположенных вне промежутка корней $(x_1\ldots x_2)$, имеет отрицательное значение, а для всех значений переменной x, расположенных внутри этого промежутка, имеет положительное значение.

Пример 1. Трехчлен $10x^2 - 29x + 12$, имеющий положительный дискриминант 361 и корни 0,5 и 2,4, может быть представлен в виде

$$10(x - 0{,}5)(x - 2{,}4).$$

Корнями 0,5 и 2,4 числовая ось делится на 3 промежутка (черт. 201).



Черт. 201

Если какое-либо число α расположено вне промежутка корней (0,5... 2,4), т. е. если

$$\alpha < 0{,}5 < 2{,}4 \text{ или } 0{,}5 < 2{,}4 < \alpha,$$

то в обоих случаях разности $\alpha - 0{,}5$ и $\alpha - 2{,}4$ имеют одинаковые знаки, ввиду чего произведение

$$(\alpha - 0{,}5)(\alpha - 2{,}4)$$

есть положительное число.

Если же какое-либо число α расположено внутри промежутка корней (0,5... 2,4), т. е. если

$$0{,}5 < \alpha < 2{,}4,$$

то разности $\alpha - 0{,}5$ и $\alpha - 2{,}4$ имеют различные знаки, ввиду чего произведение

$$(\alpha - 0{,}5)(\alpha - 2{,}4)$$

есть отрицательное число.

Принимая во внимание, что $10 > 0$, приходим к выводу, что для любого значения переменной x, расположенного вне промежутка корней (0,5... 2,4), произведение

$$10(x - 0{,}5)(x - 2{,}4)$$

имеет положительное значение, а для любого значения переменной x, принадлежащего промежутку корней (0,5... 2,4), это произведение имеет отрицательное значение.

Пример 2. Трехчлен

$$-10x^2 + 29x - 12,$$

имеющий положительный дискриминант 361 и корни 0,5 и 2,4, может быть представлен в виде

$$-10(x - 0{,}5)(x - 2{,}4).$$

При рассмотрении примера 1 мы установили, что для любого значения переменной x, расположенного вне промежутка корней (0,5... 2,4), произведение

$$(x-0{,}5)\,(x-2{,}4)$$

имеет положительное значение, а для любого значения переменной x, принадлежащего промежутку корней (0,5... 2,4), это произведение имеет отрицательное значение.

Принимая же во внимание, что $-10<0$, приходим к выводу, что произведение

$$-10\,(x-0{,}5)\,(x-2{,}4)$$

принимает, наоборот, для любого значения переменной x, расположенного вне промежутка корней (0,5... 2,4), отрицательное значение, а для любого значения переменной x, принадлежащего промежутку корней (0,5 ... 2,4), — положительное значение.

2°. Если $b^2-4ac=0$, то тождество

$$ax^2+bx+c\equiv a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right],$$

установленное в главе III, § 1, п. 2 для всякого трехчлена, в этом случае обращается в тождество

$$ax^2+bx+c\equiv a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Так как выражение $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ для всех значений переменной x, отличных от значения $-\frac{b}{2a}$, сохраняет положительное значение, то из этого тождества мы заключаем, что при условии $b^2-4ac=0$ трехчлен второй степени ax^2+bx+c для всех значений переменной x, отличных от значения $-\frac{b}{2a}$, имеет значение, знак которого совпадает со знаком коэффициента a его высшего члена, а при $x=-\frac{b}{2a}$ имеет значение 0.

Пример 3. Трехчлен $3x^2-6x+3$, имеющий дискриминант 0, может быть представлен в виде

$$3(x-1)^2.$$

Выражение $(x-1)^2$ для всех значений переменной x, отличных от числа 1, сохраняет положительное значение, а при $x=1$ имеет значение 0.

Поэтому знак произведения $3(x-1)^2$ определяется знаком коэффициента 3: так как 3 есть положительное число, то произведение $3(x-1)^2$ и, следовательно, трехчлен $3x^2-6x+3$ для всех значений переменной x, отличных от числа 1, сохраняет положительное значение, а при $x=1$ имеет значение 0.

Пример 4. Трехчлен $-3x^2+6x-3$, имеющий дискриминант 0, может быть представлен в виде произведения $-3(x-1)^2$.

Для всех значений переменной x, отличных от числа 1, он сохраняет отрицательное значение, а при $x = 1$ имеет значение 0.

3°. Если $b^2 - 4ac < 0$, то тождество

$$ax^2 + bx + c \equiv a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

указывает, что знак трехчлена $ax^2 + bx + c$ опять зависит только от его коэффициента a, так как сумма, заключенная в квадратные скобки, для всех значений переменной x сохраняет положительное значение: в самом деле, первое слагаемое этой суммы для всех значений переменной x, кроме значения $-\frac{b}{2a}$, сохраняет положительное значение и лишь при $x = -\frac{b}{2a}$ имеет значение 0, а второе слагаемое при условии $b^2 - 4ac < 0$ есть положительное число; но сумма двух положительных чисел и сумма числа 0 и положительного числа есть положительное число.

Поэтому в случае, если $b^2 - 4ac < 0$, трехчлен $ax^2 + bx + c$ для всех значений переменной x имеет значение, знак которого совпадает со знаком коэффициента a его высшего члена.

Пример 5. Трехчлен $3x^2 - 5x + 4$, имеющий отрицательный дискриминант -23, может быть представлен в виде

$$3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}\right].$$

Выражение $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2$ для всех значений переменной x, отличных от числа $\frac{5}{6}$, сохраняет положительное значение и лишь при $x = \frac{5}{6}$ имеет значение 0, а $\frac{23}{36}$ есть положительное число. Поэтому сумма, заключенная в скобки, для всех без исключения значений переменной x сохраняет положительное значение, так что знак всего произведения, в виде которого представлен данный трехчлен, определяется знаком коэффициента 3: так как 3 есть положительное число, то это произведение и, следовательно, трехчлен $3x^2 - 5x + 4$ для всех без исключения значений переменной x имеет положительное значение.

Пример 6. Трехчлен $-3x^2 + 5x - 4$ может быть представлен в виде произведения

$$-3\left[\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{23}{36}\right].$$

Для всех без исключения значений переменной x он имеет отрицательное значение.

Вывод. Обозначая трехчлен второй степени $ax^2 + bx + c$ через $f(x)$, можно представить найденные результаты в следующей форме:

1) если $D > 0$ и x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ корни трехчлена, то

$$af(x) > 0 \text{ при } x < x_1 \text{ и } x > x_2$$

и

$$af(x) < 0 \text{ при } x_1 < x < x_2;$$

2) если $D = 0$, то

$$af(x) \geqslant 0 \text{ при } -\infty < x < \infty;$$

3) если $D < 0$, то

$$af(x) > 0 \text{ при } -\infty < x < \infty.$$

Неравенства

$$af(x) > 0 \quad \text{и} \quad af(x) < 0$$

выражают тот факт, что число a и значение трехчлена $f(x)$ имеют соответственно одинаковые или различные знаки для указанных справа от этих неравенств значений независимой переменной x.

Обратим внимание на то, что неравенство

$$af(x) < 0$$

имеет место только в том случае, если

$$D > 0 \text{ и } x_1 < x < x_2.$$

Из общих выводов, содержащихся в приведенной таблице, можно сделать следующие заключения:

I. Если для числа α выполняется неравенство

$$af(\alpha) < 0,$$

то

1) дискриминант D трехчлена $f(x)$ есть положительное число, ввиду чего этот трехчлен $f(x)$ имеет два неравных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$;

2) число α расположено внутри промежутка корней $(x_1 \ldots x_2)$. т. е.

$$x_1 < \alpha < x_2.$$

В самом деле, неравенство $af(\alpha) < 0$ может иметь место только в том случае, если

$$D > 0 \text{ и } x_1 < \alpha < x_2.$$

II. Если дискриминант D трехчлена второй степени $f(x)$ есть положительное число, так что этот трехчлен $f(x)$ имеет два неравных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ и если для числа α выполняется неравенство

$$af(\alpha) > 0,$$

то число α расположено вне промежутка корней $(x_1 \ldots x_2)$, т. е. либо $\alpha < x_1$ либо $\alpha > x_2$.

В самом деле, неравенство $af(x) > 0$ может иметь место как в случае $D < 0$, так и в случае $D > 0$ и $\alpha < x_1$ или $\alpha > x_2$; но по условию $D > 0$; следовательно, имеет место случай

$$\alpha < x_1 \text{ или } \alpha > x_2.$$

III. Если для двух неравных чисел α и β $(\alpha < \beta)$ выполняется неравенство

$$f(\alpha)\,f(\beta) < 0,$$

то

1) дискриминант D трехчлена $f(x)$ есть положительное число, ввиду чего этот трехчлен $f(x)$ имеет два неравных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$;

2) один из этих корней расположен внутри промежутка $(\alpha \dots \beta)$, а другой — вне этого промежутка, т. е. имеет место либо расположение

$$\alpha < x_1 < \beta < x_2,$$

либо расположение

$$x_1 < \alpha < x_2 < \beta.$$

В самом деле, так как $f(\alpha)\,f(\beta) < 0$, то и $a^2 f(\alpha)\,f(\beta) < 0$, т. е.

$$af(\alpha)\ \ af(\beta) < 0;$$

отсюда следует, что

либо $\quad af(\alpha) > 0, \quad af(\beta) < 0,$

либо $\quad af(\alpha) < 0, \quad af(\beta) > 0.$

Но в силу заключений I и II это обозначает, что в первом случае

$$D > 0,\ \alpha < x_1 < \beta < x_2,$$

а во втором случае

$$D > 0,\ x_1 < \alpha < x_2 < \beta.$$

Приведенные выводы I и II позволяют решить следующую задачу.

Задача. Не находя корней уравнения второй степени

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

определить, как расположено относительно его корней данное число α.

Решение. Обозначим трехчлен, составляющий левую часть данного уравнения (1), через $f(x)$.

Начнем с нахождения значения $f(\alpha)$ трехчлена $ax^2 + bx + c$, т. е. с нахождения числа

$$a\alpha^2 + b\alpha + c.$$

1) Если окажется, что это число имеет знак, противоположный знаку коэффициента a при x^2, т. е. что

$$af(\alpha) < 0,$$

то в силу I мы отсюда заключим, что данное уравнение имеет два неравных корня x_1 и x_2 и что число α расположено между этими корнями:

$$x_1 < \alpha < x_2.$$

2) Если же окажется, что

$$af(\alpha) > 0,$$

то только на основании этого неравенства мы не сумеем сделать никакого заключения ни о наличии у данного уравнения корней, ни о расположении относительно их числа α.

В этом случае придется найти еще и дискриминант D данного уравнения.

а) Если мы установим, что $D > 0$, то в силу II мы будем иметь право утверждать, что число α расположено вне промежутка корней x_1 и x_2, т. е. что

$$\text{либо } \alpha < x_1 < x_2, \quad \text{либо } x_1 < x_2 < \alpha.$$

Для того чтобы установить, с какой именно стороны промежутка $(x_1 \ldots x_2)$ расположено число α, не принадлежащее этому промежутку, достаточно будет сравнить число α с каким-либо числом, расположенным между корнями x_1 и x_2; таким числом является полусумма $\frac{x_1 + x_2}{2}$ корней x_1 и x_2, так как среднее арифметическое двух чисел заключено между ними:

$$x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2;$$

но полусумму корней x_1 и x_2 можно найти непосредственно из уравнения, так как

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

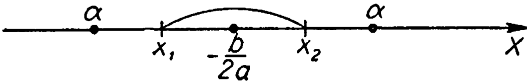
Если будет иметь место неравенство

$$\alpha < -\frac{b}{2a},$$

то это будет обозначать, что $\alpha < x_1$, т. е. что число α расположено слева от промежутка корней $(x_1 \ldots x_2)$; если же будет иметь место неравенство

$$\alpha > -\frac{b}{2a},$$

то это будет обозначать, что $\alpha > x_2$, т. е. что число α расположено справа от промежутка корней (черт. 202).



Черт. 202

б) Если мы установим, что $D < 0$, то это будет свидетельствовать о том, что данное уравнение (1) не имеет корней.

3) Наконец, если окажется, что

$$f(\alpha) = 0,$$

то это будет обозначать, что число α есть корень данного уравнения, т. е. что имеет место одно из равенств:

$$\alpha = x_1, \quad \alpha = x_2, \quad \alpha = x_1 = x_2.$$

Весь указанный ход решения задачи может быть представлен следующей таблицей:

	$af(\alpha)$	D	Вывод
1.	—	не надо находить	$D > 0$; $x_1 < \alpha < x_2$
2а.	+	+	$\begin{cases}\alpha < x_1, \text{ если } \alpha < -\frac{b}{2a}; \\ \alpha > x_2, \text{ если } \alpha > -\frac{b}{2a}.\end{cases}$
2б.	+	—	нет корней
3.	0	не надо находить	$\alpha = x_1$, или $\alpha = x_2$, или $\alpha = x_1 = x_2$.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Не решая уравнения $3x^2 - 26x + 16 = 0$, определить положение чисел 3 и 12 по отношению к корням этого уравнения.

Решение. Так как $f(3) = -35$ и, следовательно, произведение $3 \cdot (-35)$ есть отрицательное число, то данное уравнение имеет два неравных вещественных корня x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), между которыми расположено число 3. Но при наличии этих корней знак числа $3 \cdot f(12)$, т. е. числа $3 \cdot 136$, свидетельствует, что число 12 расположено вне промежутка корней. Принимая во внимание, что $3 < 12$, находим искомое расположение:

$$x_1 < 3 < x_2 < 12.$$

Если бы требовалось определить положение числа 12 по отношению к корням данного уравнения, не опираясь на предварительное испытание числа 3, то необходимо было бы установить: 1) что дискриминант

$$13^2 - 3 \cdot 16$$

есть положительное число, 2) что произведение $3f(12)$, т. е. $3 \cdot 136$, также есть положительное число и 3) что число 12 больше полусуммы корней $\frac{26}{3 \cdot 2}$ данного уравнения.

Пример 2. При каких значениях параметра m число 1 заключено между корнями уравнения

$$(12m + 7)x^2 - 3(14 - 3m)x + 11 - 3m = 0?$$

Решение. Для того чтобы число 1 было заключено между корнями данного уравнения, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

$$(12m + 7)f(1) < 0,$$

т. е. неравенство

$$(12m + 7)\ [(12m + 7) - 3(14 - 3m) + 11 - 3m] < 0,$$

которое после преобразований принимает вид:

$$6(12m + 7)\ (3m - 4) < 0.$$

Решив его, найдем искомый ответ:

$$-\frac{7}{12} < m < \frac{4}{3}.$$

Пример 3. При каких значениях параметра m число 4 расположено справа от промежутка корней $(x_1 \ldots x_2)$ уравнения

$$x^2 - 2mx - (1 - m^2) = 0.$$

Решение. Так как дискриминант D данного уравнения равен 1, то при всех значениях параметра m оно имеет два неравных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$.

Для того чтобы число 4 имело по отношению к этим корням расположение

(1) $$x_1 < x_2 < 4,$$

необходимо и достаточно, чтобы параметр m удовлетворял системе неравенств:

(2) $$f(4) > 0,\ m < 4,$$

из которых первое (ввиду того, что $D > 0$) обеспечивает расположение числа 4 вне промежутка корней $(x_1 \ldots x_2)$, а второе выражает требование, чтобы число 4 было расположено именно справа от полусуммы корней m данного уравнения.

Найдя, что

$$f(4) = m^2 - 8m + 15 = (m - 3)\ (m - 5),$$

придаем системе неравенств (2) вид:

(3) $$(m - 3)\ (m - 5) > 0,\ m < 4.$$

Первое из этих неравенств удовлетворяется

1) при $m < 3$ и 2) при $m > 5$.

Поэтому система (3) сводится к двум системам:

1) $m < 3$ и $m < 4$, 2) $m > 5$ и $m < 4$,

из которых первая удовлетворяется при $m < 3$, а вторая не удовлетворяется ни при каком значении параметра m. Итак, требуемое расположение (1) имеет место при $m < 3$.

Пример 4. При каких значениях параметра m один из корней уравнения

$$(m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + m = 0$$

принадлежит промежутку $(-1 \dots 1)$, а другой расположен вне этого промежутка?

Решение. Очевидно, что требованию задачи будет удовлетворять каждое из расположений:

$$1)\ -1 < x_1 < 1 < x_2,\quad 2)\ x_1 < -1 < x_2 < 1,$$

где x_1 и x_2 — корни данного уравнения и $x_1 < x_2$.

1) Для того чтобы имело место первое расположение, необходимо и достаточно, чтобы значение параметра m удовлетворяло системе неравенств:

$$(1)\quad (m - 1)f(-1) > 0,\ (m - 1)f(1) < 0,$$
$$D = (m + 1)^2 - m(m - 1) > 0,$$

так как число -1 должно быть расположено вне промежутка корней $(x_1 \dots x_2)$, а число 1 — внутри этого промежутка; заметим, что ввиду неравенства $-1 < 1$ число -1 при выполнении условий (1) будет расположено слева от промежутка корней $(x_1 \dots x_2)$, так как этот промежуток содержит число 1.

2) Для того чтобы имело место второе расположение, необходимо и достаточно, чтобы значение параметра m удовлетворяло системе неравенств:

$$(2)\qquad (m - 1)f(-1) < 0,\ (m - 1)f(1) > 0,\ D > 0,$$

так как число (-1) должно быть расположено внутри промежутка корней $(x_1 \dots x_2)$, а число 1 — вне этого промежутка; при этом число 1 при выполнении условий (2) будет расположено справа от промежутка корней $(x_1 \dots x_2)$, так как этот промежуток содержит число -1.

Найдя, что

$$f(-1) = -3,\quad f(1) = 4m + 1,$$

придаем системам неравенств (1) и (2) соответственно вид:

$$(1)\quad -3(m - 1) > 0,\ (m - 1)(4m + 1) < 0,\ 3m + 1 > 0,$$
$$(2)\quad -3(m - 1) < 0,\ (m - 1)(4m + 1) > 0,\ 3m + 1 > 0.$$

Решим каждую из этих систем.

I способ. 1) Первое неравенство системы (1) выполняется при $m < 1$; но если $m < 1$, то второе неравенство имеет место при $4m + 1 > 0$, т. е. при $m > -\frac{1}{4}$; наконец, третье неравенство удовлетворяется при $m > -\frac{1}{3}$.

Сопоставляя найденные результаты, приходим к выводу, что система (1) имеет место при условии

$$(3) \qquad -\frac{1}{4} < m < 1.$$

2) Первое неравенство системы (2) выполняется при $m > 1$; но если $m > 1$, то второе неравенство имеет место при $m > -\frac{1}{4}$; наконец, третье неравенство удовлетворяется при $m > -\frac{1}{3}$.

Сопоставляя найденные результаты, приходим к выводу, что система (2) имеет место при условии

$$(4) \qquad m > 1.$$

Итак, расположение

$$-1 < x_1 < 1 < x_2$$

имеет место при условии (3), а расположение

$$x_1 < -1 < x_2 < 1$$

— при условии (4).

Если бы мы не интересовались тем, при каких значениях параметра m будет иметь место каждое из рассматриваемых расположений

$$1) -1 < x_1 < 1 < x_2, \qquad 2) \; x_1 < -1 < x_2 < 1$$

в отдельности, а имели бы в виду определить, при каких значениях параметра m будет иметь место какое-либо из расположений (1) и (2), то задача могла бы быть решена значительно проще на основании вывода III.

В самом деле, для того чтобы имело место какое-либо из расположений 1) и 2), достаточно (вывод III), чтобы выполнялось неравенство

$$f(-1)f(1) < 0,$$

т. е. неравенство

$$(-3)\,(4m + 1) < 0;$$

оно выполняется при

$$(5) \qquad m > -\frac{1}{4}.$$

Но к тому же выводу мы придем, если обратим внимание на то, что неравенства (3) и (4) могут быть объединены в одно неравенство (5).

II способ. Левые части неравенств (1) и (2) представляют собой произведения двучленов первой степени:

$$m - 1, \; 4m + 1, \quad 3m + 1.$$

Представив их в виде:

$$m-1,\ 4\left[m-\left(-\frac{1}{4}\right)\right],\qquad 3\left[m-\left(-\frac{1}{3}\right)\right],$$

мы замечаем, что их корнями служат соответственно числа

$$1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}.$$

Расположив эти числа на числовой оси, мы видим, что ось разбивается ими на промежутки:

$$\left(-\infty\ldots-\frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{4}\ldots1\right),\ (1\ldots\infty).$$

Теперь составим следующую таблицу:

Промежутки для m	$D = 3m+1$	$(m-1)f(-1) = -3(m-1)$	$(m-1)f(1) = (m-1)(4m+1)$	Вывод
$-\infty\ldots-\frac{1}{3}$	$-$	не надо вычислять		нет корней
$-\frac{1}{3}\ldots-\frac{1}{4}$	$+$	$+$	$+$	
$-\frac{1}{4}\ldots1$	$+$	$+$	$-$	$-1 < x_1 < 1 < x_2$
$1\ldots\infty$	$+$	$-$	$+$	$x_1 < -1 < x_2 < 1$

Из этой таблицы видно, что расположение

$$-1 < x_1 < 1 < x_2$$

имеет место при условии

$$-\frac{1}{4} < m < 1,$$

а расположение

$$x_1 < -1 < x_2 < 1$$

при условии

$$m > 1.$$

Пример 5. При каких значениях параметра m уравнение

$$(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m = 0$$

имеет неравные корни, которые оба заключены в промежутке $(-1\ldots1)$?

Решение. 1) Для того чтобы данное уравнение имело два неравных вещественных корня x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$(m+1)^2 - m(m-1) > 0,$$

т. е. неравенство

$$3m+1>0;$$

это имеет место при

$$(1) \qquad m>-\frac{1}{3}.$$

2) Для того чтобы числа -1 и 1 имели по отношению к этим корням расположение

$$(2) \qquad -1<x_1<x_2<1,$$

необходимо и достаточно, чтобы параметр m удовлетворял, кроме того, системе неравенств:

$$(3) \quad (m-1)f(-1)>0, \quad (m-1)f(1)>0, \quad -1<-\frac{m+1}{m-1}<1,$$

из которых первое и второе обеспечивают расположение чисел -1 и 1 вне промежутка корней, а третье выражает требование, чтобы числа -1 и 1 были расположены по разные стороны от полусуммы корней $-\frac{m+1}{m-1}$.

Найдя, что

$$f(-1)=-3, \quad f(1)=4m+1,$$

мы представляем первое и второе неравенства системы (3) соответственно в виде

$$(4) \qquad (m-1)\,(-3)>0 \text{ и } (m-1)\,(4m+1)>0.$$

Эти неравенства совместны при $m-1<0$ и $4m+1<0$, т. е. при

$$(5) \qquad m<-\frac{1}{4}.$$

Наконец, третье неравенство системы (3) равносильно неравенству

$$\left(\frac{m+1}{m-1}+1\right)\left(\frac{m+1}{m-1}-1\right)<0,$$

т. е. неравенству

$$\frac{2m\cdot 2}{(m-1)^2}<0;$$

оно выполняется при

$$(6) \qquad m<0.$$

Сопоставляя результаты (1), (5) и (6), приходим к выводу, что требуемое расположение (2) имеет место при условии

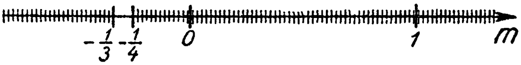
$$-\frac{1}{3}<m<-\frac{1}{4}.$$

Это нахождение общего результата (сведение результатов) значительно облегчается при применении следующего графического приема (черт. 203):

1) нанеся на числовую ось число $-\frac{1}{3}$, вычеркнем луч $\left(m < -\frac{1}{3}\right)$, на котором расположены непригодные значения параметра m;

2) затем вычеркнем те части оси, на которых расположены значения параметра m, не удовлетворяющие требованиям (5), т. е. луч $m > -\frac{1}{4}$;

3) наконец, в соответствии с требованием (6) вычеркнем луч $m > 0$;



Черт. 203

Тогда останется незачеркнутым только промежуток

$$\left(-\frac{1}{3} \dots -\frac{1}{4}\right),$$

содержащий все годные для ответа значения параметра m.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какой знак имеют трехчлены

1) $x^2 + x + 1$;
2) $2x^2 - x + 1$;
3) $x^2 - 3x + 2$

при изменении переменной x от $-\infty$ до ∞?

2. При каких значениях параметра m уравнение

$$x^2 - 2mx - (1 - m^2) = 0$$

имеет два корня, которые оба расположены между числами -2 и 4?

3. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a^2 - a - 2)x^2 + 2(a - 1)x + 2 = 0$$

имеет корни, один из которых расположен внутри промежутка $(-1 \dots 1)$, а другой — вне этого промежутка?

4. Доказать, что если $a^2 > b^2 > c^2$, то уравнение

$$(b + c)\,(x - b)(x - c) + (c + a)(x - c)(x - a) + (a + b)(x - a)(x - b) = 0$$

имеет два корня, один из которых расположен между a и b.

2. Геометрические соображения. Нахождение промежутков, в которых трехчлен второй степени имеет определенный знак, может быть легко выполнено на основании следующих геометрических соображений.

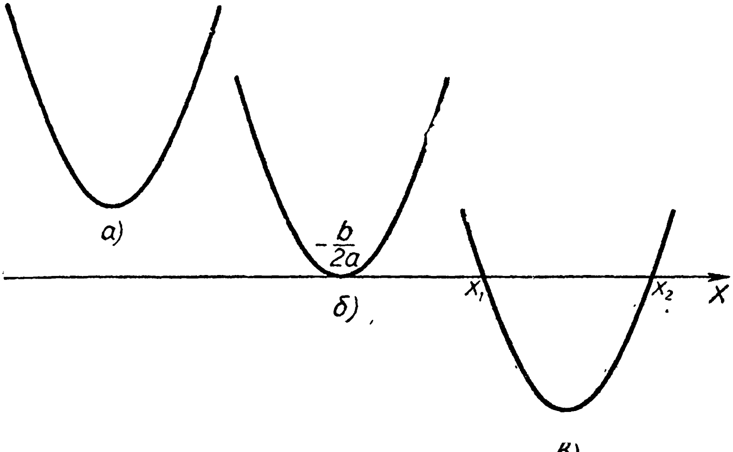
Возобновим в памяти некоторые сведения о графике трехчлена второй степени, т. е. о графике функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

1) График этой функции есть парабола, вершина которой определяется координатами $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ и которая симметрична по отношению к прямой, проходящей через точку $x = -\frac{b}{2a}$ и перпендикулярной к оси OX.

2) Эта парабола обращена ветвями вверх при $a>0$ и вниз при $a<0$.

3) Если дискриминант D трехчлена второй степени имеет отрицательное, нулевое, положительное значение, то парабола соответственно не имеет с осью OX ни одной общей точки, имеет с этой осью одну и только одну общую точку (касается оси OX), имеет с ней две общие точки (пересекает ось OX) (черт. 204 и 205).



Черт. 204

4) В случае, если $D=0$, абсцисса точки касания параболы с осью OX есть двойной корень трехчлена второй степени. В случае, если $D>0$, абсциссы x_1 и x_2 (где $x_1<x_2$) точек пересечения параболы с осью OX являются корнями трехчлена второй степени.

Опираясь на эти факты, из рассмотрения чертежей 204 и 205 придем к следующим выводам, для записи которых мы будем обозначать трехчлен ax^2+bx+c через $f(x)$.

1) Если $D<0$ и $a>0$, то (черт. 204, *а*)

$$f(x)>0 \text{ при } -\infty < x < +\infty;$$

если $D<0$ и $a<0$, то (черт. 205, *а*)

$$f(x)<0 \text{ при } -\infty < x < +\infty.$$

Таким образом, если $D < 0$, то

$$af(x) > 0 \text{ при } -\infty < x < +\infty,$$

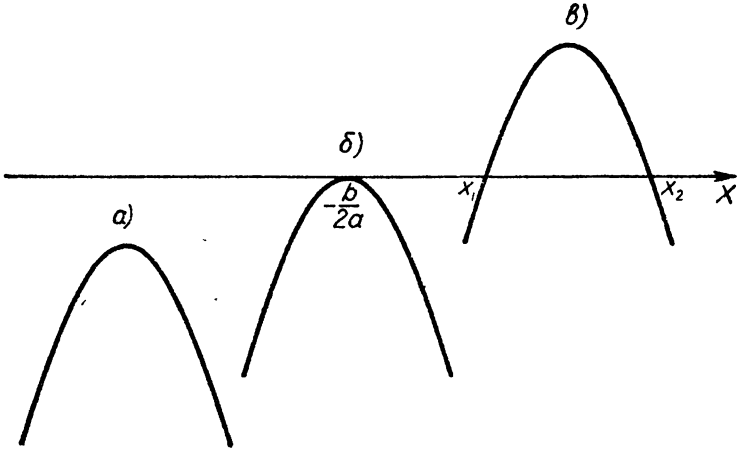
т. е. трехчлен $f(x)$ для всех значений переменной x совпадает со знаком коэффициента a его высшего члена.

2) Если $D = 0$ и $a > 0$, то (черт. 204, *б*)

$$f(x) > 0 \text{ при } x \neq -\frac{b}{2a} \text{ и } f(x) = 0 \text{ при } x = -\frac{b}{2a};$$

если $D = 0$ и $a < 0$, то (черт. 205, *б*)

$$f(x) < 0 \text{ при } x \neq -\frac{b}{2a} \text{ и } f(x) = 0 \text{ при } x = -\frac{b}{2a}.$$



Черт. 205

Таким образом, если $D=0$, то

$$af(x) > 0 \text{ при } x \neq -\frac{b}{2a} \text{ и } af(x) = 0 \text{ при } x = -\frac{b}{2a},$$

т. е. трехчлен $f(x)$ для всех значений переменной x, отличных от значения $-\frac{b}{2a}$, имеет значение, знак которого совпадает со знаком коэффициента a его высшего члена, а при $x = -\frac{b}{2a}$ имеет значение 0.

3) Если $D > 0$ и $a > 0$, то (черт. 204, *в*)

$$f(x) > 0 \text{ при } x < x_1 \text{ или } x > x_2 \text{ и } f(x) < 0 \text{ при } x_1 < x < x_2;$$

если $D > 0$ и $a < 0$, то (черт. 205, *в*)

$$f(x) < 0 \text{ при } x < x_1 \text{ или } x > x_2 \text{ и } f(x) > 0 \text{ при } x_1 < x < x_2.$$

Таким образом, если $D > 0$, то

$$af(x) > 0 \text{ при } x < x_1 \text{ или } x > x_2 \text{ и } af(x) < 0 \text{ при } x_1 < x < x_2,$$

т. е. трехчлен $f(x)$ для всех значений переменной x, расположенных вне промежутка корней ($x_1...x_2$), имеет значение, знак которого совпадает со знаком коэффициента a его высшего члена, а для всех значений переменной x, расположенных внутри этого промежутка, имеет значение, знак которого противоположен знаку коэффициента a его высшего члена.

Для того чтобы запомнить эти выводы и быстро ориентироваться в них, надо обратить внимание на то, что

1) неравенство $af(x) < 0$ имеет место только в том случае, если $D > 0$ и $x_1 < x < x_2$;

2) неравенство $af(x) > 0$ имеет место

а) в случае $D < 0$ и $-\infty < x < +\infty$;

б) в случае $D = 0$ и $x \neq -\frac{b}{2a}$;

в) в случае $D > 0$ и $x < x_1$ и $x > x_2$.

Впрочем, и этого краткого вывода можно не запоминать; достаточно в каждом отдельном случае представить себе положение параболы, соответствующее рассматриваемым условиям.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти промежутки, в которых сохраняют положительное значение трехчлены:

1) $3x^2 - 5x + 4$; 2) $4x^2 + 12x + 9$; 3) $5x^2 - 6x + 1$.

Решение. 1) Так как $D < 0$, то $3f(x) > 0$ и, следовательно, $f(x) > 0$ при $-\infty < x < +\infty$.

2) Так как $D = 0$, то $4f(x) > 0$ и, следовательно, $f(x) > 0$ при $x \neq -\frac{3}{2}$.

3) Так как $D > 0$, то $5f(x) > 0$ и, следовательно, $f(x) > 0$ при $x < x_1$ и $x > x_2$, т. е. при $x < \frac{1}{5}$ и $x > 1$.

2. Найти промежутки, в которых те же трехчлены сохраняют отрицательное значение.

Ответы. 1) Нигде; 2) нигде; 3) при $\frac{1}{5} < x < 1$.

3. Найти промежутки, в которых сохраняют положительное значение трехчлены:

1) $-3x^2 + 5x - 4$; 2) $-4x^2 - 12x - 9$; 3) $-5x^2 + 6x - 1$.

Решение. Эти трехчлены сохраняют положительное значение в тех промежутках, в которых трехчлены, рассматриваемые в упражнении 1, имеют отрицательные значения, т. е. 1) нигде; 2) нигде; 3) при $\frac{1}{5} < x < 1$.

§ 4. НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

1. Определение неравенства второй степени. Неравенством второй степени называется неравенство вида

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0,$$

левая часть которого — трехчлен (целая рациональная функция) второй степени по отношению к неизвестной, а правая часть — число 0.

Таким образом, неравенство второй степени выражает вопрос (требование найти), при каких значениях неизвестной x трехчлен второй степени по отношению к этой неизвестной имеет положительные или отрицательные значения.

На этот вопрос легко найти ответ, опираясь на выводы, к которым мы пришли в результате исследования знака трехчлена (§ 3, п. 1).

2. Решение неравенств второй степени. Обозначая трехчлен второй степени ax^2+bx+c через $f(x)$, его дискриминант через D и корни через x_1 и x_2, где $x_1<x_2$, мы можем на основании схемы, приведенной на страницах 638—640, составить следующую таблицу:

I. Если $D>0$ и $a>0$, то

$f(x)>0$ при $x<x_1$ или $x>x_2$ и $f(x)<0$ при $x_1<x<x_2$;

если $D>0$ и $a<0$, то

$f(x)>0$ при $x_1<x<x_2$ и $f(x)<0$ при $x<x_1$ или $x>x_2$.

II. Если $D=0$ и $a>0$, то

$$f(x)>0 \text{ при } x\neq-\frac{b}{2a} \text{ и } f(x)=0 \text{ при } x=-\frac{b}{2a};$$

если $D=0$ и $a<0$, то

$$f(x)<0 \text{ при } x\neq-\frac{b}{2a} \text{ и } f(x)=0 \text{ при } x=-\frac{b}{2a}.$$

III. Если $D<0$ и $a>0$, то

$$f(x)>0 \text{ при } -\infty<x<+\infty;$$

если $D<0$ и $a<0$, то

$$f(x)<0 \text{ при } -\infty<x<+\infty.$$

Эта таблица указывает вместе с тем и порядок, которого следует придерживаться при решении неравенств второй степени. Именно: сначала устанавливают знак дискриминанта D, а затем знак коэффициента a.

1) Если $D<0$, то

при $a>0$ неравенство $f(x)>0$ удовлетворяется каждым действительным числом, а неравенство $f(x)<0$ не имеет решений (черт. 204, *а*);

при $a<0$ неравенство $f(x)<0$ удовлетворяется каждым действительным числом, а неравенство $f(x)>0$ не имеет решений (черт. 205, *а*).

2) Если $D=0$, то

при $a>0$ неравенство $f(x)>0$ удовлетворяется каждым действительным числом, кроме числа $-\frac{b}{2a}$, а неравенство $f(x)<0$ не имеет решений (черт. 204, *б*);

при $a<0$ неравенство $f(x)<0$ удовлетворяется каждым действительным числом, кроме числа $-\frac{b}{2a}$, а неравенство $f(x)>0$ не имеет решений (черт. 205, *б*).

3) Если $D>0$, то

при $a>0$ неравенство $f(x)>0$ удовлетворяется каждым действительным числом, расположенным вне промежутка корней $(x_1...x_2)$, а неравенство $f(x) < 0$ — каждым действительным числом, расположенным внутри этого промежутка (черт. 204, *в*);

при $a < 0$ неравенство $f(x) > 0$ удовлетворяется каждым действительным числом, расположенным внутри промежутка корней $(x_1 \dots x_2)$, а неравенство $f(x) < 0$ — каждым действительным числом, расположенным вне этого промежутка (черт. 205, *в*).

Представим эти результаты в следующем, легко обозримом виде:

	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
1) $D < 0,\ a > 0$ $D < 0,\ a < 0$	$-\infty < x < +\infty$ нет решений	нет решений $-\infty < x < +\infty$
2) $D = 0,\ a > 0$ $D = 0,\ a < 0$	$x < -\frac{b}{2a},\ x > -\frac{b}{2a}$ нет решений	нет решений $x < -\frac{b}{2a},\ x > -\frac{b}{2a}$
3) $D > 0,\ a > 0$ $D > 0,\ a < 0$	$x < x_1,\ x > x_2$ $x_1 < x < x_2$	$x_1 < x < x_2$ $x < x_1,\ x > x_2$

Замечание. Если неравенство второй степени имеет числовые коэффициенты a, b, c, то в случае $a < 0$ его можно заменить равносильным неравенством с положительным коэффициентом $-a$. Поэтому практически можно уметь решать неравенства второй степени только в случае $a > 0$, а для этого достаточно представить себе чертеж 204.

Примеры.

1) Решить неравенства:

а) $2x^2 - x + 3 > 0$; б) $4x^2 + 2x + 5 < 0$;
в) $9x^2 - 6x + 1 > 0$;
г) $2x^2 - 5x - 12 < 0$; д) $-x^2 + 4x + 1 < 0$.

Решения.

а) $D = -23$, $a = 2$; $-\infty < x < +\infty$;

б) $D = -76$, $a = 4$; трехчлен принимает только положительные значения; неравенство не имеет решений.

в) $D = 0$, $a = 9$; $x < \frac{1}{3}$ или $x > \frac{1}{3}$.

г) Так как $2 > 0$ и $-12 < 0$, то $D > 0$;

$$x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 4;\quad -\frac{3}{2} < x < 4.$$

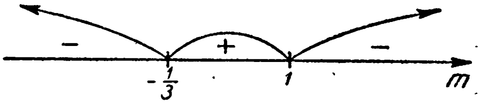
д) Заменяем неравенством $x^2 - 4x - 1 > 0$; так как $1 > 0$, $-1 < 0$, то $D > 0$; $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_2 = 2 + \sqrt{5}$; $x < 2 - \sqrt{5}$ или $x > 2 + \sqrt{5}$.

2) Решить неравенство $mx^2 + (m-1)x + (m-1) < 0$.

Решение. Так как

$$D = (m-1)^2 - 4m(m-1) = -(m-1)(3m+1) =$$
$$= -3(m-1)\left[m - \left(-\frac{1}{3}\right)\right],$$

то, нанося корни дискриминанта на числовую ось, получаем графическую схему (черт. 206):



Черт. 206

и рассматриваем следующие случаи:

1°. $m < -\frac{1}{3}$; следовательно, $D < 0$, $m < 0$:

$$-\infty < x < +\infty;$$

2°. $m = -\frac{1}{3}$; следовательно, $D = 0$, $m < 0$:

$$x < -\frac{m-1}{2m} = -2, \quad x > -2;$$

3°. $-\frac{1}{3} < m < 1$; следовательно, $D > 0$; при этом

а) если $-\frac{1}{3} < m < 0$, то $x < x_1$ и $x > x_2$;

б) если $m=0$, то из неравенства непосредственно находим, что $x > -1$;

в) если $0 < m < 1$, то $x_1 < x < x_2$;

4°. $m=1$; следовательно, $D=0$, $m>0$; нет решений;

5°. $m>1$; следовательно, $D<0$, $m>0$; нет решений.

3) Какому условию должно удовлетворять число m для того, чтобы трехчлен

$$(m-1)\,x^2 - 2\,(m+1)\,x + m - 3$$

сохранял отрицательное значение при всех действительных значениях переменной x?

Решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы число m удовлетворяло системе неравенств:

$$D < 0, \quad m - 1 < 0,$$

т. е. системе неравенств:

$$(m+1)^2 - (m-1)(m-3) < 0, \quad m - 1 < 0.$$

Эта система сводится к системе:

$$m < \frac{1}{3}, \quad m < 1,$$

из которой заключаем, что $m < \frac{1}{3}$.

4) Какому условию должно удовлетворять значение буквы h для того, чтобы неравенство

$$x^2 + 2x + h > 10$$

имело место при всех действительных значениях переменной x?

Решение. Заменяя данное неравенство неравенством

$$x^2+2x+h-10>0,$$

заключаем, что требованию удовлетворяют все те и только те значения буквы h, которые служат решениями неравенства $D<0$, т. е. неравенства

$$11-h<0;$$

следовательно, $h>11$.

5) Решить неравенство

$$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+1}<\frac{8}{x^2-1}.$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенствам:

$$\frac{x(x+1)-2(x-1)-8}{x^2-1}<0; \quad \frac{x^2-x-6}{x^2-1}<0$$

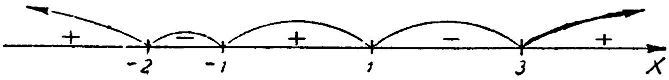
и, следовательно, неравенству

$$(x^2-x-6)\ (x^2-1)<0.$$

Придавая ему вид

$$(x+2)(x-3)(x-1)(x+1)<0,$$

наносим корни двучленных множителей на числовую ось (черт. 207)



Черт. 207

и из полученной графической схемы заключаем, что данное неравенство имеет место:

1) при $-2<x<-1$ и 2) при $1<x<3$.

6) Решить неравенство $\frac{2x^2-5x+1}{x^2+x+1}<1$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенствам:

$$\frac{(2x^2-5x+1)-(x^2+x+1)}{x^2+x+1}<0; \quad \frac{x^2-6x}{x^2+x+1}<0$$

и, следовательно, неравенству

$$(x^2-6x)\ (x^2+x+1)<0.$$

Так как $x^2-6x=x(x-6)$, а трехчлен x^2+x+1, имеющий отрицательный дискриминант, сохраняет для всех действительных значений переменной x положительное значение, то данное неравенство сводится к неравенству

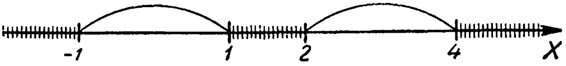
$$x(x-6)<0,$$

удовлетворяющемуся при $0<x<6$.

7) Решить систему неравенств:

$$0<x^2-3x+2<6.$$

Решение. Неравенство $x^2-3x+2>0$ удовлетворяется при $x<1$ и $x>2$, а неравенство $x^2-3x-4<0$ — при $-1<x<4$. Следовательно, система удовлетворяется при $-1<x<1$ и $2<x<4$, как это можно наглядно усмотреть из графической схемы (черт. 208):



Черт. 208

8) Найти область определения функций:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2-x-x^2}}$; б) $\lg\sqrt{\dfrac{x-3}{(5-x)(x-2)}}$; в) $\arccos\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}$.

Решение.

а) $2-x-x^2>0$; $x^2+x-2<0$; $-2<x<1$;

б) $\dfrac{x-3}{(5-x)(x-2)}>0$; $(x-3)(x-5)(x-2)<0$; $x<2$ и $3<x<5$;

в) $-1\leqslant\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}\leqslant 1$; $\left(\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}-1\right)\left(\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}+1\right)\leqslant 0$;

$$(-5x+8)(2x^2-5x)\leqslant 0;\ \left(x-\frac{8}{5}\right)x\left(x-\frac{5}{2}\right)\geqslant 0;$$

$$0\leqslant x\leqslant 1\frac{3}{5}\ \text{и}\ x\geqslant 2\frac{1}{2}.$$

9) При каких значениях переменной x имеет место равенство

$$\sin\varphi=\frac{x^2-6x+8}{x^2+2},\ \text{где}\ 0^\circ<\varphi<90^\circ.$$

Решение. Это имеет место при условии, если

$$0<\frac{x^2-6x+8}{x^2+2}<1,$$

т. е. если $0<x^2-6x+8<x^2+2$. Следовательно, $1<x<2$ и $x>4$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить неравенства:

1) $5x(x-5)>x-5$; 2) $2x^2+3x>x^2+7x-4$; 3) $(x-3)(x-7)<5(x-3)$.

Ответы. 1) $x < \frac{1}{5}$ или $x > 5$; 2) $-\infty < x < +\infty$; 3) $3<x<12$.

2. Решить неравенство $mx^2 + (2m+1)x + m + 2 > 0$.

Ответ. Если $m > \frac{1}{4}$, то $-\infty < x < +\infty$; если $m = \frac{1}{4}$, то $x < -3$ или $x > -3$; если $0 < m < \frac{1}{4}$, то $x<x_1$ или $x>x_2$; если $m<0$, то $x_1<x<x_2$.

3. Какому условию должно удовлетворять число m для того, чтобы трехчлен

$$x^2-2(4m-1)x + 15m^2 - 2m-7$$

сохранял положительное значение при всех действительных значениях переменной x?

Ответ. $2 < m < 4$.

4. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2.$$

Указание. Предварительно исключить из дробей целые части.

Ответ. 1) $x < -1$; 2) $0 < x < \frac{1}{2}$; 3) $x > 1$.

5. Решить систему неравенств: $5<x^2 - 8x + 25 < 18$.

Ответ. $1 < x < 7$.

6. Найти область определения функций:

1) $\sqrt{4x^2 - 4x - 3}$; 2) $\lg(2x - x^2)$; 3) $\arcsin(2x^2 - 1)$.

Ответы. 1) $x \leqslant -\frac{1}{2}$ или $x \geqslant \frac{3}{2}$; 2) $0 < x < 2$; 3) $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

7. При каких значениях переменной x имеет место равенство

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x-2}{x-1}, \text{ где } 0^\circ < \varphi < 45^\circ.$$

Ответ. При $x > 2$.

8. Найти промежутки, в которых функция

$$1)\ y = \frac{x^2-5x+6}{x-1}, \quad 2)\ y = \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$$

сохраняет положительное значение.

Ответы. 1) $1 < x < 2$ и $x > 3$; 2) $x < 2$ и $x > 3$, так как $x^2 + x + 1 > 0$.

§ 5. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

1. Исследование числовых уравнений второй степени целесообразнее всего выполнять по следующей схеме. Обозначим произведение корней, сумму корней и дискриминант уравнения второй степени

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0$$

соответственно через P, S и D, т. е. пусть

$$\frac{c}{a}=P \quad -\frac{b}{a}=S,\ b^2-4ac=D.$$

Для построения схемы исследования обратим внимание на то, что если $P<0$, т. е. $\frac{c}{a}<0$, то и $ac<0$ и, следовательно, $b^2-4ac=b^2+(-4ac)>0$, т. е. $D>0$; поэтому, если $P<0$, то, не вычисляя дискриминанта, можно утверждать, что уравнение (1) имеет два неравных действительных корня. Этот факт указывает, что наиболее простой будет следующая схема.

P $\frac{c}{a}$	D b^2-4ac	S $-\frac{b}{a}$	Вывод (x_1 и x_2 — корни; $x_1<x_2$)
$-$	Вычислять не надо	$+$	$x_1<0,\ x_2>0;\ \lvert x_1\rvert<\lvert x_2\rvert$
$-$		$-$	$x_1<0,\ x_2>0;\ \lvert x_1\rvert>\lvert x_2\rvert$
$-$		0	$x_1<0,\ x_2>0;\ \lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert$
$+$	$+$	$+$	$x_1>0,\ x_2>0$
$+$	$+$	$-$	$x_1<0,\ x_2<0$
$+$	0	$+$	$x_1>0,\ x_2>0;\ x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$+$	0	$-$	$x_1<0,\ x_2<0;\ x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$
$+$	$-$	Вычислять не надо	Нет корней
0	Вычислять не надо		$x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}$ или $x_1=-\frac{b}{a},\ x_2=0$

Примеры приведены в главе III, § 2, п. 3.

2. Исследование решений буквенных (параметрических) уравнений целесообразно проводить по следующей схеме:

1) решая неравенство $D<0$, узнают, при каких значениях параметра уравнение не имеет действительных корней; остальные значения параметра, т. е. те, при которых $D\geqslant 0$, будем называть допустимыми значениями;

2) решая неравенство $P<0$, узнают, при каких значениях параметра уравнение имеет корни разных знаков; отсюда заключают, при каких допустимых значениях параметра будет иметь место неравенство $P>0$;

3) решая неравенство $S<0$, узнают, при каких допустимых значениях параметра сумма корней есть число отрицательное; отсюда заключают, при каких допустимых значениях параметра будет иметь место неравенство $S>0$;

4) отдельно испытывают все граничные значения промежутков.

Пример 1. Исследовать уравнение

$$(a-2)x^2+2(2a-3)x+5a-6=0$$

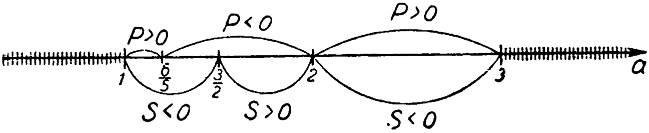
в зависимости от параметра a.

Решение. 1) Найдя дискриминант $-a^2+4a-3$, решаем неравенство

$$-a^2+4a-3<0;$$

так как $-a^2+4a-3=-(a-1)(a-3)$, то $D<0$ при $a<1$ и при $a>3$.

Следовательно, уравнение имеет действительные корни при $1 \leqslant a \leqslant 3$; это и будут допустимые значения параметра. Построив числовую ось для параметра a, наносим на нее значения 1 и 3 и вычеркиваем ту часть оси, которой принадлежат недопустимые значения (черт. 209):



Черт. 209

2) Так как $P=\frac{5a-6}{a-2}$, где $a \neq 2$, то, решив неравенство $\frac{5a-6}{a-2}<0$, находим, что $P<0$ при $\frac{6}{5}<a<2$. Следовательно, $P>0$ при остальных допустимых значениях параметра, т. е. при $1<a<\frac{6}{5}$ и при $2<a<3$.

Нанеся значения $\frac{6}{5}$ и 2 на ось, мы отметим на ней, какой знак имеет P в каждом из образовавшихся промежутков.

3) Так как $S=-\frac{2(2a-3)}{a-2}$, где $a \neq 2$, то, решив неравенство $-\frac{2(2a-3)}{a-2}<0$, находим, что $S<0$ при $a<\frac{3}{2}$ и при $a>2$. Следовательно, $S>0$ при остальных допустимых значениях параметра, т. е. при $\frac{3}{2}<a<2$.

Нанеся значение $\frac{3}{2}$ на ось, мы отметим на ней, какой знак имеет S в каждом из промежутков.

4) Сделаем теперь выводы относительно граничных значений.

При $a=1$ и $a=3$ $D=0$: уравнение имеет 2 равных действительных корня.

При $a=2$ данное уравнение вырождается в уравнение первой степени $2x+4=0$, имеющее корень -2.

При $a=\frac{6}{5}$ $P=0$, а $S<0$, т. е. $x_1<0$, $x_2=0$.

При $a = \frac{3}{2}$ $S=0$, т. е. $x_1 = -x_2$.

5) На основании этого материала составляем таблицу:

a	D	P	S	Вывод $(x_1 < x_2)$
$-\infty < a < 1$	—	бесполезно		действительных корней нет
1	0			$x_1 = x_2$
$1 < a < \frac{6}{5}$	+	+	—	$x_1 < 0,\ x_2 < 0$
$\frac{6}{5}$	+	0	—	$x_1 < 0,\ x_2 = 0$
$\frac{6}{5} < a < \frac{3}{2}$	+	—	—	$x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$
$\frac{3}{2}$	+		0	$x_1 = -x_2$
$\frac{3}{2} < a < 2$	+	—	+	$x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1\rvert < \lvert x_2\rvert$
2				$x_1 = -2$
$2 < a < 3$	+	+	—	$x_1 < 0,\ x_2 < 0$
3	0			$x_1 = x_2$
$3 < a < \infty$	—	бесполезно		действительных корней нет

Пример 2. Исследовать уравнение

(1) $$x^2 \cos\alpha + 2x \sin\alpha - 1 = 0,$$

где $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

Решение. Рассмотрим следующие случаи:

1) Если $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $P = -\frac{1}{\cos\alpha} < 0$ и, следовательно,

$$D > 0,\quad x_1 < 0,\quad x_2 > 0.$$

Итак, при условии $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$ уравнение (1) имеет один отрицательный и один положительный корень.

2) Если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $P > 0$. Поэтому находим D:

$$D = \sin^2\alpha + \cos\alpha$$

и решаем соотношение

$$\sin^2\alpha + \cos\alpha \geqslant 0,$$

т. е. соотношение

(2) $$\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 \leqslant 0.$$

Соотношение (2) выполняется при условии:

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant \mathrm{ccs}\,\alpha \leqslant \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Очевидно, что в данном случае верхнюю границу надо заменить числом 0:

$$(3)\qquad -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leqslant \cos\alpha < 0.$$

Так как $S = -2\operatorname{tg}\alpha$, то в данном случае $S > 0$.

Поэтому при условиях $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и (3) уравнение (1) имеет два положительных корня.

8) Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то уравнение (1) заменяется уравнением

$$2x - 1 = 0,$$

т. е. имеет корень $\frac{1}{2}$.

4) Если $\alpha = \pi$, то мы получаем уравнение

$$x^2 + 1 = 0,$$

которое не имеет действительных корней.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Исследовать уравнения:

1) $x^2 - 2(a-5)x + a^2 - 1 = 0$;
2) $ax^2 + 2(a+1)x + a - 1 = 0$.

Ответы.

1) Если	то
$-\infty < a < -1$,	$x_1 < 0,\ x_2 < 0$
$a = -1$,	$x_1 = 0,\ x_2 = -12$
$-1 < a < 1$,	$x_1 < 0,\ x_2 > 0$
$a = 1$,	$x_1 = 0,\ x_2 = -8$
$1 < a < \frac{13}{15}$,	$x_1 < 0,\ x_2 < 0$
$a = \frac{13}{15}$,	$x_1 = x_2 = -\frac{12}{5}$
2) Если	то
$a < -\frac{1}{3}$	нет решений
$a = -\frac{1}{3}$	$x_1 = x_2 = 2$
$-\frac{1}{3} < a < 0$	$x_1 > 0,\ x_2 > 0$
$a = 0$	$x_1 = \pm\infty;\ x_2 = \frac{1}{2}$
$0 < a < 1$	$x_1 < 0,\ x_2 > 0;\ \lvert x_1\rvert > \lvert x_2\rvert$
$a = 1$	$x_1 = -4,\ x_2 = 0$
$a > 1$	$x_1 < 0,\ x_2 < 0$

2. Между какими границами должна быть заключена переменная y для того, чтобы уравнение

$$x^2-3xy+y^2+2x-9y+1=0$$

имело действительные корни?

Решение. Представив данное уравнение в виде

$$x^2-(3y-2)\,x+y^2-9y+1=0,$$

найдем, что дискриминант его имеет вид $5y^2+24y$.

Поэтому, для того чтобы корни уравнения были действительными, достаточно, чтобы имело место неравенство $y\,(5y+24)>0$.

Ответ. $y\leqslant-4{,}8$ или $y\geqslant0$.

3. Доказать, что уравнение

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$$

всегда имеет два действительных корня.

4. Какое значение должна иметь буква m для того, чтобы уравнение

$$8x^2-(m-1)\,x+m-7=0$$

имело: 1) действительные и равные корни; 2) корни, равные по абсолютному значению, но противоположные по знаку; 3) взаимно обратные корни; 4) корень, равный нулю?

Ответ. 1) $m_1=9$, $m_2=25$; 2) $m=1$; 3) $m=15$; 4) $m=7$.

5. При каких значениях буквы a уравнение

$$x^2-2\,(a-5)\,x+a^2-1=0$$

имеет два действительных корня одного и того же знака?

Ответ. $a<-1$ или $1<a\leqslant\frac{13}{15}$.

Корни — отрицательные, так как при этих условиях $2(a-5)<0$.

3. Исследование решений задач второй степени. В этом пункте мы займемся исследованием решений задач второй степени.

Весь ход этого исследования лучше всего выяснится в процессе решения примерных задач.

Задача 1. Бассейн имеет два насоса. Первый накачивает воду в бассейн, второй во время, на h часов большее, выкачивает всю воду. При совместном действии обоих насосов бассейн наполняется в a часов. Во сколько часов первый насос наполняет бассейн?

Решение. Обозначив искомое число часов через x, составим систему:

$$(1)\qquad \frac{a}{x}-\frac{a}{x+h}=1,\quad 0<x<a.$$

Из уравнения, представленного в виде

$$\frac{a}{x}=\frac{a}{x+h}+1,$$

видно, что при $a>0$, $h>0$ (что предполагается по смыслу величин a и h), $x>0$ будет иметь место неравенство $\frac{a}{x}>1$ и, следовательно, неравенство $x<a$.

Поэтому система (1) может быть заменена системой:

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{x+h} = 1, \quad x > 0.$$

Приведем уравнение к нормальному виду:

$$x^2 + hx - ah = 0.$$

Так как $-ah < 0$, то $P < 0$; следовательно, $D > 0$ и $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. Положительным будет корень

$$x_2 = \frac{-h + \sqrt{h^2 + 4ah}}{2},$$

так как корень $x_1 = \frac{-h - \sqrt{h^2 + 4ah}}{2}$ есть заведомо отрицательное число.

Если бы неравенство $x < a$ не было усмотрено из уравнения, то надо было бы, как бывает в большинстве случаев, записав неравенство

$$(2) \qquad \frac{\sqrt{h^2 + 4ah} - h}{2} < a,$$

исследовать, при каких соотношениях между параметрами a и h оно имеет место, т. е., иначе говоря, решить его по отношению к какому-либо из параметров. Но так как в средней школе решение иррациональных неравенств не рассматривается, то на вопрос можно ответить с помощью следующих рассуждений.

Заменив неравенство (2) эквивалентным ему неравенством

$$(3) \qquad \sqrt{h^2 + 4ah} < 2a + h$$

и заметив, что обе части его суть положительные числа (а это существенно), возводим обе части неравенства (3) в квадрат:

$$(4) \qquad h^2 + 4ah < 4a^2 + 4ah + h^2.$$

Так как это последнее неравенство (4) выполняется при всех действительных значениях параметров h и a, то и предыдущее неравенство (3), получающееся путем нахождения арифметического корня из обеих частей неравенства (4), также справедливо при тех же условиях.

Найденный корень x_2 можно рассматривать как ответ на задачу, так как он представляет собой значение того промежутка времени, в течение которого первый насос наполняет бассейн: в самом деле, из уравнения следует, что доля бассейна, наполняемая первым насосом за 1 час, превосходит долю бассейна, опорожняемую вторым насосом за 1 час, как раз на долю бассейна, наполняемую при совместном действии обоих насосов за 1 час.

Задача 2. Поезд из B вышел на a часов раньше поезда, вышедшего из A навстречу первому поезду; при этом поезда встретились на половине пути. Если бы оба поезда вышли одновременно, то через n часов расстояние между ними составляло бы $\frac{1}{4}$ первоначального расстояния. Найти время пробега каждого из поездов от A до B.

Решение. Обозначив через x и y соответственно время пробега каждого из поездов, составим систему уравнений:

$$(1) \qquad \frac{y}{2}-\frac{x}{2}=a, \quad \frac{n}{x}+\frac{n}{y}=\frac{3}{4}.$$

Приведем ее к виду:

$$y-x=2a, \quad 4n\ (x+y)=3xy.$$

Употребим способ подстановки:

$$y=x+2a, \quad 3x^2-2(4n-3a)x-8an=0.$$

Проведем исследование. Так как при $a>0$, $n>0$ имеем:

$$P=-\frac{8}{3}an<0,$$

то $D>0$ и $x_1<0$, $x_2>0$.

Положительное значение имеет корень

$$x_2=\frac{4n-3a+\sqrt{16n^2+9a^2}}{3};$$

при $4n-3a>0$ это очевидно, а при $4n-3a<0$ это следует из того, что $x_1<0$.

Корню x_2 соответствует положительный корень y_2, равный сумме x_2+2a.

По смыслу задачи должно быть:

$$(2) \qquad x_2>n, \quad y_2>n, \quad y_2>a.$$

Первые два неравенства следуют из того, что при $n>0$, $x_2>0$, $y_2>0$

$$\frac{n}{x_2}+\frac{n}{y_2}=\frac{3}{4}; \quad \frac{n}{x_2}<\frac{3}{4}; \quad \frac{n}{y_2}<\frac{3}{4}; \quad \frac{n}{x_2}<1, \quad \frac{n}{y_2}<1,$$

а третье неравенство — из того, что при тех же условиях

$$y_2=x_2+2a=a+(x_2+a); \quad y_2>a.$$

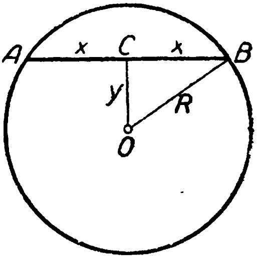
Найденные значения x_2 и y_2, удовлетворяя уравнениям (1) и неравенствам (2), могут рассматриваться как ответ на задачу: в самом деле, неравенство $y_2>a$ обеспечивает возможность встречи поездов на пути AB; первое уравнение утверждает, что разность между временами пробега поездов равна a часам; неравенства $x_2>n$, $y_2>n$ обеспечивают наличие некоторого промежутка между положениями поездов через n часов после их одновременного выхода;

наконец, второе уравнение утверждает, что это расстояние составляет $\frac{1}{4}$ первоначального расстояния.

Задача 3. В окружности радиуса R проведена хорда, обладающая тем свойством, что сумма ее длины и ее расстояния от центра имеет значение a. Найти длину этой хорды.

Решение. Обозначая (черт. 210) длины хорды и ее расстояния от центра соответственно через $2x$ и y, составляем систему:

$$(1) \qquad 2x+y=a, \quad x^2+y^2=R^2, \quad 0<x<R, \quad 0<y<R.$$



Черт. 210

Из второго уравнения этой системы следует, что при $x>0$ и $y>0$ имеют место неравенства: $x<R$, $y<R$; неравенство же $y>0$ есть следствие неравенства $x<\frac{a}{2}$. Поэтому система (1) сводится к системе:

$$(2) \qquad 2x+y=a, \quad x^2+y^2=R^2, \quad 0<x<\frac{a}{2}.$$

Приступим к решению этой системы. С помощью подстановки

$$y=a-2x$$

мы приходим к уравнению

$$5x^2-4ax+a^2-R^2=0.$$

Так как $a=2x+y=x+(x+y)$, то при $x>0$, $y>0$ должно быть: $a>x+y>R$. Следовательно, задача будет иметь решение только при условии $a>R$; это предположение мы и сделаем.

1) При условии $a>R$ разность a^2-R^2 имеет положительное значение, так что $P>0$. Поэтому мы должны начинать с нахождения условия действительности корней:

$D=5R^2-a^2\geqslant 0$, т. е. $a\leqslant R\sqrt{5}$ (ибо $a>0$, $R>0$).

2) $P>0$, $S=\frac{4}{5}a>0$; следовательно, $x_1>0$, $x_2>0$.

3) Из этих двух чисел будет пригодно лишь то, для которого будет выполняться требование $x < \frac{a}{2}$.

Это соотношение будет иметь место при тех значениях параметров a и R, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{2a \mp \sqrt{5R^2 - a^2}}{5} < \frac{a}{2};$$

представляя его в виде

$$\mp \sqrt{5R^2 - a^2} < \frac{a}{2},$$

заключаем, что для знака — соотношение очевидно, а для знака $+$ оно будет выполняться при условии

$$\left(\sqrt{5R^2 - a^2}\right)^2 < \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

которое равносильно условию

$$a > 2R.$$

Отсюда мы делаем вывод, что корень

$$x_1 = \frac{2a - \sqrt{5R^2 - a^2}}{5}$$

служит ответом на вопрос задачи при условии

$$R < a \leqslant R\sqrt{5},$$

а корень

$$x_2 = \frac{2a + \sqrt{5R^2 - a^2}}{5}$$

при условии

$$2R < a \leqslant R\sqrt{5}.$$

Таким образом, при условии $R < a < 2R$ система (2) имеет только одно решение (именно x_1; y_1), а при условии $2R < a \leqslant R\sqrt{5}$ — два решения (x_1; y_1; и x_2; y_2).

Найденные решения можно рассматривать как ответ на задачу; в самом деле, так как $0 < x < R$, то в окружности радиуса R можно построить хорду $2x$; если ее расстояние от центра мы обозначим через y', то будем иметь равенство $x^2 + y'^2 = R^2$; сопоставляя это равенство с равенством $x^2 + y^2 = R^2$ и имея в виду, что $y > 0$ и $y' > 0$, найдем, что $y' = y$; так как $2x + y = a$, то построенные отрезки $2x$ и y удовлетворяют требованию условия задачи.

Задача 4. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью *a см* в секунду. Через сколько секунд оно достигнет высоты h?

Решение. Тело будет иметь равномерно замедленное движение; по истечении t секунд его скорость v и достигнутая высота h будут иметь значения:

$$h = at - \frac{gt^2}{2}, \quad v = a - gt.$$

Располагая первое равенство по степеням неизвестной t, получаем уравнение

$$gt^2 - 2at + 2h = 0.$$

Так как $P > 0$ и $S > 0$, то составляем дискриминант

$$D = a^2 - 2gh.$$

1) Если $h < \frac{a^2}{2g}$, то уравнение имеет 2 положительных корня t_1 и t_2. Оба корня дают ответ на задачу. Тело достигнет высоты h дважды: при своем поднятии до высоты h и при своем опускании после достижения им наивысшей возможной для него точки, соответствующей начальной скорости a.

Из уравнения $v = a - gt$ видно, что скорости v_1 и v_2, соответствующие моментам t_1 и t_2, удовлетворяют равенству

$$v_1 + v_2 = a - gt_1 + a - gt_2 = 2a - g(t_1 + t_2) = 2a - \frac{2ag}{g} = 0,$$

так что $v_2 = -v_1$; это означает, что скорости v_1 и v_2, которые имело тело на высоте h, при поднятии и при падении равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку.

2) Если $h = \frac{a^2}{2g}$, то корни совпадают: $t_{1,2} = \frac{a}{g}$. В момент $\frac{a}{g}$ скорость v тела будет равна нулю: тело достигнет наибольшей возможной для него высоты.

Заметим, что так как при $D \geqslant 0$

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{a}{g},$$

то промежуток времени $\frac{a}{g}$, необходимый телу для того, чтобы подняться до наивысшего положения, есть среднее арифметическое двух промежутков времени, в течение которых оно, подымаясь и падая, достигает каждый раз высоты h.

3) В случае $h = 0$ из уравнения находим, что

$$t_1 = 0, \; t_2 = \frac{2a}{g};$$

это означает, что промежуток времени, необходимый телу для того, чтобы, поднявшись на наибольшую высоту, соответствующую начальной скорости a, вернуться в исходное положение, равен $\frac{2a}{g}$ секундам, так что время поднятия тела $\frac{a}{g}$ равно времени его падения.

Alexei

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора 4

Глава I. Извлечение квадратного корня из чисел. Иррациональные числа

§ 1. Квадратный корень из числа—точный и приближенный с точностью до 1 7

1. Квадрат целого числа . . . . —
2. Квадратный корень из числа . . . . —
3. Приближенный квадратный корень с точностью до 1. 8
4. Извлечение квадратного корня из целых чисел с помощью вычисления 9
5. Вывод правила (алгорифма) извлечения квадратного корня из целых чисел . . . . —
6. Расположение вычислений 12
7. Другие примеры 13
8. Правило (алгорифм) извлечения квадратного корня из целого числа 15
9. Число цифр корня 16
10. Нахождение приближенного квадратного корня с недостатком с точностью до 1 из дробных чисел. . . . . —

§ 2. Приближенные квадратные корни с точностью до $\frac{1}{n}$ . . . 17

1. Повышение степени точности . . . . —
2. Общий способ нахождения приближенных квадратных корней с точностью до $\frac{1}{n}$ 18
3. Нахождение приближенных квадратных корней из десятичных дробей с точностью до данного десятичного знака. 19
4. Влияние на корень перенесения запятой в подкоренном числе 20
5. График зависимости $y = \sqrt{x}$ 21
6. Извлечение квадратного корня из чисел с помощью таблиц 24

§ 3. Иррациональные числа 27

1. Двойные последовательности чисел . . . . —
2. Понятие об иррациональном числе 38
3. Геометрическое изображение вещественного числа 41
4. Сравнение вещественных чисел 42
5. Действия над вещественными числами 43

Глава II. Степени и корни. Рациональные показатели степени

§ 1. Степени с целыми положительными показателями 50

1. Определение степени . . . . —
2. Знак степени . . . . —
3. Основные свойства степени 50
4. Квадрат многочлена 51

5. Изменение степени 55
6. Графики зависимостей $y = x^2$ и $y = x^3$ для положительных значений основания x 56
7. Таблицы квадратов и кубов чисел 58
8. Нахождение промежуточных значений степеней x^2 и x^3 —
9. Графики зависимостей $y = x^2$ и $y = x^3$ 59

§ 2. Степени с нулевыми и отрицательными показателями 63
1. Общее понятие —
2. Действия над степенями с нулевым и отрицательными показателями 64
3. График зависимости $y = x^{-1}$ 65
4. График зависимости $y = x^{-2}$ 67
5. Таблица чисел, обратных данным числам 69

§ 3. Корень *n*-й степени 71
1. Определение корня —
2. Арифметический корень n-й степени 72
3. Свойства арифметического корня 74
4. Алгебраический корень n-й степени 77
5. Вынесение множителя за знак корня и введение множителя под знак корня 79
6. Степень с дробным показателем 80
7. Основное свойство степени с дробным показателем 81
8. Действия над степенями с дробными показателями 82
9. Степень с отрицательным дробным показателем 83
10. Действия над степенями с положительными и отрицательными дробными показателями —
11. Изменение степени с дробным показателем 85
12. График зависимости $y = x^{\frac{m}{n}}$ 86

§ 4. Действия над радикалами 91
1. Общее понятие —
2. Приведение радикала к нормальному виду —
3. Приведение радикалов к общему показателю 92
4. Подобные радикалы —
5. Сложение и вычитание радикалов 93
6. Умножение радикалов 95
7. Деление радикалов 96
8. Возведение радикалов в степень 97
9. Извлечение корня из радикала —
10. Освобождение числителя или знаменателя дроби от радикалов 98

Глава III. **Уравнения второй степени**

§ 1. Решение уравнения второй степени 104
1. Общее понятие —
2. Формула для решения уравнения второй степени —
3. Частный случай 109
4. Неполные уравнения второй степени 110

§ 2. Соотношения между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами 116
1. Общий случай —
2. Частный случай 118
3. Приложения теорем 1 и 2 119

§ 3. Трехчлен второй степени 138
1. Общее понятие —
2. Связь трехчлена второй степени с уравнением второй степени —
3. Разложение трехчлена второй степени на множители 139
4. График зависимости $y = x^2 + px + q$ 141

5. График зависимости $y = ax^2 + bx + c$ 145
6. Ход изменения параболы 151
§ 4. **Иррациональные уравнения** 158
1. Общее понятие . . . . —
2. Постановка вопроса . . . . —
3. Область допустимых значений неизвестной иррационального уравнения 159
4. Теорема о возведении обеих частей уравнения в квадрат 160
5. Решение иррациональных уравнений, содержащих один радикал второй степени 162
6. Решение и исследование параметрических (буквенных) иррациональных уравнений 166
7. Иррациональные уравнения, содержащие два радикала второй степени . . . . —
8. Графическое решение и исследование иррациональных уравнений 168
9. Решение иррациональных уравнений способом введения вспомогательных неизвестных 172
10. Решение иррациональных уравнений комбинированием способов 173
11. Более сложные примеры 175
12. Иррациональные уравнения, содержащие радикалы третьей степени 177
§ 5. **Биквадратные уравнения** 179
1. Общее понятие . . . . —
2. Решение биквадратного уравнения 180
3. Свойства корней биквадратного уравнения 182
4. Разложение биквадратного трехчлена на линейные множители 183
5. График зависимости $y = x^4 + px^2 + q$ . . . . —
6. Общий случай 186
7. Примеры 188

Глава IV. Функции и графики

§ 1. **Функциональная зависимость** 194
1. Понятие о функции . . . . —
2. Способы задания функции 195
§ 2. **Прямоугольная система координат** 198
§ 3. **Геометрическое изображение функций** 200
1. Прямая задача . . . . —
2. Обратная задача 201
§ 4. **Прямая пропорциональная зависимость** 203
1. Общее понятие . . . . —
2. График прямой пропорциональной зависимости 204
§ 5. **Линейная функция** 208
1. Общее понятие . . . . —
2. График линейной функции . . . . —
§ 6. **Квадратичная функция** 213
1. Определение . . . . —
2. Ход изменения квадратичной функции . . . . —
3. Скорость изменения квадратичной функции. 219
4. Касательная к параболе 222
5. Графическое решение уравнений второй степени . . . 223
§ 7. **Обратная пропорциональная зависимость** 227
1. Общее понятие . . . . —
2. График функции $y = \frac{a}{x}$ при $a > 0$. 228
3. График функции $y = \frac{a}{x}$ при $a < 0$ 232

§ 8. **Дробная линейная функция** . . . 234
  1. Определение . . . —
  2. Частные случаи . . . —
§ 9. **Степенная функция** . . . 238

Глава V. Системы уравнений второй степени

§ 1. **Общее понятие** . . . 241
§ 2. **Система двух уравнений с двумя неизвестными** . . . 242
§ 3. **Система уравнений, содержащая одно уравнение второй степени и одно уравнение первой степени** . . . 246
§ 4. **Система уравнений, содержащая два уравнения второй степени** . . . 247
§ 5. **Системы уравнений, решаемые особыми приемами** . . . 249
  1. Элементарные системы . . . —
  2. Графическое решение систем уравнений . . . 259

Глава VI. Числовые последовательности

§ 1. **Понятие о числовой последовательности** . . . 270
  1. Определение последовательности . . . —
  2. Задание последовательности с помощью формулы . . . 271
  3. Общий член последовательности . . . 272
  4. Другие способы задания последовательности. . . . —
§ 2. **Геометрическое представление последовательности** . . . 273
§ 3. **Виды последовательностей** . . . 276
  1. Возрастающие и убывающие последовательности. . . . —
  2. Последовательности, ограниченные сверху или снизу . . . 279
  3. Ограниченные последовательности . . . 281
§ 4. **Последовательности, имеющие предел** . . . 282
  1. Равносильность двух соотношений . . . —
  2. Понятие о пределе последовательности . . . 283
§ 5. **Неограниченно возрастающие и неограниченно убывающие последовательности** . . . 288

Глава VII. Переменные и их пределы

§ 1. **Переменная, областью изменения которой служит последовательность** . . . 292
  1. Переменная x_n . . . —
  2. Виды переменных, областью изменения которых служат последовательности . . . 296
  3. Свойства переменных, областью изменения которых служат последовательности . . . 297
  4. Теоремы о бесконечно малых переменных . . . 298
  5. Теоремы о пределах переменных . . . 304
  6. Переменная a^n . . . 309
  7. Переменная $a^{\frac{1}{n}}$ . . . 311
§ 2. **Непрерывно изменяющиеся переменные** . . . 313
  1. Понятие о непрерывно изменяющейся переменной . . . —
  2. Область изменения . . . 315
  3. Понятие о пределе непрерывно изменяющейся переменной 316
  4. Теоремы о пределах непрерывно изменяющихся переменных 319

Глава VIII. Прогрессии

§ 1. **Арифметическая прогрессия** . . . 322
  1. Определение . . . —
  2. Формула для n-го члена арифметической прогрессии . . . 323

3. Формула для суммы n последовательных членов арифметической прогрессии . . . 328
4. Типы задач на арифметическую прогрессию . . . 330
§ 2. **Геометрическая прогрессия** . . . 334
1. Определение . . . —
2. Формула для n-го члена геометрической прогрессии . . . 336
3. Формула для суммы n последовательных членов геометрической прогрессии . . . 340
4. Типы задач на геометрическую прогрессию . . . 341
5. Сумма бесконечной геометрической прогрессии . . . 345
6. Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную . . . 348

Глава IX. **Показательная и логарифмическая функция**

§ 1. **Общие свойства степени** . . . 351
1. Понятие о степени с рациональным показателем . . . —
2. Свойства степени с рациональным показателем . . . —
3. Понятие о степени с иррациональным показателем . . . 355
§ 2. **Показательная функция** . . . 357
1. Понятие о показательной функции . . . —
2. Свойства показательной функции . . . —
3. График показательной функции . . . 362
§ 3. **Общие свойства логарифма** . . . 365
1. Понятие о логарифме . . . —
2. Свойства логарифма при любом основании . . . 367
§ 4. **Логарифмическая функция** . . . 369
1. Определение . . . —
2. Свойства логарифмической функции . . . —
3. График логарифмической функции . . . 372
4. Связь между показательной и логарифмической функциями —
§ 5. **Логарифмирование и потенцирование выражений** . . . 376
1. Логарифм произведения, частного, степени и корня . . . —
2. Логарифмирование выражений . . . 378
3. Потенцирование выражений . . . 379
§ 6. **Десятичные логарифмы** . . . 380
1. Понятие о десятичном логарифме . . . —
2. Десятичные логарифмы чисел вида 10^n . . . 382
3. Иррациональные логарифмы целых чисел . . . —
4. Иррациональные логарифмы десятичных дробей . . . 384
5. Характеристика и мантисса . . . —
6. Десятичные логарифмы неправильных десятичных дробей 385
7. Десятичные логарифмы правильных десятичных дробей —
8. Логарифмы, отличающиеся только характеристикой . . 386
§ 7. **Таблицы десятичных логарифмов** . . . 387
1 Виды таблиц . . . —
2 Устройство и употребление таблиц I и II . . . —
3. Действия над логарифмами . . . 389
4. Устройство и употребление пятизначных таблиц логарифмов 392
5. Интерполирование . . . 395

Глава X. **Функции и их исследование**

Обзор изученных функций и их графиков

§ 1. **Общие сведения о функциях** . . . 402
1. Понятие о функции . . . —
2. Общее обозначение функциональной зависимости . . . —
3. Область определения функции . . . 404
4. Четные и нечетные функции . . . 406

5. Периодические функции 409
6. Возрастающие и убывающие (монотонные) функции 412
§ 2. Свойства отдельных классов функций 416
1. Целая рациональная функция —
2. Дробная рациональная функция 417
3. Степенная функция с рациональным показателем 418
4. Трансцендентные функции 419
§ 3. Элементарное исследование функций 419
1. Порядок исследования функций —
2. Нахождение промежутков, в которых функция сохраняет определенный знак —
3. Нахождение области изменения функции 423
§ 4. Понятие о пределе функции 430
1. Определение понятия —
2. Теоремы о пределах функций 433
3. Предел функции на бесконечности 435
4. Неограниченно возрастающие и неограниченно убывающие функции 437
5. Односторонние пределы 443

Производная функция

§ 5. Две основные задачи 447
1. Задача о вычислении скорости движущейся точки —
2. Задача о проведении касательной к кривой 454
3. Геометрический смысл понятия скорости 461
§ 6. Задача о вычислении ускорения движущейся точки 463
1. Среднее ускорение при прямолинейном движении —
2. Геометрический смысл понятия о среднем ускорении 465
3. Ускорение в данный момент 466
4. Геометрический смысл понятия об ускорении в данный момент —
§ 7. Нахождение производных от некоторых функций 467
1. Понятие о производной функции —
2. Производная постоянной 469
3. Производная линейной функции 471
4. Производная трехчлена второй степени 472
5. Производная дробной линейной функции 474
6. Производная функции x^n 476
7. Производная функции $\sqrt{ax+b}$ 478
§ 8. Нахождение производных суммы, произведения и частного двух функций 479
1. Производная суммы функций —
2. Производная произведения функций 480
3. Производная степени 482
4. Производная целой рациональной функции 483
5. Производная частного двух функций 484
§ 9. Производные тригонометрических функций 487
1. Предел отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ —
2. Производные функций $\sin x$ и $\cos x$ 490
3. Производные функций $\sin mx$ и $\cos mx$ 491
4. Производные функций $\sin(mx+n)$ и $\cos(mx+n)$ 492
§ 10. Возрастание и убывание функций 495
1. Геометрические признаки 496
2. Аналитические признаки 497
§ 11. Максимумы и минимумы функций 501
1. Общее понятие —
2. Признаки существования максимума или минимума 502

§ 12. Порядок исследования хода изменения функций 507
1. Общие указания и примеры —
2. Задачи на нахождение максимума или минимума функций 523

Глава XI. Комплексные числа

§ 1. Расширение области действительных чисел 536
1. Понятие о числовом поле —
2. Цель введения комплексных чисел 538
§ 2. Введение комплексных чисел 539
1. Определение комплексного числа —
2. Равенство комплексных чисел 542
3. Другой способ изображения комплексного числа —
4. Нахождение комплексного числа по его модулю и аргументу и обратная задача 544
5. Сопряженные комплексные числа 547
§ 3. Сложение и умножение комплексных чисел 548
1. Сложение комплексных чисел —
2. Умножение комплексных чисел 550
§ 4. Мнимая единица 554
1. Определение мнимой единицы —
2. Другая форма комплексного числа —
§ 5. Вычитание и деление комплексных чисел 556
1. Вычитание комплексных чисел —
2. Противоположные комплексные числа —
3. Деление комплексных чисел 558
4. Основное свойство частного (дроби). Практический прием деления 559
5. Построение частного 560
§ 6. Действия над комплексными числами, представленными в тригонометрической форме 563
1. Тригонометрическая форма комплексного числа —
2. Умножение комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме 564
3. Деление комплексных чисел, представленных в тригонометрической форме 565
4. Возведение комплексного числа в степень 566
5. Приложение формулы Муавра 567
6. Извлечение квадратного корня из отрицательного числа 568
7. Решение квадратного уравнения, имеющего отрицательный дискриминант 569

Глава XII. Неравенства

§ 1. Арифметические неравенства 572
1. Основные понятия и теоремы —
2. Неравенства, вытекающие из одного данного неравенства 575
3. Неравенства, вытекающие из двух данных неравенств 577
§ 2. Алгебраические неравенства 582
1. Тождественные неравенства —
2. Доказательство тождественных неравенств —
3. Определение условных неравенств 587
4. Равносильные условные неравенства 588
5. Неравенства первой степени с одной неизвестной 592
6. Системы двух неравенств первой степени с одной неизвестной 593
7. Неравенства, приводящиеся к неравенствам первой степени с одной неизвестной 604

Глава XIII. Исследование уравнений и систем уравнений

§ 1. Уравнения и системы уравнений первой степени 605
1. Смысл исследования уравнений . . . . —
2. Исследование уравнений первой степени с одной неизвестной. . . . . —
§ 2. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными 610
1. Понятие о системе уравнений . . . . —
2. Решение системы двух уравнений . . . . —
3. Равносильность систем уравнений 611
4. Понятие о выводном уравнении . . . . —
5. Свойство выводного уравнения 612
6. Выводная система уравнений . . . . —
7. Способ уравнивания коэффициентов . . . . —
8. Способ подстановки 616
9. Неопределенная и противоречивая система . . . . —
10. Геометрическое истолкование решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными 619
§ 3. Исследование трехчлена второй степени 624
1. Знак трехчлена второй степени . . . . —
2. Геометрические соображения 637
§ 4. Неравенства второй степени 640
1. Определение неравенства второй степени . . . . —
2. Решение неравенств второй степени 641
§ 5. Исследование уравнений и задач второй степени 646
1. Исследование числовых уравнений второй степени . . . —
2. Исследование решений буквенных (параметрических) уравнений 647
3. Исследование решений задач второй степени 651

Исидор Аронович Гибш
АЛГЕБРА

Редактор *Н. И. Лепешкина*
Обложка художника *Е. А. Десятова*
Художественный редактор *Б. М. Кисин*
Технические редакторы *А. А. Шлихт* и *В. И. Корнеева*
Корректор *О. М. Суздалова*

* * *

Сдано в набор 3/III 1960 г. Подписано к печати 12/XII 1960 г. 60×92$^1/_{16}$
Печ. л. 41,5. Уч.-изд. л. 34,35. Тираж 30 000 экз. А12150. Заказ № 1263.

* * *

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Полиграфкомбинат Саратовского совнархоза, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.
Цена без переплета 9 р. 25 к. Переплет 1 р. 50 к.

Школьные учебники СССР

SHEBA.SPB.RU/SHKOLA